

ΚΩΝ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ

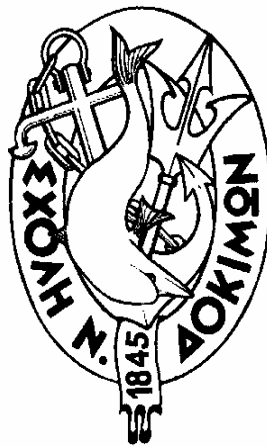
Τομέας Φυσικών Επιστημών
Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

**ΚΑΙ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΤΩΝ ΑΓΩΓΙΜΩΝ
ΣΤΕΡΕΩΝ**

Β' ΕΚΔΟΣΗ



ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

2010

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται κατά κύριο λόγο στους δευτεροετείς σπουδαστές της Σχολής Ναυτικών Δοκίμων και καλύπτει τις ανάγκες ενός μέρους του διδασκόμενου μαθήματος της Φυσικής. Χωρίζεται σε δύο μέρη: (α) Στοιχεία Φυσικής των Κρυσταλλικών Στερεών, και (β) Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία και Κύματα. Τα τρία πρώτα κεφάλαια αποτελούν το πρώτο μέρος, ενώ τα υπόλοιπα κεφάλαια το δεύτερο.

Πέραν από την κάλυψη συγκεκριμένων διδακτικών αναγκών, η συνύπαρξη των δύο παραπάνω αντικειμένων έχει και βαθύτερη παιδαγωγική λογική: Στο πρώτο μέρος ο μαθητής αποκτά μια ιδέα για τη φυσική δομή και τις βασικές ιδιότητες των υλικών μέσων, πριν αποδυθεί στο δυσκολότερο έργο της μελέτης των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων που αναπτύσσονται μέσα σ' αυτά. Η επιλογή της ύλης έγινε με πρακτικά κριτήρια: Ο μαθητής δεν απαιτείται (ούτε είναι καν επιθυμητό) να γίνει παντογνώστης, χρειάζεται όμως να αποκτήσει τις αναγκαίες βάσεις για να παρακολουθήσει στη συνέχεια πιο προχωρημένα και εξειδικευμένα αντικείμενα όπως, π.χ., η Ηλεκτρονική.

Ο βασικός στόχος των δύο πρώτων κεφαλαίων του πρώτου μέρους είναι η γνωριμία με τα κρυσταλλικά στερεά και η κατανόηση των μηχανισμών ηλεκτρικής αγωγιμότητάς τους, με έμφαση στις διαφορές ανάμεσα στα μέταλλα και τους ημιαγωγούς. Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο του μέρους αυτού τα στερεά εξετάζονται από τη σκοπιά της Στατιστικής Φυσικής, με κεντρικό άξονα την κατανομή της ενέργειας στους φορείς αγωγιμότητας.

Οι εξισώσεις του Maxwell αποτελούν τη βάση για την κατανόηση όλων των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων. Στο δεύτερο μέρος του βιβλίου εξετάζουμε το συσχετισμό των εξισώσεων αυτών με αντίστοιχους εμπειρικούς νόμους και περιγράφουμε τη χρήση των εξισώσεων για τη μελέτη της κυματικής συμπεριφοράς του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Αναφέρονται οι βασικοί τρόποι παραγωγής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και μελετάται η διάδοση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε μονωτικά και αγωγίμα υλικά μέσα. Μερικά σημαντικά θεωρητικά θέματα αναπτύσσονται ξεχωριστά στα Προβλήματα στο τέλος κάθε κεφαλαίου. Όλα τα προβλήματα συνοδεύονται από λύσεις ή υποδείξεις λύσεων.

Ευχαριστώ τον συνάδελφο Μ. Φαφαλιό για τις χρήσιμες συμβουλές και τη σημαντική βοήθεια που μου προσέφερε σε ό,τι αφορά τη Φυσική των ημιαγωγών. Ιδιαίτερα επωφελείς για μένα υπήρξαν οι συζητήσεις (ακόμα κι αν κάποιες φορές κατέληξαν σε διαφωνίες) με τον Α. Μαγουλά πάνω στα ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Στα πλαίσια, μάλιστα, μιας προσπάθειας γεφύρωσης των διαφορών μας (των ποδοσφαιρικών μη εξαιρουμένων!), σχεδιάζουμε από κοινού μια νέα, επαυξημένη έκδοση του βιβλίου. Τέλος, είμαι ιδιαίτερα υποχρεωμένος στον Φ. Κατσαμάνη που φρόντισε ώστε κάθε πρόβλημα σχετικό με τους υπολογιστές μου να βρίσκει γρήγορα τη λύση του, πράγμα που έκανε δυνατή την απρόσκοπτη ολοκλήρωση αυτού του συγγράμματος.

Κ. Ι. Παπαχρήστου
Αθήνα, Απρίλιος 2009

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗ Β΄ ΕΚΔΟΣΗ

Στη νέα έκδοση του βιβλίου είχα την ευκαιρία να κάνω μερικές διορθώσεις και προσθήκες με σκοπό την σαφέστερη και πληρέστερη παρουσίαση του αντικειμένου. Οι αλλαγές αυτές υπήρξαν αποτέλεσμα γόνιμων συζητήσεων με τους αλάνθαστους κριτές του βιβλίου, τους οποίους και ευχαριστώ. Ελπίζω να έμαθαν απ' το δάσκαλό τους όσα έμαθε εκείνος απ' αυτούς!

Κ. Ι. Π.

Ιούνιος 2010

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΡΥΣΤΑΛΛΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΑΤΟΜΑ, ΜΟΡΙΑ, ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΙ

- 1.1 Καταστάσεις της Ύλης 1
- 1.2 Κρυσταλλικά και Αμορφα Στερεά 2
- 1.3 Ατομικό Μοντέλο του Rutherford 4
- 1.4 Μοντέλο του Bohr για το Άτομο του Υδρογόνου 6
- 1.5 Άτομα με Πολλά Ηλεκτρόνια 8
- 1.6 Μόρια 11
- 1.7 Ενεργειακές Ζώνες Κρυσταλλικών Στερεών 13
- 1.8 Κρύσταλλοι Τετρασθενών Στοιχείων 17
- Ερωτήσεις 18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΕΡΕΩΝ

- 2.1 Εισαγωγή 21
- 2.2 Αγωγοί και Μονωτές 21
- 2.3 Ημιαγωγοί 24
- 2.4 Νόμος του Ohm για τα Μέταλλα 26
- 2.5 Νόμος του Ohm για τους Ημιαγωγούς 29
- 2.6 Επίδραση της Θερμοκρασίας στην Αγωγιμότητα 31
- 2.7 Ημιαγωγοί Προσμείξεως 33
- 2.8 Νόμος Δράσεως των Μαζών 35
- 2.9 Μεικτές Προσμείξεις σε Ημιαγωγούς 37
- 2.10 Ρεύματα Διάχυσης στους Ημιαγωγούς 37
- Ερωτήσεις 40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

- 3.1 Βασικές Έννοιες από τη Στατιστική Φυσική 43
- 3.2 Κλασική Κατανομή Maxwell-Boltzmann για Ιδανικό Αέριο 45
- 3.3 Κβαντική Στατιστική 47
- 3.4 Κατανομή Fermi-Dirac για τα Ηλεκτρόνια ενός Μετάλλου 48
- 3.5 Υπολογισμός της Ενέργειας Fermi για ένα Μέταλλο 51
- 3.6 Κατανομή Fermi-Dirac για τους Καθαρούς Ημιαγωγούς 52
- 3.7 Ενέργεια Fermi στους Ημιαγωγούς 54
- Ερωτήσεις 57

ΜΕΡΟΣ Β: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΕΔΙΩΝ

- 4.1 Διανυσματικά Πεδία και Διανυσματικοί Τελεστές 59
- 4.2 Ολοκληρωτικά Θεωρήματα 63
- 4.3 Αστρόβιλα και Σωληνωτά Πεδία 65
- 4.4 Συντηρητικά Πεδία Δυνάμεων 67

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΤΑΤΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

- 5.1 Νόμος του *Coulomb* και Ηλεκτρικό Πεδίο 69
- 5.2 Νόμος του *Gauss* 71
- 5.3 Ηλεκτρικό Δυναμικό 74
- 5.4 Εξισώσεις *Poisson* και *Laplace* 78
- 5.5 Δυναμική Ενέργεια Φορτίου σε Ηλεκτροστατικό Πεδίο 79
- 5.6 Μεταλλικός Αγωγός σε Ηλεκτροστατική Ισορροπία 80
- Ερωτήσεις 82
- Προβλήματα 83

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ

- 6.1 Πυκνότητα Ρεύματος 91
- 6.2 Εξίσωση Συνεχείας 94
- 6.3 Νόμος του *Ohm* 96
- Ερωτήσεις 98
- Προβλήματα 99

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΤΑΤΙΚΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

- 7.1 Μαγνητικό Πεδίο και Νόμος *Biot-Savart* 101
- 7.2 Νόμος του *Gauss* για το Μαγνητισμό 103
- 7.3 Νόμος του *Ampère* 104
- Ερωτήσεις 107
- Προβλήματα 108

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΣΤΗΝ ΥΛΗ

- 8.1 Ηλεκτρική και Μαγνητική Διπολική Ροπή 111
- 8.2 Διηλεκτρικά Μέσα 113
- 8.3 Μαγνητικά Μέσα 116
- 8.4 Εφαρμογές 119
- Ερωτήσεις 122
- Προβλήματα 123

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΧΡΟΝΙΚΑ-ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

9.1	Εισαγωγή	125
9.2	Ηλεκτρεγερτική Δύναμη	126
9.3	Νόμος Faraday-Henry	128
9.4	Νόμος Ampère-Maxwell	131
9.5	Εξισώσεις του Maxwell	133
9.6	Διατήρηση του Φορτίου	135
9.7	Ηλεκτρομαγνητικά Δυναμικά	137
9.8	Ενέργεια του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου και Διάνυσμα Poynting	138
	Ερωτήσεις	141
	Προβλήματα	142

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

10.1	Κυματική Εξίσωση	155
10.2	Αρμονικό Κύμα	157
10.3	Επίπεδο Κύμα στο Χώρο	158
10.4	Ηλεκτρομαγνητικό Κύμα	162
10.5	Μονοχρωματικό Επίπεδο Η/Μ Κύμα στο Κενό	166
10.6	Επίπεδα Η/Μ Κύματα, Γενικά	170
10.7	Εξάρτηση της Ταχύτητας Διαδόσεως από τη Συχνότητα	171
10.8	Τρέχον και Στάσιμο Κύμα	172
10.9	Διάδοση Η/Μ Κύματος σε Αγωγίμο Μέσο	175
10.10	Ανάκλαση Η/Μ Κύματος στην Επιφάνεια Αγωγού	180
10.11	Ηλεκτρομαγνητική Ακτινοβολία	181
10.12	Ακτινοβολία Επιταχυνόμενου Σημειακού Φορτίου	183
10.13	Ακτινοβολία Ηλεκτρικού Διπόλου	185
10.14	Ακτινοβολία Μαγνητικού Διπόλου	187
10.15	Φάσμα της Η/Μ Ακτινοβολίας	188
10.16	Απορρόφηση Η/Μ Ακτινοβολίας από Διηλεκτρικά (Μονωτές)	188
10.17	Συχνότητα Πλάσματος Αγωγίμου Μέσου	190
	Ερωτήσεις	193
	Προβλήματα	195

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 205

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ 207

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΤΟΜΑ, ΜΟΡΙΑ, ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΙ

1.1 Καταστάσεις της Ύλης

Έχει παρατηρηθεί ότι οι περισσότερες φυσικές ουσίες μπορούν, ανάλογα με τη θερμοκρασία, να βρεθούν σε κάθε μια από τις τρεις καταστάσεις της ύλης: στερεά, υγρή, ή αέρια. Ποιοι φυσικοί παράγοντες ευθύνονται για την κατάσταση στην οποία βρίσκεται μια ουσία;

Η φυσική κατάσταση μιας ουσίας είναι προϊόν «ανταγωνισμού» ανάμεσα σε δύο αντίθετους παράγοντες: (α) Μιας *ελκτικής* (ή *ενωτικής*) δύναμης, ηλεκτρομαγνητικής προέλευσης, ανάμεσα στα άτομα (ή μόρια, ή ιόντα) η οποία έχει την τάση να φέρνει τα άτομα όσο γίνεται πιο κοντά το ένα στο άλλο. Αυτό επιτυγχάνεται καλλίτερα όταν τα άτομα βρίσκονται σε κάποιας μορφής κανονική διάταξη, όπως συμβαίνει σε ένα *κρυσταλλικό πλέγμα*. (β) Της θερμικής ενέργειας, η οποία προκαλεί *τυχαία* κίνηση των ατόμων. Η άτακτη αυτή κίνηση γίνεται πιο έντονη με την αύξηση της θερμοκρασίας. Οι δύο παραπάνω παράγοντες δρουν αντίθετα ο ένας προς τον άλλον.

Ας θεωρήσουμε μια ουσία που βρίσκεται αρχικά στη *στερεά* κατάσταση. Στην κατάσταση αυτή κυριαρχούν οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων, οι οποίες τείνουν να συσπειρώσουν τα άτομα σε μια κανονική διάταξη που ονομάζεται *κρύσταλλος*. Η θερμική ενέργεια δεν είναι ικανή να αντιτεθεί στις ισχυρές δυνάμεις που συγκρατούν τα άτομα σε σταθερές σχετικές θέσεις μέσα στην κρυσταλλική δομή: το μόνο που επιτυγχάνει είναι να θέσει τα άτομα σε *ταλάντωση* γύρω από τις σταθερές αυτές θέσεις.

Καθώς η θερμοκρασία αυξάνει, το πλάτος ταλάντωσης των ατόμων γίνεται όλο και μεγαλύτερο, ώσπου κάποια στιγμή οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων δεν είναι πια αρκετά ισχυρές για να συγκρατήσουν τα άτομα στις θέσεις που κατείχαν μέσα στον κρύσταλλο. Στη θερμοκρασία αυτή (*σημείο τήξης*) η κρυσταλλική δομή διασπάται και το στερεό *τήκεται* (λιώνει) και μετατρέπεται σε *υγρό*. Στην κατάσταση αυτή υπάρχει ισοδυναμία ανάμεσα στις δύο αντίθετες τάσεις, δηλαδή, τις ελκτικές ατομικές δυνάμεις και τη θερμική κίνηση.¹

Με την περαιτέρω αύξηση της θερμοκρασίας η θερμική κίνηση των ατόμων αρχίζει να γίνεται κυρίαρχη στο παιχνίδι του ανταγωνισμού. Όταν η θερμοκρασία φτάσει στο *σημείο βρασμού*, οι ενέργειες των ατόμων γίνονται τόσο μεγάλες ώστε αυτά κατορθώνουν τελικά να «αποδράσουν» από το υγρό και να σχηματίσουν ένα *αέριο*. Στην κατάσταση αυτή οι ελκτικές ατομικές δυνάμεις είναι πολύ ασθενείς (σε ένα *ιδανικό* αέριο θεωρούνται αμελητέες). Παρατηρούμε ότι τα σημεία τήξης και βρασμού μιας ουσίας σχετίζονται άμεσα με την ισχύ των (ηλεκτρομαγνητικής φύσης) δεσμών μεταξύ των ατόμων της ουσίας αυτής.

¹ Το διαμάντι αποτελεί αξιοσημείωτη εξαίρεση: το σημείο τήξης του είναι, θεωρητικά, στους 5000 K, αλλά δεν το φτάνει ποτέ, αφού μετατρέπεται σε γραφίτη στους 3400 K !

1.2 Κρυσταλλικά και Άμορφα Στερεά

Είδαμε προηγουμένως ότι η κρυσταλλική δομή, που χαρακτηρίζεται από κανονικότητα στη διάταξη των ατόμων, εξασφαλίζει τη μέγιστη σταθερότητα στη στερεά κατάσταση μιας ουσίας. Στη φύση όμως συναντούμε και υλικά που *μοιάζουν* με στερεά (π.χ., είναι σκληρά και έχουν σταθερό σχήμα) χωρίς εν τούτοις να διαθέτουν πραγματική κρυσταλλική δομή. Τέτοια στερεά ονομάζονται *άμορφα* και η ατομική δομή τους είναι παρόμοια με αυτή των υγρών: τα άτομα βρίσκονται σε τυχαίες θέσεις, σε αντίθεση με την κανονική διάταξη των ατόμων στα κρυσταλλικά στερεά. Μπορούμε, δηλαδή, να φανταστούμε ένα άμορφο στερεό σαν υγρό με τεράστιο ιξώδες! Στην κατηγορία αυτή ανήκει το συνηθισμένο γυαλί (αν ακούσετε την κυρία Χ. να καυχιέται για τα πανάκριβα κρυστάλλινα ποτήρια που αγόρασε, μην ξεγελαστείτε: η καθημερινή χρήση του όρου «κρύσταλλο» δεν έχει την ίδια σημασία με αυτή που δίνουμε εδώ στον όρο αυτό!).

Ας επιστρέψουμε, όμως, στους πραγματικούς κρυστάλλους. Πού οφείλεται η τόσο μεγάλη ευστάθεια της κρυσταλλικής δομής; Ας θυμηθούμε ένα πολύ απλούστερο παράδειγμα, αυτό ενός εκκρεμούς. Ευσταθής ισορροπία της σφαίρας του εκκρεμούς επιτυγχάνεται όταν η σφαίρα βρίσκεται ακίνητη στο χαμηλότερο δυνατό σημείο της τροχιάς της (όταν, δηλαδή, το νήμα είναι κατακόρυφο). Στη θέση αυτή η δυναμική ενέργεια της σφαίρας λόγω του πεδίου βαρύτητας γίνεται *ελάχιστη*. Κατ' αναλογία, η εσωτερική δυναμική ενέργεια ορισμένων στερεών ελαχιστοποιείται όταν τα άτομά τους τοποθετούνται έτσι ώστε να σχηματίσουν μια κανονική, κρυσταλλική δομή. Αυτό εξασφαλίζει και τη μέγιστη ευστάθεια των στερεών αυτών. Από την άλλη μεριά, κάποια άλλα στερεά είναι άμορφα διότι, λόγω αυξημένων εσωτερικών τριβών στη φάση της στερεοποίησης, τα άτομά τους δεν μπορούν να μετακινηθούν στις κατάλληλες θέσεις ώστε να σχηματίσουν κρυστάλλους. Σημειώνουμε επίσης ότι η μετάβαση ενός κρυσταλλικού στερεού από τη στερεά στην υγρή κατάσταση γίνεται απότομα όταν η θερμοκρασία φτάσει στο σημείο τήξης. Αντίθετα, η υγροποίηση ενός άμορφου στερεού γίνεται *βαθμιαία*, έτσι ώστε να μην είναι δυνατό να προσδιοριστεί σαφές σημείο τήξης.

Ορισμένα κρυσταλλικά στερεά, όπως τα μέταλλα, εμφανίζουν αυξημένη ηλεκτρική αγωγιμότητα. Αυτό οφείλεται στο ότι διαθέτουν στο εσωτερικό τους ελεύθερους ηλεκτρικούς φορείς (ηλεκτρόνια, στην περίπτωση των μετάλλων) οι οποίοι μπορούν να κινηθούν προσανατολισμένα κάτω από την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου. Στο άλλο άκρο, υπάρχουν στερεά που δεν διαθέτουν τέτοιους φορείς κι έτσι συμπεριφέρονται σαν ηλεκτρικοί *μονωτές*. Υπάρχουν, βέβαια, και «διπλοί πράκτορες», οι *ημιαγωγοί*, οι οποίοι φέρουν χαρακτηριστικά και από τις δύο παραπάνω κατηγορίες και, υπό κανονικές συνθήκες, εμφανίζουν αγωγιμότητα που όμως είναι μικρότερη από αυτή των μετάλλων.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα των στερεών² είναι η *θερμική τους αγωγιμότητα*. Η διάδοση της θερμότητας στα στερεά γίνεται με δύο τρόπους: (α) ταλαντώσεις του κρυσταλλικού πλέγματος (σε όλα τα στερεά), και (β) μετακίνηση ελεύθερων ηλεκτρονίων (στα μέταλλα). Η εξαιρετική θερμική αγωγιμότητα των μετάλλων οφείλεται στην ταυτόχρονη δράση και των δύο αυτών μηχανισμών.

² Στο εξής, με τον όρο «στερεό» θα εννοούμε «κρυσταλλικό στερεό».

Τα στερεά μπορούν να ταξινομηθούν με βάση το είδος του δεσμού που συγκρατεί τα άτομα (ή μόρια, ή ιόντα) του κρυσταλλικού πλέγματος. Οι βασικότερες κατηγορίες στερεών που παρατηρούνται είναι οι εξής:

1) Ομοιοπολικά στερεά. Τα άτομα συγκρατούνται μεταξύ τους με ομοιοπολικούς δεσμούς. Τέτοια στερεά είναι οι κρύσταλλοι του διαμαντιού, του πυριτίου και του γερμανίου. Λόγω της πολύ σταθερής ηλεκτρονικής δομής τους, τα στερεά αυτά εμφανίζουν διάφορα κοινά χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, είναι εξαιρετικά σκληρά και παραμορφώνονται δύσκολα. Επίσης, είναι κακοί αγωγοί της θερμότητας³ και του ηλεκτρισμού (διότι δεν διαθέτουν σημαντικό αριθμό ελεύθερων ηλεκτρονίων, τα οποία θα μπορούσαν να μεταφέρουν ενέργεια ή ηλεκτρικό φορτίο από σημείο σε σημείο).

2) Ιοντικά στερεά. Δομούνται με κανονική διάταξη θετικών και αρνητικών ιόντων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι κρύσταλλοι του χλωριούχου νατρίου (NaCl) οι οποίοι αποτελούνται από ιόντα Na^+ και Cl^- . Λόγω της απουσίας ελεύθερων ηλεκτρονίων, τα στερεά αυτά είναι κακοί αγωγοί της θερμότητας και του ηλεκτρισμού. Επίσης, είναι σκληρά και έχουν υψηλό σημείο τήξης εξαιτίας των ισχυρών ηλεκτροστατικών δυνάμεων ανάμεσα στα ιόντα.

3) Στερεά δεσμού υδρογόνου. Χαρακτηρίζονται από την παρουσία ισχυρά διπολικών μορίων (βλ. Παρ.8.2) τα οποία περιέχουν ένα ή περισσότερα άτομα υδρογόνου. Τέτοιο στερεό είναι ο πάγος (H_2O).

4) Μοριακά στερεά. Αποτελούνται από μόρια που δεν είναι πολικά (βλ. Παρ.8.2). Σαν παράδειγμα αναφέρουμε τη στερεά μορφή του CO_2 .

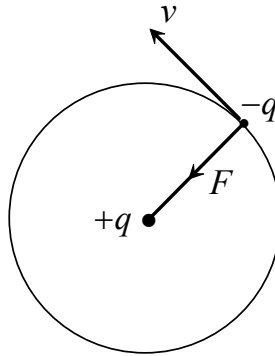
5) Μέταλλα. Αποτελούνται από άτομα με μικρή ενέργεια ιονισμού και μικρό αριθμό ηλεκτρονίων στην εξωτερική τους στοιβάδα. Τα ηλεκτρόνια αυτά απελευθερώνονται εύκολα από τα άτομα στα οποία ανήκουν, χρησιμοποιώντας μέρος της ενέργειας που εκλύεται κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου. Το μεταλλικό πλέγμα, λοιπόν, αποτελείται από μια κανονική διάταξη *θετικών ιόντων*, ανάμεσα στα οποία κινείται ένα «σμήνος» *ελεύθερων ηλεκτρονίων*. Στα ηλεκτρόνια αυτά οφείλουν τα μέταλλα την ηλεκτρική τους αγωγιμότητα καθώς και ένα σημαντικό μέρος της θερμικής τους αγωγιμότητας (ένα άλλο μέρος οφείλεται στις ταλαντώσεις των ιόντων του κρυσταλλικού πλέγματος). Στα ελεύθερα ηλεκτρόνια επίσης οφείλεται η συνεκτικότητα της μεταλλικής κρυσταλλικής δομής, αφού χωρίς αυτά οι απωστικές δυνάμεις μεταξύ των θετικών ιόντων θα αποσυνέθεταν τον κρύσταλλο! Θα μπορούσαμε να πούμε, δηλαδή, ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι η «κόλλα» που συγκρατεί τα ιόντα στις θέσεις τους στο μεταλλικό πλέγμα.

Πριν συνεχίσουμε τη μελέτη των κρυσταλλικών στερεών, θα ήταν χρήσιμο να εξοικειωθούμε με κάποιες βασικές έννοιες από την Κβαντική Φυσική καθώς και με τη δομή κάποιων απλούστερων κβαντικών συστημάτων: των ατόμων και των μορίων.

³ Το διαμάντι αποτελεί εξαίρεση, αφού η *θερμική αγωγιμότητά* του ξεπερνά ακόμα και αυτή των μετάλλων σε συνήθεις θερμοκρασίες! Φυσικά, η αγωγιμότητα αυτή οφείλεται αποκλειστικά σε ταλαντώσεις του κρυσταλλικού πλέγματος.

1.3 Ατομικό Μοντέλο του Rutherford

Το πρώτο σύγχρονο ατομικό μοντέλο προτάθηκε από τον Rutherford το 1911. Ας πάρουμε το απλούστερο δυνατό άτομο, αυτό του υδρογόνου. Σύμφωνα με το μοντέλο του Rutherford, το μοναδικό ηλεκτρόνιο του ατόμου κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον πυρήνα (πρωτόνιο) με ταχύτητα σταθερού μέτρου v . Επειδή το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, η ολική δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο θα πρέπει να είναι εξ ολοκλήρου κεντρομόλος. Η δύναμη αυτή δεν είναι άλλη από την ελκτική δύναμη Coulomb ανάμεσα στο πρωτόνιο και το ηλεκτρόνιο (το βάρος του ηλεκτρονίου το θεωρούμε αμελητέο). Καλούμε m τη μάζα του ηλεκτρονίου και q την απόλυτη τιμή του φορτίου του, ίση με $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Έτσι, το πρωτόνιο έχει φορτίο $+q$ ενώ το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι $-q$.



Η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο είναι

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mr} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

ενώ η δυναμική του ενέργεια, λόγω του πεδίου Coulomb του πρωτονίου, είναι

$$E_p = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

όπου διαλέξαμε τη μηδενική στάθμη της δυναμικής ενέργειας σε άπειρη απόσταση από τον πυρήνα ($r = \infty$). Η ολική μηχανική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$E = E_k + E_p = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (1.2)$$

Παρατηρούμε ότι $E \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow \infty$. Το αρνητικό πρόσημο της ενέργειας οφείλεται στην επιλογή της μηδενικής στάθμης της E_p στο άπειρο και δεν έχει καμία ιδιαί-

τερη φυσική σημασία. Σημειώνουμε, γενικά, ότι στην Ατομική Φυσική αυτό που έχει φυσική σημασία είναι οι *διαφορές* ενέργειας ΔE και όχι οι ενέργειες E καθαυτές. Η ποσότητα ΔE είναι ανεξάρτητη από την εκλογή της μηδενικής στάθμης της δυναμικής ενέργειας.

Η γωνιακή ταχύτητα ω του ηλεκτρονίου είναι συνάρτηση της ολικής ενέργειας E . Πράγματι, συνδυάζοντας την έκφραση (1.1) για το v με τη σχέση $v=\omega r$, βρίσκουμε ότι

$$r = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m\omega^2} \right)^{1/3}$$

Δηλαδή, το r είναι ανάλογο του $\omega^{-2/3}$. Άρα, βάσει της (1.2), το E είναι ανάλογο του $\omega^{2/3}$, ή, το ω είναι ανάλογο του $|E|^{3/2}$.

Το «πλανητικό» αυτό μοντέλο του ατόμου, αν και ευσταθεί μηχανικά, παρουσιάζει σοβαρά προβλήματα αν λάβει κανείς υπόψη τους νόμους του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού. Σύμφωνα με αυτούς, κάθε επιταχυνόμενο φορτίο εκπέμπει ενέργεια στη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Αν το φορτίο εκτελεί ταλαντώσεις ή, γενικά, περιοδική κίνηση κυκλικής συχνότητας $\omega=2\pi f$ (όπου f η συχνότητα της περιοδικής κίνησης), η εκπεμπόμενη ακτινοβολία θα χαρακτηρίζεται επίσης από την ίδια συχνότητα. Στην περίπτωσή μας, η κυκλική συχνότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από το ηλεκτρόνιο θα είναι ίση με τη γωνιακή ταχύτητα ω της περιστροφής του (προσέξτε ότι $\omega=2\pi/T=2\pi f$, όπου T η περίοδος της κίνησης). Όμως, αν το ηλεκτρόνιο εκπέμπει ενέργεια, η ολική του ενέργεια E θα πρέπει να μειώνεται συνεχώς, με παράλληλη μείωση και της ακτίνας r της τροχιάς, βάσει της (1.2). Έτσι, το ηλεκτρόνιο θα πέσει τελικά μέσα στον πυρήνα και το άτομο θα καταρρεύσει (όπως έχει υπολογιστεί, ο χρόνος που θα χρειαζόταν για κάτι τέτοιο θα ήταν της τάξης των 10^{-8} s !). Ευτυχώς κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στ' αλήθεια, αφού τα άτομα είναι ευσταθή. Επίσης, κατά τη συνεχή μεταβολή της ενέργειας E η συχνότητα ω της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας θα πρέπει κι αυτή να μεταβάλλεται κατά τρόπο συνεχή, αφού, όπως δείξαμε παραπάνω, το E είναι μια συνεχής συνάρτηση του ω . Έτσι, το *φάσμα εκπομπής* του υδρογόνου θα πρέπει να εμφανίζει μια συνεχή κατανομή συχνοτήτων. Στην πραγματικότητα, όμως, το φάσμα του υδρογόνου, όπως και των άλλων ατόμων, είναι *γραμμικό*, δηλαδή περιέχει ορισμένες μόνο συχνότητες χαρακτηριστικές του ατόμου που εκπέμπει την ακτινοβολία.

Το μοντέλο του Rutherford, λοιπόν, ήταν ένα πρώτο, τολμηρό βήμα στην ατομική θεωρία, έπασχε όμως από σοβαρά θεωρητικά προβλήματα. Ο κύριος λόγος της αποτυχίας του ήταν ότι αντιμετώπισε ένα σωματίο του μικρόκοσμου, το ηλεκτρόνιο, σαν κοινό κλασικό σωματίδιο που υπακούει στους νόμους του Νεύτωνα, αγνοώντας την κβαντική φύση του. Θα έπρεπε, άραγε, να εγκαταλειφθεί το μοντέλο οριστικά, ή μήπως υπήρχαν περιθώρια «θεραπείας» του; Το 1913 ένας νεαρός που δούλευε στο εργαστήριο του Rutherford διάλεξε τη δεύτερη λύση.

1.4 Μοντέλο του Bohr για το Άτομο του Υδρογόνου

Για να ξεπεράσει τις θεωρητικές δυσκολίες που προέκυψαν με το μοντέλο του Rutherford, ο Bohr πρότεινε τις παρακάτω αρχές για το άτομο του υδρογόνου:

1. Το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται σε καθορισμένες μόνο κυκλικές τροχιές γύρω από τον πυρήνα, με ακτίνες r_1, r_2, r_3, \dots , και αντίστοιχες ενέργειες E_1, E_2, E_3, \dots . Στις τροχιές αυτές το ηλεκτρόνιο δεν εκπέμπει ακτινοβολία.
2. Όταν το ηλεκτρόνιο μεταπίπτει από μια τροχιά ενέργειας E σε μια άλλη τροχιά μικρότερης ενέργειας E' , το άτομο εκπέμπει ακτινοβολία με τη μορφή ενός φωτονίου, συχνότητας

$$f = \frac{E - E'}{h} \quad (1.3)$$

όπου h η σταθερά του Planck, ίση με $6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

3. Οι επιτρεπόμενες τροχιές και ενέργειες καθορίζονται από τη συνθήκη ότι, η στροφορμή του ηλεκτρονίου μπορεί να πάρει ένα άπειρο πλήθος από διακριτές τιμές που δίνονται από τη σχέση

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

*Η ιδιότητα τόσο της ενέργειας, όσο και της στροφορμής, να παίρνουν συγκεκριμένες μόνο τιμές (αντί για τις αυθαίρετες τιμές που θα επέτρεπε η κλασική μηχανική) ονομάζεται **κβαντισμός** της ενέργειας και της στροφορμής, αντίστοιχα.*

Θα υπολογίσουμε τώρα τις επιτρεπόμενες τροχιές r_n και τις αντίστοιχες ενέργειες E_n ($n=1,2,3,\dots$). Από την (1.4) έχουμε ότι $v=nh/2\pi mr$. Συγκρίνοντας αυτή την έκφραση για το v με εκείνη της σχέσης (1.1), βρίσκουμε ότι

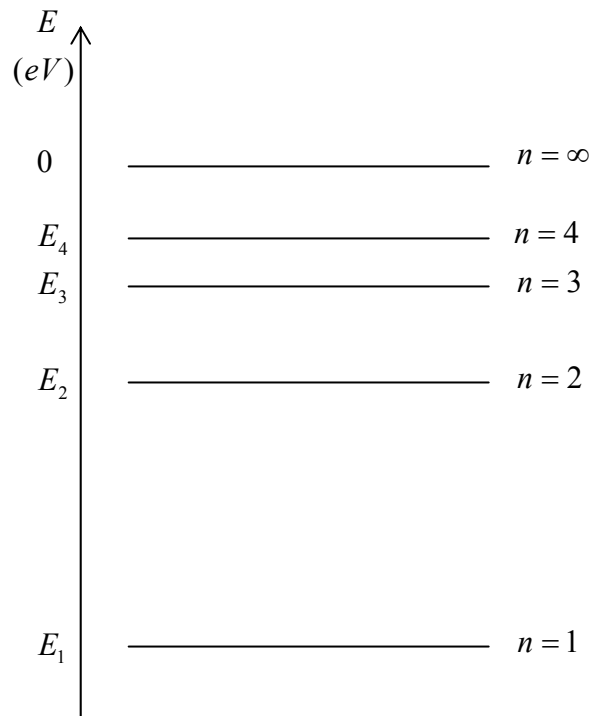
$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi q^2 m} n^2 \equiv a_0 n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.5)$$

Ειδικά, η μικρότερη επιτρεπτή τροχιά έχει ακτίνα $r_1 = a_0$ (ακτίνα Bohr). Αντικαθιστώντας την (1.5) στην (1.2) βρίσκουμε τις επιτρεπτές (κβαντισμένες) τιμές της ενέργειας του ηλεκτρονίου:

$$E_n = - \frac{mq^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \equiv - \frac{\kappa}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

Παρατηρούμε ότι $E_n \rightarrow 0$ για $n \rightarrow \infty$ (άρα και $r \rightarrow \infty$). Στο όριο αυτό, το ηλεκτρόνιο αποδεσμεύεται από το άτομο και κινείται πλέον σαν ελεύθερο σωματίο (βρείτε τις επιτρεπτές τιμές F_n της δύναμης Coulomb που ασκείται στο ηλεκτρόνιο και δείξτε ότι $F_n \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$). Η ενέργεια $E_\infty - E_1 = |E_1| = \kappa$ καλείται *ενέργεια ιονισμού* του ατόμου του υδρογόνου. Από φυσική άποψη, η ενέργεια ιονισμού είναι η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να δώσουμε στο ηλεκτρόνιο για να το αποσπάσουμε από το άτομο. Προσέξτε ότι, από τη στιγμή που το ηλεκτρόνιο είναι ελεύθερο να κινείται οπουδήποτε στο χώρο, μπορεί πλέον να έχει οποιαδήποτε ενέργεια! Δηλαδή, ο κβαντισμός της ενέργειας δεν ισχύει για τα ελεύθερα κινούμενα ηλεκτρόνια αλλά μόνο γι' αυτά που βρίσκονται περιορισμένα μέσα σε ένα άτομο, μόριο, κρύσταλλο, κλπ. Μη λέτε ποτέ, λοιπόν, γενικά και αόριστα ότι «η ενέργεια είναι κβαντισμένη»!

Μια χρήσιμη κβαντική έννοια που θα τη συναντούμε συχνά είναι αυτή μιας ενεργειακής στάθμης. Καταρχήν, χαράζουμε έναν κατακόρυφο άξονα με θετική φορά προς τα πάνω και συμφωνούμε ότι τα σημεία του θα παριστούν τιμές της ενέργειας σε μονάδες eV ($1eV=1.6 \times 10^{-19} J$). Για οποιαδήποτε τιμή E της ενέργειας μπορούμε να χαράξουμε μια οριζόντια γραμμή (ενεργειακή στάθμη) η οποία να τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο που αντιστοιχεί στην τιμή αυτή. Ειδικά, οι επιτρεπές ατομικές ενεργειακές στάθμες για το ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου σχεδιάζονται με βάση τη σχέση (1.6). Από ενεργειακή άποψη, το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε από αυτές τις στάθμες, όχι όμως ενδιάμεσα:



Η στάθμη E_1 λέγεται *βασική* ή *θεμελιώδης*, ενώ οι E_2, E_3, \dots , καλούνται *διηγευμένες* στάθμες. Παρατηρούμε ότι οι στάθμες πυκνώνουν καθώς η ενέργεια αυξάνει (αυτό μπορούμε να το εξηγήσουμε υπολογίζοντας τη διαφορά $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n$ από την (1.6) και παρατηρώντας ότι το ΔE_n φθίνει καθώς το n αυξάνει).

Εκτός από την ευστάθεια του ατόμου του υδρογόνου, το μοντέλο του Bohr μπορεί να εξηγήσει και τη γραμμικότητα του φάσματος εκπομπής και απορρόφησης του ατόμου, το γεγονός δηλαδή ότι το άτομο εκπέμπει και απορροφά ορισμένες μόνο συχνότητες ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Όπως είδαμε, το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται σε καθορισμένες κυκλικές τροχιές γύρω από τον πυρήνα, με ακτίνες r_1, r_2, r_3, \dots , και αντίστοιχες ενέργειες E_1, E_2, E_3, \dots . Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ηλεκτρόνιο μετακινείται από μια τροχιά r_a απευθείας σε μια άλλη τροχιά r_b , όπου $a \neq b$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: (α) Αν $a > b$, τότε, βάσει της (1.6), $E_a > E_b$. Το ηλεκτρόνιο *μεταπίπτει* σε τροχιά μικρότερης ενέργειας με ταυτόχρονη εκπομπή ενός φωτονίου. (β) Αν $a < b$, τότε $E_a < E_b$. Το ηλεκτρόνιο *απορροφά* ένα φωτόνιο και *διεγείρεται* σε τροχιά μεγαλύτερης ενέργειας. Σε κάθε περίπτωση, η συχνότητα του εκπεμπόμενου ή απορροφούμενου φωτονίου είναι

$$f = \frac{|E_a - E_b|}{h} = \frac{\kappa}{h} \left| \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right| \quad (1.7)$$

Το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ή απορροφούμενης ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{\kappa}{hc} \left| \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right| \quad (1.8)$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός. Η γραμμικότητα του φάσματος του ατόμου του υδρογόνου προκύπτει από την παρατήρηση ότι τόσο το f , όσο και το λ , παίρνουν διακριτές και όχι αυθαίρετες τιμές. Αυτό, με τη σειρά του, είναι συνέπεια του κβαντισμού της ενέργειας και της στροφορμής του ηλεκτρονίου.

1.5 Άτομα με Πολλά Ηλεκτρόνια

Αν και επιτυχημένο για το υδρογόνο, το μοντέλο του Bohr δεν επαρκεί για να εξηγήσει τη δομή ατόμων με δύο ή περισσότερα ηλεκτρόνια. Η μελέτη τέτοιων ατόμων γίνεται με τη βοήθεια της Κβαντομηχανικής, μιας αρκετά πολύπλοκης, από μαθηματική άποψη, θεωρίας. Στη θεωρία αυτή, φυσικές έννοιες όπως η θέση ή η τροχιά ενός ηλεκτρονίου δεν έχουν νόημα αφού είναι αδύνατο, λόγω της «αρχής της αβεβαιότητας», να προσδιοριστούν επακριβώς σε ένα πείραμα. Άλλα φυσικά μεγέθη, όπως η ενέργεια και η στροφορμή ενός ηλεκτρονίου, μπορούν να λαμβάνουν μόνο διακεκριμένες τιμές, είναι δηλαδή *κβαντισμένα* μεγέθη. Οι τιμές αυτές προσδιορίζονται με τη βοήθεια παραμέτρων που ονομάζονται *κβαντικοί αριθμοί*. Το σύνολο των κβαντικών αριθμών που μπορούν να προσδιοριστούν κατά την πειραματική παρατήρηση ενός ηλεκτρονίου αντιπροσωπεύει μια *κατάσταση* του ηλεκτρονίου. Κατά μία έννοια, κατάσταση ενός ηλεκτρονίου είναι η μέγιστη πληροφορία που μπορούμε να αποκομίσουμε για το ηλεκτρόνιο μέσα στα πλαίσια της αρχής της αβεβαιότητας. Χαρακτηρίζεται από καθορισμένες (κβαντισμένες) τιμές φυσικών μεγεθών όπως η ενέργεια και η στροφορμή. (Από μαθηματική άποψη, η κατάσταση ενός ηλεκτρονίου εκφράζεται στη μορφή μιας «κυματοσυνάρτησης» η οποία αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης του Schrodinger. Η συνάρτηση αυτή περιέχει ένα σύνολο παραμέτρων που δεν είναι άλλες από τους κβαντικούς αριθμούς που προαναφέραμε. Το πλήθος και οι δυνατές τιμές των κβαντικών αριθμών ποικίλλουν, ανάλογα με το φυσικό σύστημα στο οποίο ανήκει το ηλεκτρόνιο.)

Η κατάσταση ενός ηλεκτρονίου σε ένα άτομο προσδιορίζεται με τη βοήθεια τεσσάρων κβαντικών αριθμών (n, l, m_l, m_s) οι οποίοι μπορούν να πάρουν τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ l &= 0, 1, 2, \dots, (n-1) && \text{(για δοσμένο } n) \\ m_l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l && \text{(για δοσμένο } l) \\ m_s &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Το l καθορίζει το μέτρο της στροφορμής \vec{L} του ηλεκτρονίου, το m_l τη διεύθυνση της στροφορμής (για την ακρίβεια, την προβολή της \vec{L} στον άξονα z), το m_s τη διεύθυνση (την προβολή) της ιδιοστροφορμής (spin), ενώ τα (n, l) προσδιορίζουν την ενέργεια του ηλεκτρονίου. Αναλυτικά:

$$\begin{aligned} |\vec{L}| &= \sqrt{l(l+1)} \hbar, & L_z &= m_l \hbar \\ S_z &= m_s \hbar = \pm \frac{\hbar}{2}, & E &= E(n, l) \end{aligned} \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right)$$

Σύμφωνα με την *απαγορευτική αρχή του Pauli*,

σε ένα άτομο (ή μόριο, κρύσταλλο, κλπ.) δεν μπορεί να υπάρχουν δύο ή περισσότερα ηλεκτρόνια που να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση (να έχουν όλους τους κβαντικούς αριθμούς ίδιους).

Έτσι, για παράδειγμα, αν δύο ηλεκτρόνια ενός ατόμου έχουν τις ίδιες τιμές των n , l και m_l , τότε υποχρεωτικά θα έχουν διαφορετικά m_s ($+\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2}$). Λόγω της αρχής αυτής δεν επιτρέπεται στο σύνολο των ηλεκτρονίων του ατόμου να καταλαμβάνουν τη χαμηλότερη δυνατή ενεργειακή στάθμη, αφού η στάθμη αυτή δεν διαθέτει κανό αριθμό καταστάσεων για να «χωρέσει» όλα τα ηλεκτρόνια.⁴

Οι καταστάσεις που έχουν την ίδια τιμή τού n (αλλά διαφορετικούς συνδυασμούς των l , m_l , m_s) αποτελούν μια *στοιβάδα*. Για $n=1,2,3,4,\dots$, οι στοιβάδες συμβολίζονται με K, L, M, N,\dots , αντίστοιχα. Οι καταστάσεις της στοιβάδας n που έχουν την ίδια τιμή τού l (αλλά διαφορετικούς συνδυασμούς των m_l , m_s) αποτελούν την *υποστοιβάδα* (n,l) . Για $l=0,1,2,3,\dots$, οι υποστοιβάδες ονομάζονται s, p, d, f,\dots , αντίστοιχα. Για δοσμένη τιμή τού n , υπάρχουν n διάφορες τιμές τού l : $0,1,2,\dots,(n-1)$. Έτσι, η στοιβάδα n υποδιαιρείται σε n υποστοιβάδες.

Η υποστοιβάδα που αντιστοιχεί στο ζεύγος (n, l) παρίσταται με την τιμή τού n ακολουθούμενη από το σύμβολο που αντιστοιχεί στην τιμή τού l . Έτσι, π.χ., η υποστοιβάδα με $(n, l)=(2,1)$ γράφεται $2p$. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που βρίσκονται σε μια υποστοιβάδα δηλώνεται με ένα δείκτη που τοποθετείται πάνω δεξιά από το σύμβολο της υποστοιβάδας. Για παράδειγμα, $2p^2$ σημαίνει ότι η $2p$ έχει 2 ηλεκτρόνια.

<u>Στοιβάδες</u> (n)	<u>Υποστοιβάδες</u> (n, l)
$n=1$	$l=0 \Rightarrow 1s$
$n=2$	$l=0,1 \Rightarrow 2s, 2p$
$n=3$	$l=0,1,2 \Rightarrow 3s, 3p, 3d$
$n=4$	$l=0,1,2,3 \Rightarrow 4s, 4p, 4d, 4f$

Οι *χωρητικότητες* των υποστοιβάδων σε ηλεκτρόνια βρίσκονται με τη βοήθεια της απαγορευτικής αρχής του Pauli, ως εξής: Αφού τα ηλεκτρόνια μιας υποστοιβάδας έχουν το ίδιο l (και, φυσικά, το ίδιο n), θα πρέπει να έχουν διάφορους συνδυασμούς των m_l και m_s . Θέλουμε να βρούμε τον αριθμό των διαφορετικών ζευγών (m_l, m_s) που αντιστοιχούν σε δοσμένο l . Για μια δοσμένη τιμή τού l , το m_l μπορεί να πάρει $(2l+1)$ διαφορετικές τιμές: $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$. Σε κάθε μια από αυτές αντιστοιχούν δύο τιμές τού m_s ($+\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2}$). Έτσι έχουμε συνολικά $2(2l+1)$ διαφορετικά ζεύγη τιμών (m_l, m_s) για το δοσμένο l . Σύμφωνα με την απαγορευτική αρχή του Pauli, λοιπόν, η υποστοιβάδα l χωράει το πολύ $2(2l+1)$ ηλεκτρόνια. Αναλυτικά:

⁴ Εξαιρέση αποτελούν το υδρογόνο (H, 1) και το ήλιο (He, 2).

$$s \Rightarrow l=0 \Rightarrow 2 \text{ ηλεκτρόνια}$$

$$p \Rightarrow l=1 \Rightarrow 6 \text{ ηλεκτρόνια}$$

$$d \Rightarrow l=2 \Rightarrow 10 \text{ ηλεκτρόνια}$$

$$f \Rightarrow l=3 \Rightarrow 14 \text{ ηλεκτρόνια}$$

κλπ. Τώρα, η στοιβάδα K ($n=1$) έχει μόνο την υποστοιβάδα s , άρα χωράει 2 ηλεκτρόνια. Η στοιβάδα L ($n=2$) έχει τις s και p , άρα χωράει $2+6=8$ ηλεκτρόνια. Η στοιβάδα M ($n=3$) έχει τις s , p , d , άρα χωράει $2+6+10=18$ ηλεκτρόνια, κλπ. Σε κάθε περίπτωση, όμως, η τελευταία (εξωτερική) στοιβάδα του ατόμου δεν μπορεί να έχει περισσότερα από 8 ηλεκτρόνια.

Δοθέντος ενός ατόμου με ατομικό αριθμό Z , τα Z ηλεκτρόνια του τοποθετούνται στις διάφορες υποστοιβάδες με καθορισμένη σειρά, ξεκινώντας από την $1s$ και συνεχίζοντας με τις $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, κλπ. Η ηλεκτρονική διάταξη ενός ατόμου (με κάποιες μικρές αποκλίσεις για ορισμένα άτομα, όπως π.χ. τα στοιχεία μεταπτώσεως) παρίσταται με βάση το ακόλουθο γενικό σχήμα (ο δείκτης πάνω δεξιά από το σύμβολο μιας υποστοιβάδας δηλώνει τον αριθμό των ηλεκτρονίων που περιέχονται στην υποστοιβάδα):

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 \dots$$

Στις περισσότερες των περιπτώσεων η τελευταία υποστοιβάδα δεν είναι συμπληρωμένη μέχρι τη μέγιστη χωρητικότητά της. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

$$\text{Νάτριο (Na, 11): } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$$

$$\text{Πυρίτιο (Si, 14): } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$$

$$\text{Γερμάνιο (Ge, 32): } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^2$$

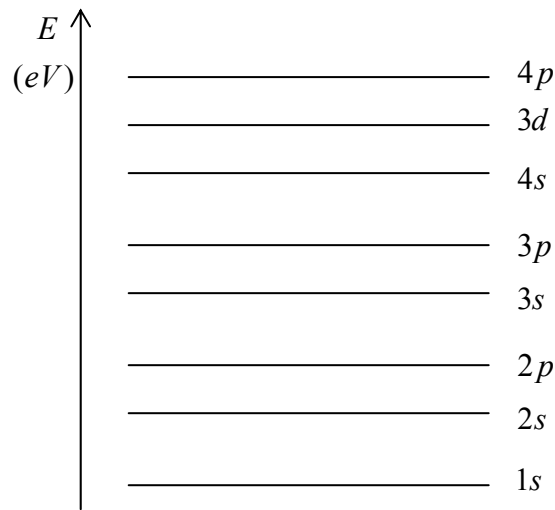
$$\text{Νικέλιο (Ni, 28): } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^8 4s^2$$

Προσέξτε ότι στο Νικέλιο η υποστοιβάδα $4s$, που ανήκει στην τελευταία στοιβάδα, συμπληρώνεται πριν από την $3d$, που ανήκει στην προηγούμενη στοιβάδα. Ποιος κανόνας θα παραβιαζόταν αν μετακινούσαμε τα δύο ηλεκτρόνια της $4s$ στην $3d$;

Όπως αναφέραμε νωρίτερα, η ενέργεια ενός ηλεκτρονίου του ατόμου εξαρτάται από τους κβαντικούς αριθμούς (n, l). Έτσι, ηλεκτρόνια με τα ίδια (n, l) έχουν την ίδια ενέργεια. Συμπεραίνουμε ότι ηλεκτρόνια που ανήκουν στην ίδια υποστοιβάδα έχουν την ίδια ενέργεια.⁵ Κάθε υποστοιβάδα, λοιπόν, χαρακτηρίζεται από μια τιμή της ενέργειας που είναι κοινή για όλα τα ηλεκτρόνια της. Λέμε ότι κάθε υποστοιβάδα αντιστοιχεί σε μια ηλεκτρονική ενεργειακή στάθμη, και ότι τα ηλεκτρόνια της υποστοιβάδας καταλαμβάνουν την αντίστοιχη ενεργειακή στάθμη.

⁵ Εξαιρέση αποτελεί το υδρογόνο, όπου η ενέργεια του μοναδικού ηλεκτρονίου του εξαρτάται μόνο από το n ($E_n = -\kappa/n^2$), έτσι είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιβάδων μάλλον παρά των υποστοιβάδων.

Ηλεκτρονικές ενεργειακές στάθμες



Σημειώνουμε ότι η παραπάνω διάταξη των ενεργειακών σταθμών δεν είναι απόλυτη αλλά μπορεί να εμφανίζει μικρές αποκλίσεις για ορισμένα άτομα (π.χ., η $4s$ μπορεί να βρίσκεται πάνω από την $3d$). Προσέξτε ότι οι αποστάσεις μεταξύ των σταθμών είναι χαρακτηριστικές του κάθε ατόμου και μεταβάλλονται από άτομο σε άτομο.

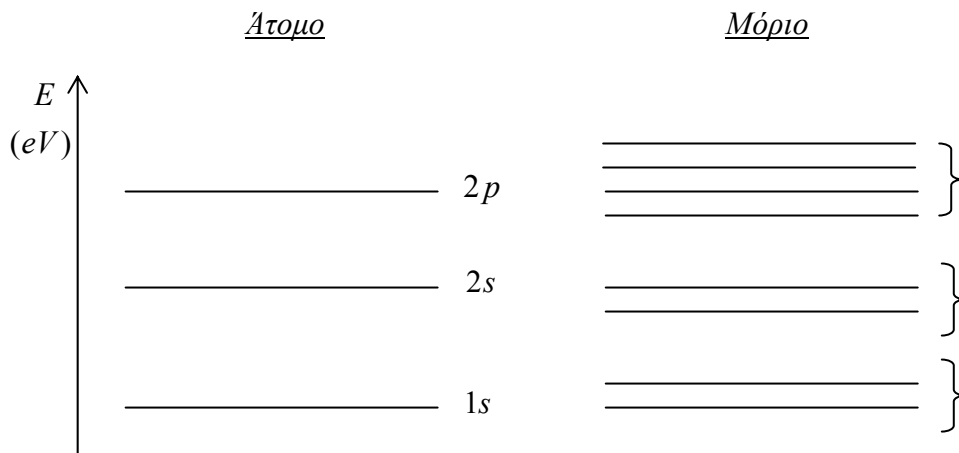
Η παραπάνω ανάλυση είναι βέβαια απλουστευμένη! Λόγω της πολυπλοκότητας των αλληλεπιδράσεων στα άτομα με πολλά ηλεκτρόνια, δεν είναι απόλυτα σωστό να μιλάμε για τις ενέργειες μεμονωμένων ηλεκτρονίων αλλά μάλλον για την (κβαντισμένη) ενέργεια *ολόκληρου* του ατόμου. Έτσι, στη θέση των ηλεκτρονικών ενεργειακών σταθμών θα έπρεπε να είχαμε χαράξει *ατομικές* ενεργειακές στάθμες. Το προσεγγιστικό μοντέλο που περιγράψαμε κάνει την υπόθεση ότι κάθε ηλεκτρόνιο του ατόμου μπορεί να κινείται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα ηλεκτρόνια μέσα στο πεδίο που αυτά δημιουργούν. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε μια μέση ενέργεια για κάθε ηλεκτρόνιο και να εκφράσουμε την ενέργεια του ατόμου σαν το άθροισμα όλων των επιμέρους ηλεκτρονικών ενεργειών. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε «ατομικές στάθμες» ή «μοριακές στάθμες» θα εννοούμε τις *ηλεκτρονικές* ενεργειακές στάθμες των ατόμων ή των μορίων, αντίστοιχα.

1.6 Μόρια

Τα άτομα έχουν συχνά την τάση να συνενώνονται ώστε να σχηματίσουν μόρια. Αυτό δεν γίνεται με αυθαίρετο τρόπο αλλά ακολουθεί μια συγκεκριμένη λογική: Το δομικό σύστημα που προκύπτει είναι *ευσταθέστερο* σε σύγκριση με το σύστημα των μεμονωμένων ατόμων που υπήρχε πριν. Τούτο σημαίνει ότι η συνένωση είναι ενεργειακά σύμφωρη, δηλαδή η δυναμική ενέργεια του νέου συστήματος (μορίου) είναι *μικρότερη* από την αντίστοιχη ενέργεια του συστήματος των μεμονωμένων ατόμων. Αυτό εξηγεί γιατί πρέπει να δαπανήσουμε ενέργεια για να διαχωρίσουμε ξανά τα άτομα ενός μορίου. (Ένα μηχανικό ανάλογο είναι το σύστημα δύο μαζών που συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο: Αν αγνοήσουμε τυχόν εξωτερικές δυνάμεις, το σύστημα θα βρίσκεται σε ισορροπία, άρα θα είναι ευσταθές, όταν το ελατήριο δεν υφίσταται παραμόρφωση, έτσι ώστε η δυναμική ενέργεια του συστήματος να είναι ελάχιστη.)

Πώς ακριβώς ορίζεται η έννοια του μορίου; Σαν πρώτη σκέψη θα λέγαμε ότι είναι μια ομάδα δύο ή περισσότερων ατόμων που συγκρατούνται μεταξύ τους με κάποιες μορφής ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Όμως, από τη στιγμή που δύο άτομα αλληλεπιδρούν παύουν να αποτελούν αυτόνομες, ξεχωριστές οντότητες, αλλά το ένα επηρεάζεται άμεσα από την παρουσία του άλλου (για παράδειγμα, οι κινήσεις και οι ενέργειες των ηλεκτρονίων των ατόμων τροποποιούνται σημαντικά). Μετά το σχηματισμό του μορίου, έχει άραγε νόημα να λέμε ακόμα ότι ένα ηλεκτρόνιο ανήκει στο άτομο A ή στο άτομο B ; Αυτό μας οδηγεί σε μια άλλη, εκ διαμέτρου αντίθετη εικόνα, σύμφωνα με την οποία το μόριο είναι απλά μια ομάδα δύο ή περισσότερων πυρήνων που περιβάλλονται από ηλεκτρόνια έτσι ώστε η δομή που προκύπτει να είναι ευσταθής. Αν και πολλοί θα έσπευδαν να υιοθετήσουν αυτή τη δεύτερη άποψη, εμείς θα πάρουμε μια ενδιάμεση θέση με βάση την ακόλουθη παρατήρηση: Όταν δύο άτομα ενώνονται για να σχηματίσουν ένα μόριο, τα ηλεκτρόνια των εσωτερικών στοιβάδων τους (οι οποίες είναι πλήρεις) δεν επηρεάζονται ιδιαίτερα, αφού οι επιδράσεις που δέχονται οφείλονται κατά κύριο λόγο στους πυρήνες των αρχικών ατόμων στα οποία ανήκαν. Αυτά που επηρεάζονται σημαντικά είναι τα ηλεκτρόνια των *εξωτερικών* στοιβάδων (*ηλεκτρόνια σθένους*), τα οποία βρίσκονται κάτω από την επίδραση και των δύο πυρήνων έτσι ώστε να μην είναι πλέον δυνατό να προσδιορίσουμε σε ποιο από τα άτομα ανήκει το καθένα. Στα ηλεκτρόνια αυτά οφείλονται οι χημικοί δεσμοί που εξασφαλίζουν τη συνοχή του μορίου.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι N όμοια άτομα ενώνονται για να σχηματίσουν ένα N -ατομικό μόριο (όπως, π.χ., για $N=2$ τα μόρια H_2 και O_2 , για $N=3$ το μόριο O_3 , κλπ.). Το μόριο αυτό είναι ένα νέο κβαντικό σύστημα με διαφορετική δομή από εκείνη των αρχικών ατόμων. Ειδικότερα, το μόριο διαθέτει τουλάχιστον N φορές περισσότερες επιτρεπόμενες ενεργειακές στάθμες για τα ηλεκτρόνια σε σύγκριση με τα αντίστοιχα άτομα. Αυτό είναι λογικό, αφού στις μοριακές στάθμες πρέπει να χωρέσουν N φορές περισσότερα ηλεκτρόνια απ' ό,τι στις ατομικές στάθμες. Τώρα, όπως είδαμε, οι ενεργειακές στάθμες των ηλεκτρονίων ενός ατόμου αντιστοιχούν στις υποστοιβάδες $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, κλπ. Όταν N όμοια άτομα ενώνονται για να σχηματίσουν ένα N -ατομικό μόριο, από κάθε ενεργειακή στάθμη ενός μεμονωμένου ατόμου προκύπτουν N ή περισσότερες στάθμες για το μόριο. Λέμε ότι, κατά το σχηματισμό του μορίου κάθε ατομική ενεργειακή στάθμη *διαχωρίζεται* σε N ή περισσότερες μοριακές στάθμες (στο ενεργειακό διάγραμμα οι στάθμες αυτές βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη). Το παρακάτω ποιοτικό διάγραμμα αφορά το διατομικό μόριο ($N=2$):

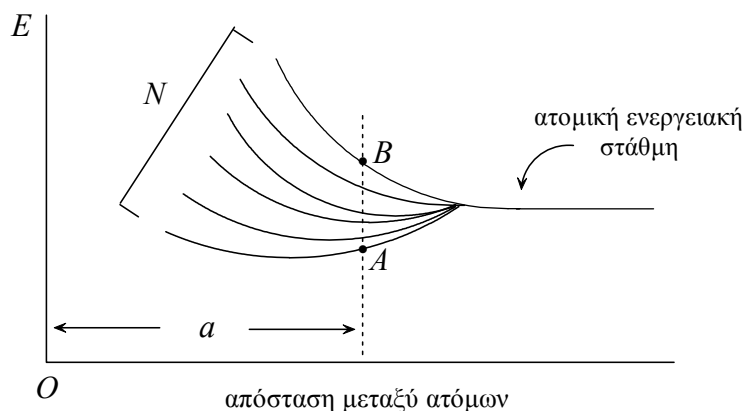


1.7 Ενεργειακές Ζώνες Κρυσταλλικών Στερεών

Όπως αναφέραμε νωρίτερα, η ευστάθεια πολλών στερεών ουσιών οφείλεται στην κρυσταλλική τους δομή. Ένας κρύσταλλος αποτελεί κανονική διάταξη ατόμων (ή μορίων, ή ιόντων) στο χώρο. Η διάταξη αυτή χτίζεται με κανονική επανάληψη μιας θεμελιώδους δομικής μονάδας στις τρεις διαστάσεις. Ο λόγος για τον οποίο σχηματίζονται κρύσταλλοι είναι κατά βάση ο ίδιος για τον οποίο σχηματίζονται μόρια: το αποτέλεσμα είναι ενεργειακά σύμφωρο. Δηλαδή, η δυναμική ενέργεια του κρυστάλλου είναι μικρότερη από αυτή που θα είχε το σύστημα των ατόμων που τον αποτελούν αν αυτά ήταν μεμονωμένα.

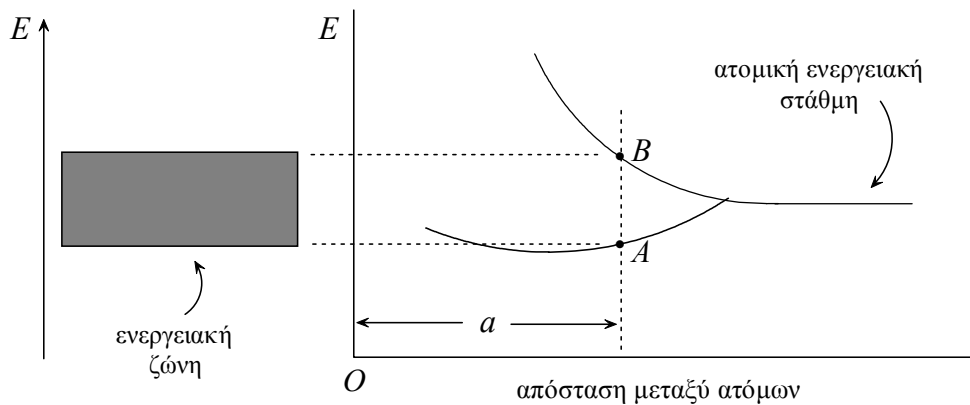
Στους κρυστάλλους, όπως και στα μόρια, χωρίζουμε τα ηλεκτρόνια σε δύο κατηγορίες: (α) τα ηλεκτρόνια των εσωτερικών στοιβάδων των ατόμων, και (β) τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων. Τα εσωτερικά ηλεκτρόνια βρίσκονται πιο κοντά στους πυρήνες των ατόμων όπου ανήκουν, δέχονται ισχυρές δυνάμεις από αυτούς, και δεν επηρεάζονται ιδιαίτερα από τα γειτονικά άτομα (ή ιόντα) του κρυστάλλου. Έτσι, τα ηλεκτρόνια αυτά διατηρούν τις ιδιότητες που θα είχαν αν βρίσκονταν στις εσωτερικές στοιβάδες μεμονωμένων ατόμων (π.χ., θα είχαν σχεδόν τις ίδιες ενέργειες και οι καταστάσεις τους θα περιγράφονταν με τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς). Αντίθετα, τα ηλεκτρόνια των στοιβάδων σθένους των ατόμων επηρεάζονται και από την παρουσία των γειτονικών ατόμων, έτσι ώστε οι αρχικές τους ιδιότητες (κυρίως σε ό,τι αφορά την ενέργεια) τροποποιούνται σημαντικά. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα ηλεκτρόνια αυτά δεν «θυμούνται» από ποια άτομα προέρχονται αλλά ανήκουν πλέον σε ολόκληρο τον κρύσταλλο. Στα ηλεκτρόνια σθένους οφείλονται οι δεσμοί μεταξύ των ατόμων καθώς και οι περισσότερες φυσικές ιδιότητες του κρυστάλλου (όπως η ηλεκτρική και η θερμική του αγωγιμότητα).

Ας θεωρήσουμε έναν κρύσταλλο που αποτελείται από N όμοια άτομα (ή μόρια, ή ιόντα). Φανταστείτε τον σαν ένα μόριο αποτελούμενο από έναν τεράστιο αριθμό ατόμων τα οποία είναι τοποθετημένα σε κανονική διάταξη στο χώρο. Σύμφωνα με αυτά που συζητήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου κάθε ατομική ενεργειακή στάθμη θα διαχωριστεί σε N (ή περισσότερες) κρυσταλλικές στάθμες που θα βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη. Οι ακριβείς θέσεις και αποστάσεις μεταξύ των σταθμών αυτών εξαρτώνται από την απόσταση μεταξύ των ατόμων στον κρύσταλλο, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

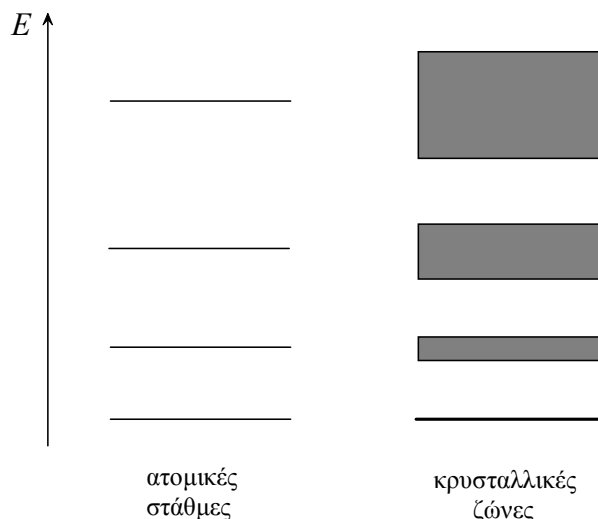


Ο οριζόντιος άξονας παριστά τις τιμές της απόστασης μεταξύ δύο γειτονικών ατόμων στον κρύσταλλο, ενώ ο κατακόρυφος άξονας παριστά τις τιμές της ενέργειας που αντιστοιχούν στις N κρυσταλλικές στάθμες. Το διάγραμμα ερμηνεύεται ως εξής: Φανταζόμαστε ότι αρχικά τα N άτομα βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις το ένα από το άλλο, έτσι ώστε να μην αλληλεπιδρούν (μεμονωμένα άτομα). Θεωρούμε μια συγκεκριμένη ατομική ενεργειακή στάθμη, κοινή για όλα τα άτομα. Καθώς τα άτομα πλησιάζουν μεταξύ τους για να σχηματίσουν την κρυσταλλική δομή, αρχίζουν να αλληλεπιδρούν. Από τη στιγμή αυτή και μετά δεν έχουμε ένα σύνολο μεμονωμένων ατόμων αλλά ένα καινούργιο κβαντικό σύστημα, τον κρύσταλλο. Ειδικά, τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων δεν σχετίζονται πλέον με μεμονωμένα άτομα αλλά αποτελούν ένα ενιαίο σύστημα που ανήκει σε όλο τον κρύσταλλο. Από την ατομική στάθμη που θεωρήσαμε προκύπτουν τώρα N (τουλάχιστον) διακεκριμένες κρυσταλλικές στάθμες που καθορίζουν τις δυνατές τιμές της ενέργειας των ηλεκτρονίων. Κάθε τέτοια στάθμη αντιστοιχεί σε μια τιμή της ενέργειας, η οποία όμως δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται σαν συνάρτηση της απόστασης μεταξύ των ατόμων. Έτσι, μπορούμε να χαράξουμε N καμπύλες, μία για κάθε στάθμη. Παρατηρούμε ότι για δεδομένη απόσταση ατόμων a , οι επιτρεπόμενες κρυσταλλικές στάθμες βρίσκονται μεταξύ A και B στο διάγραμμα. Η ενεργειακή απόσταση AB μεταβάλλεται με την απόσταση μεταξύ των ατόμων.

Τώρα, στους κρυστάλλους ο αριθμός N των ατόμων είναι πάρα πολύ μεγάλος, περίπου 10^{23} άτομα $/cm^3$. Έτσι, οι N ενεργειακές στάθμες είναι τόσο κοντά η μία στην άλλη που είναι αδύνατο να τις ξεχωρίσουμε. Λέμε τότε ότι οι στάθμες αυτές σχηματίζουν μια συνεχή ενεργειακή ζώνη. Το εύρος μιας ζώνης (η ενεργειακή απόσταση AB στο διάγραμμα) μεταβάλλεται με την απόσταση μεταξύ των ατόμων. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την ενεργειακή ζώνη που προκύπτει από μια ατομική στάθμη, για δοσμένη απόσταση a μεταξύ των ατόμων (ή ιόντων) του κρυστάλλου:



Θα μπορούσαμε, γενικά, να πούμε ότι, όπως δείχνει και το επόμενο σχήμα, από κάθε ατομική ενεργειακή στάθμη προκύπτει μια αντίστοιχη κρυσταλλική ενεργειακή ζώνη (αν και, όπως θα δούμε αργότερα, η απλοϊκή αυτή εικόνα δεν ισχύει απόλυτα για τις ζώνες τις οποίες καταλαμβάνουν τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων):

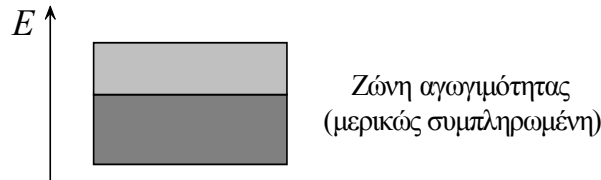


Παρατηρούμε ότι *το εύρος των ζωνών αυξάνει από την κατώτερη προς την ανώτερη ζώνη* (η κατώτερη είναι σχεδόν όμοια με ενεργειακή στάθμη). Αυτό εξηγείται ως εξής: Οι ανώτερες ζώνες αντιστοιχούν στις ανώτερες ατομικές στάθμες, οι οποίες με τη σειρά τους αντιστοιχούν στις εξωτερικές υποστοιβάδες των ατόμων του κρυστάλλου. Αντίθετα, οι κατώτερες ζώνες αντιστοιχούν στις εσωτερικές υποστοιβάδες. Δηλαδή, οι ανώτερες ζώνες καταλαμβάνονται από τα εξωτερικά ηλεκτρόνια των ατόμων, ενώ οι κατώτερες ζώνες από τα εσωτερικά. Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, τα εσωτερικά ηλεκτρόνια δέχονται επιδράσεις κυρίως από τους πυρήνες των ατόμων στα οποία ανήκουν και ελάχιστα «αισθάνονται» την παρουσία των γειτονικών ατόμων (ή ιόντων) του κρυστάλλου. Έτσι, οι ενέργειές τους δεν διαφέρουν σημαντικά από αυτές που θα είχαν στα μεμονωμένα άτομα, με συνέπεια οι ενεργειακές ζώνες τους να μη διαφέρουν πολύ ως προς το εύρος από τις αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες. Από την άλλη μεριά, τα εξωτερικά ηλεκτρόνια (ιδιαίτερα τα ηλεκτρόνια σθένους) αλληλεπιδρούν πιο έντονα με τα γειτονικά άτομα και οι ενέργειές τους τροποποιούνται σημαντικά, με αποτέλεσμα οι ατομικές στάθμες στις οποίες ανήκαν να διευρύνονται σε ζώνες κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου. Σημειώνουμε ότι *το εύρος των ζωνών είναι ανεξάρτητο από τις διαστάσεις του κρυστάλλου, δηλαδή από το ολικό πλήθος των ατόμων*: εξαρτάται μόνο από τη *συγκέντρωση* (πυκνότητα) των ατόμων, δηλαδή το πλήθος των ατόμων ανά μονάδα όγκου.

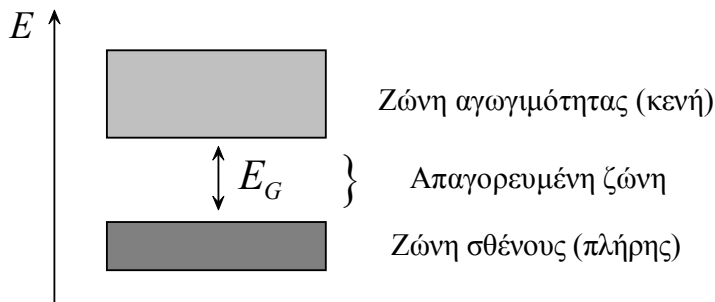
Όπως οι ατομικές ενεργειακές στάθμες (που αντιστοιχούν στις υποστοιβάδες), έτσι και οι κρυσταλλικές ενεργειακές ζώνες μπορούν να χωρέσουν ορισμένο μόνο αριθμό ηλεκτρονίων που καθορίζεται από το πλήθος των διαθέσιμων *επιτρεπτών καταστάσεων* και την απαγορευτική αρχή του Pauli. Θυμίζουμε ότι, σύμφωνα με την αρχή αυτή, δεν είναι δυνατόν δύο ή περισσότερα ηλεκτρόνια του συστήματος να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση (ή, όπως λέμε, να «καταλαμβάνουν» την ίδια κατάσταση). Αυτό σημαίνει ότι διαφορετικά ηλεκτρόνια του κρυστάλλου δεν μπορεί να αντιστοιχούν στις ίδιες ακριβώς τιμές του συνόλου των κβαντικών αριθμών. Έτσι, το πλήθος των ηλεκτρονίων μιας ζώνης δεν μπορεί να υπερβαίνει το πλήθος των επιτρεπτών καταστάσεων της ζώνης.

Η πλήρωση των κρυσταλλικών ζωνών με ηλεκτρόνια ακολουθεί την ίδια λογική με την πλήρωση των ατομικών σταθμών (ή αντίστοιχα, των υποστοιβάδων): Πρώτα γεμίζει η κατώτατη ζώνη, μετά η αμέσως ανώτερη, κλπ., μέχρι να φτάσουμε σε μια τελευταία (ανώτατη) ζώνη που περιέχει ηλεκτρόνια (κάθε ζώνη πάνω από αυτήν είναι κενή). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν η τελευταία ζώνη δεν είναι πλήρης, ονομάζεται *ζώνη αγωγιμότητας*:



(β) Αν η τελευταία ζώνη είναι *πλήρης*, ονομάζεται *ζώνη σθένους*, ενώ η αμέσως ανώτερη *κενή* ζώνη καλείται *ζώνη αγωγιμότητας*. Η ενεργειακή περιοχή μεταξύ των ζωνών σθένους και αγωγιμότητας δεν περιέχει επιτρεπτές καταστάσεις και για το λόγο αυτό καλείται *απαγορευμένη ζώνη*. Το ενεργειακό εύρος της απαγορευμένης ζώνης καλείται *ενεργειακό χάσμα* (E_G):

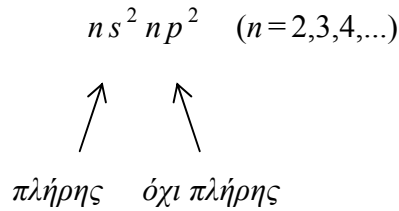


Προσέξτε ότι στην περίπτωση (β) η ζώνη αγωγιμότητας είναι μια *επιτρεπτή* ζώνη για τα ηλεκτρόνια, παρόλο που υπό κανονικές συνθήκες είναι κενή! Πράγματι, ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους μπορούν, αν διεγερθούν κατάλληλα με προσφορά ενέργειας, να μεταφερθούν στην ενεργειακή περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας. Αντίθετα, κανένα ηλεκτρόνιο δεν μπορεί να βρεθεί στην απαγορευμένη ζώνη, αφού η ενεργειακή αυτή περιοχή δεν περιέχει επιτρεπτές στάθμες και καταστάσεις για τα ηλεκτρόνια του κρυστάλλου. Όπως είναι εύκολο να δούμε, το ενεργειακό χάσμα E_G παριστά την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφέρουμε σε ένα ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους για να το ανυψώσουμε ενεργειακά στη ζώνη αγωγιμότητας. Τη φυσική σημασία αυτής της διαδικασίας θα την εξηγήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

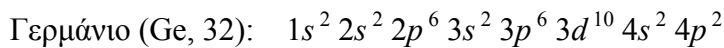
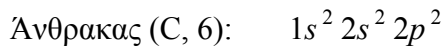
1.8 Κρύσταλλοι Τετρασθενών Στοιχείων

Θα κάνουμε τώρα μια σύντομη αναφορά στους κρυστάλλους που σχηματίζονται από όμοια άτομα τετρασθενών στοιχείων, μια και στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι κρύσταλλοι των ημιαγωγών που θα μελετήσουμε αργότερα. Επειδή είναι ομοιοπολικά στερεά (βλ. Παρ.1.2) δεν αναμένεται, υπό κανονικές συνθήκες, να εμφανίζουν αξιόλογη ηλεκτρική και θερμική αγωγιμότητα, αφού δεν διαθέτουν σημαντικό αριθμό ελεύθερων ηλεκτρονίων.

Η τελευταία (εξωτερική) στοιβάδα ενός τετρασθενούς ατόμου έχει τη δομή



Για παράδειγμα, για $n=2,3,4,\dots$, έχουμε, αντίστοιχα:



Η τελευταία κατειλημμένη ατομική στάθμη (np) δεν είναι πλήρης, αφού η αντίστοιχη υποστοιβάδα έχει μόνο 2 ηλεκτρόνια ενώ χωράει μέχρι και 6. Θα περίμενε κανείς ότι, κατ' αναλογία, και η τελευταία κατειλημμένη κρυσταλλική ζώνη δεν είναι πλήρης, αφού υποτίθεται ότι προκύπτει από διεύρυνση μιας μερικώς κατειλημμένης στάθμης. Τα πράγματα όμως δεν είναι ακριβώς έτσι! Το γεγονός και μόνο ότι οι κρύσταλλοι αυτοί δεν είναι καλοί ηλεκτρικοί αγωγοί μαρτυρά ότι η τελευταία κατειλημμένη ζώνη τους είναι *πλήρης*, δηλαδή είναι *ζώνη σθένους*. Πώς συμβαίνει αυτό; Ας φανταστούμε ότι N άτομα (όπου $N \sim 10^{23}$) τετρασθενούς στοιχείου ξεκινούν από «άπειρη» απόσταση και πλησιάζουν μεταξύ τους ώστε να σχηματίσουν κρύσταλλο. Τη στιγμή που αρχίζουν να αλληλεπιδρούν, οι στάθμες (ns) και (np) αρχίζουν να διευρύνονται σε ζώνες. Η ζώνη (ns) είναι πλήρης ενώ η (np) είναι μερικώς κατειλημμένη. Καθώς τα άτομα πλησιάζουν περισσότερο, οι ζώνες αυτές διευρύνονται τόσο πολύ ώστε αρχίζουν να επικαλύπτονται, σχηματίζοντας μια ενιαία ζώνη. Τέλος, όταν τα άτομα φτάσουν στις κατάλληλες αποστάσεις για να σχηματίσουν τον κρύσταλλο, η ενιαία αυτή ζώνη διαχωρίζεται και πάλι, αυτή τη φορά όμως σε δύο νέες ζώνες με διαφορετικές χωρητικότητες από τις αρχικές ζώνες (ns) και (np). Όλα τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του κρυστάλλου (4 ανά άτομο) βρίσκονται στην κατώτερη ζώνη η οποία τώρα είναι μια *πλήρης* ζώνη σθένους, ενώ η ανώτερη *κενή* ζώνη είναι ζώνη αγωγιμότητας.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Να εξηγηθεί γιατί η ενεργειακή απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών του ατόμου του υδρογόνου ελαττώνεται καθώς μεταβαίνουμε από τις κατώτερες προς τις ανώτερες στάθμες.
2. Να βρεθεί η συχνότητα και το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από το άτομο του υδρογόνου κατά τη μετάπτωση του ηλεκτρονίου από την τροχιά n στην τροχιά $(n-1)$, όπου $n > 1$.
3. (α) Να δειχθεί ότι η ακτίνα $25a_0$ (όπου a_0 η ακτίνα Bohr) αντιστοιχεί σε επιτρεπόμενη τροχιά για το άτομο του υδρογόνου, και να βρεθεί η στροφορμή και η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου στην τροχιά αυτή. (β) Σε ποια απόσταση από τον πυρήνα βρίσκεται το ηλεκτρόνιο αν η στροφορμή του είναι ίση με $3h/\pi$;
4. Να βρεθούν όλες οι πιθανές συχνότητες ακτινοβολίας που εκπέμπονται από το άτομο του υδρογόνου όταν το ηλεκτρόνιο, ξεκινώντας από την τρίτη τροχιά Bohr, καταλήγει στη θεμελιώδη πρώτη τροχιά.
5. Ένα άτομο υδρογόνου απορροφά ένα φωτόνιο, και στη συνέχεια εκπέμπει δύο φωτόνια με μήκη κύματος λ_1 και λ_2 και επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση. Να βρεθεί το μήκος κύματος λ του φωτονίου που είχε απορροφήσει το άτομο.
6. Ένα κινούμενο ηλεκτρόνιο προσπίπτει σε άτομο υδρογόνου και το διεγείρει από τη βασική στην τρίτη ενεργειακή στάθμη. Στη συνέχεια, το άτομο επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση εκπέμποντας δύο φωτόνια. (α) Ποια ήταν η ελάχιστη ταχύτητα του ηλεκτρονίου που προσέπεσε στο άτομο; (β) Ποιες είναι οι συχνότητες των δύο φωτονίων;
7. Ο ιονισμός ενός ατόμου υδρογόνου μπορεί να επιτευχθεί είτε με σύγκρουσή του με κινούμενο ηλεκτρόνιο, είτε με απορρόφηση φωτονίου. (α) Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη ταχύτητα του ηλεκτρονίου; (β) Ποιο πρέπει να είναι το μέγιστο μήκος κύματος του φωτονίου;
8. Ένα φωτόνιο προσπίπτει σε άτομο υδρογόνου και προκαλεί ιονισμό. Στη συνέχεια, το ηλεκτρόνιο που απελευθερώνεται προσπίπτει σε ένα άλλο άτομο υδρογόνου και το διεγείρει από τη βασική στην αμέσως ανώτερη ενεργειακή στάθμη. Ποια ήταν η ελάχιστη συχνότητα του φωτονίου που προσέπεσε στο πρώτο άτομο υδρογόνου;
9. (α) Τι ονομάζουμε κατάσταση ενός ηλεκτρονίου σε ένα άτομο; Τι αναφέρει η απαγορευτική αρχή του Pauli; (β) Όπως γνωρίζουμε, η ενεργειακή στάθμη $1s$ είναι η στάθμη χαμηλότερης ενέργειας σε ένα άτομο. Γιατί δεν βρίσκεται το σύνολο των ηλεκτρονίων του ατόμου στη στάθμη αυτή (με εξαίρεση το H και το He);
10. Να γίνει ένα συγκριτικό διάγραμμα (όχι κατ' ανάγκη ακριβές!) των ηλεκτρονικών ενεργειακών σταθμών του ατόμου του οξυγόνου (O) και των σταθμών του μορίου του όζοντος (O_3).

- 11.** Γιατί στους κρυστάλλους των στερεών παρατηρούνται ενεργειακές ζώνες αντί για τις ενεργειακές στάθμες που χαρακτηρίζουν τα άτομα και τα μόρια; Γιατί οι ζώνες με μεγαλύτερη ενέργεια έχουν και μεγαλύτερο εύρος;
- 12.** Μια ζώνη ενός κρυστάλλου είναι πλήρης από ηλεκτρόνια, ενώ μια άλλη ζώνη του ίδιου κρυστάλλου είναι μερικώς συμπληρωμένη. Ποια ζώνη έχει το μεγαλύτερο εύρος; Εξηγήστε.
- 13.** Έχουμε δύο διαμάντια, ένα μικρό και ένα μεγάλο. Να συγκριθεί το εύρος των αντίστοιχων ζωνών των δύο κρυστάλλων.
- 14.** Με ποιους τρόπους τα ελεύθερα ηλεκτρόνια επηρεάζουν τη δομή και τις φυσικές ιδιότητες των μετάλλων ;
- 15.** Δώστε ένα παράδειγμα που να μας επισημαίνει ότι η αντιστοιχία ανάμεσα στις ενεργειακές στάθμες μεμονωμένων ατόμων και τις ενεργειακές ζώνες του κρυστάλλου που συντίθεται από τα άτομα αυτά, δεν είναι απόλυτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΕΡΕΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες, από θεωρητική αλλά και πρακτική άποψη, ιδιότητες των στερεών είναι η ηλεκτρική τους αγωγιμότητα. Από τη σκοπιά αυτή διακρίνουμε τρεις κατηγορίες στερεών: τους *αγωγούς* (ή *μέταλλα*), τους *μονωτές* και τους *ημιαγωγούς*. Οι τελευταίοι έχουν ενδιάμεση αγωγιμότητα σε σχέση με τους μονωτές και τους αγωγούς. Σε αντίθεση, όμως, με τα μέταλλα, των οποίων η αγωγιμότητα *ελαττώνεται* με τη θερμοκρασία, η αγωγιμότητα των ημιαγωγών *αυξάνει* με τη θερμοκρασία.

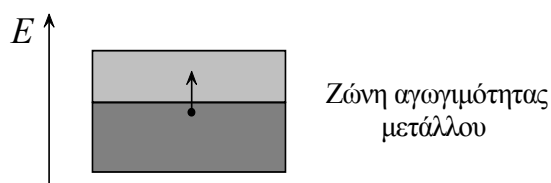
Όπως θα δούμε παρακάτω, η ηλεκτρική αγωγιμότητα ενός κρυσταλλικού στερεού σχετίζεται άμεσα με τη δομή των ενεργειακών ζωνών του, ή, για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι, των ζωνών εκείνων που «φιλοξενούν» τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του κρυστάλλου. Αυτό που γενικά πρέπει να θυμόμαστε είναι ότι

μια ζώνη που είναι πλήρης από ηλεκτρόνια (δεν έχει, δηλαδή, ελεύθερες καταστάσεις) δεν συμβάλλει στην αγωγιμότητα, σε αντίθεση με μια ζώνη που είναι μερικώς συμπληρωμένη.

Έτσι, τα μέταλλα χαρακτηρίζονται από την παρουσία μερικώς συμπληρωμένων ζωνών, ενώ στους μονωτές όλες οι κατειλημμένες ζώνες είναι πλήρεις. Οι ημιαγωγοί σε καθαρή μορφή και χαμηλές θερμοκρασίες έχουν ηλεκτρική συμπεριφορά όμοια με αυτή των μονωτών, αφού στις συνθήκες αυτές οι ζώνες τους επίσης είναι πλήρεις. Η ηλεκτρική τους αγωγιμότητα μπορεί όμως να αυξηθεί σημαντικά με την αύξηση της θερμοκρασίας ή με κατάλληλες προσμείξεις.

2.2 Αγωγοί και Μονωτές

Αυτό που γενικά χαρακτηρίζει τα *μέταλλα* (αγωγούς) είναι ότι η τελευταία κατειλημμένη ζώνη τους δεν είναι πλήρης αλλά *μερικώς συμπληρωμένη* από ηλεκτρόνια. Με άλλα λόγια, τα μέταλλα διαθέτουν *ζώνη αγωγιμότητας*:



Στην ουσία, η ζώνη αγωγιμότητας είναι το σύνολο των ενεργειακών τιμών που μπορούν να πάρουν τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του κρυστάλλου, η επιτρεπόμενη ενεργειακή περιοχή των ηλεκτρονίων σθένους. Τα ηλεκτρόνια αυτά έχουν *απελευθερωθεί* από τα άτομα στα οποία ανήκαν, μετατρέποντας έτσι τα άτομα σε *θετικά ιόντα* (για την απελευθέρωσή τους τα ηλεκτρόνια χρησιμοποιούν μέρος από την ενέργεια που εκλύεται κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου, δεν απαιτείται δηλαδή προσφορά

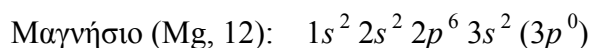
εξωτερικής ενέργειας για το σκοπό αυτό). Τα απελευθερωμένα ηλεκτρόνια σθένους κινούνται πλέον ελεύθερα ανάμεσα στα θετικά ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος χωρίς να υφίστανται ιδιαίτερα έντονες επιδράσεις από τα ιόντα, και για το λόγο αυτό καλούνται *ελεύθερα ηλεκτρόνια*. Σε αυτά οφείλεται η ηλεκτρική αγωγιμότητα του μετάλλου καθώς και ένα σημαντικό μέρος της θερμικής του αγωγιμότητας (ένα άλλο μέρος οφείλεται στις ταλαντώσεις των ιόντων του κρυστάλλου).

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα εξηγείται ως εξής: Όταν στο εσωτερικό του μετάλλου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια παίρνουν ενέργεια απ' αυτό και αρχίζουν να επιταχύνονται. Μέρος της ενέργειας, βέβαια, χάνεται λόγω συγκρούσεων με τα ιόντα, αλλά τελικά τα ηλεκτρόνια αποκτούν μια σταθερή μέση ταχύτητα στη διεύθυνση του πεδίου. Η προσανατολισμένη κίνηση των ηλεκτρονίων συνιστά αυτό που ονομάζουμε ηλεκτρικό ρεύμα.

Από μια κάπως διαφορετική σκοπιά, η ηλεκτρική αγωγιμότητα του μετάλλου οφείλεται στο ότι τα ηλεκτρόνια των ανώτερων κατειλημμένων σταθμών της ζώνης αγωγιμότητας μπορούν, παίρνοντας ενέργεια από το ηλεκτρικό πεδίο, να μεταπηδήσουν σε υψηλότερες στάθμες της ζώνης που είναι κενές, έτσι ώστε να μην παραβιάζεται η απαγορευτική αρχή του Pauli. Η αύξηση της ενέργειας των ηλεκτρονίων οφείλεται στην επιτάχυνσή τους από το ηλεκτρικό πεδίο και έχει σαν φυσικό αποτέλεσμα αυτό που μακροσκοπικά αντιλαμβανόμαστε ως ηλεκτρικό ρεύμα. Προσέξτε ότι, αν η ζώνη των ηλεκτρονίων σθένους ήταν πλήρης, δεν θα μπορούσαν τα ηλεκτρόνια να μεταπηδήσουν σε υψηλότερες στάθμες της ζώνης αφού αυτές θα ήταν ήδη κατειλημμένες και η μετακίνηση ηλεκτρονίων σε αυτές θα παραβίαζε την απαγορευτική αρχή του Pauli.

Η παραπάνω ανάλυση εξηγεί επίσης την *αδιαφάνεια* των μετάλλων στο φως: Τα μέταλλα είναι αδιαφανή διότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνιά τους μπορούν να απορροφήσουν τα φωτόνια της ορατής περιοχής του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και να διεγερθούν σε μια από τις πολλές ανώτερες κενές στάθμες της ζώνης αγωγιμότητας που έχουν στη διάθεσή τους.

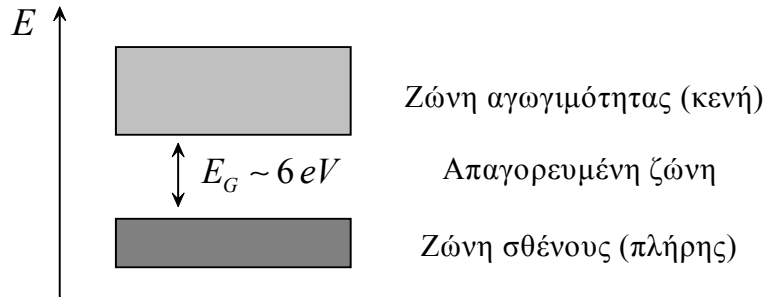
Ας δούμε δύο παραδείγματα, το νάτριο και το μαγνήσιο:



Το Na είναι αγωγός διότι, κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου, η κατά το ήμισυ μόνο συμπληρωμένη ατομική στάθμη $3s$ διευρύνεται σε μια αντίστοιχα μερικώς συμπληρωμένη ζώνη αγωγιμότητας. Στο Mg έχουμε *επικάλυψη των ζωνών που προκύπτουν από τη διεύρυνση των ατομικών σταθμών $3s$ (πλήρης) και $3p$ (κενή)*, με αποτέλεσμα μια μερικώς κατειλημμένη ζώνη αγωγιμότητας.¹

¹ Τέτοιας μορφής επικάλυψη ζωνών συμβαίνει, γενικά, σε όλα τα μέταλλα, ακόμα κι αν η τελευταία ατομική τους στάθμη δεν είναι πλήρης (π.χ., Na).

Στον αντίποδα των μετάλλων από πλευράς αγωγιμότητας βρίσκονται οι *μονωτές*. Σαν τυπικό παράδειγμα παίρνουμε το διαμάντι, του οποίου η κρυσταλλική δομή χτίζεται με άτομα άνθρακα (C) συνδεδεμένα μεταξύ τους με ισχυρότατους ομοιοπολικούς δεσμούς. Επειδή ο άνθρακας είναι τετρασθενής, ο κρύσταλλος του διαμαντιού εμφανίζει μια *πλήρη ζώνη σθένους* και μια *κενή ζώνη αγωγιμότητας* (βλ. Παρ.1.8):



Η ζώνη σθένους χωράει ακριβώς όλα τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του κρυστάλλου (4 ηλεκτρόνια ανά άτομο). Το *ενεργειακό χάσμα* E_G παριστά την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να πάρει ένα ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους για να ανυψωθεί στην ενεργειακή περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας.² Από φυσική άποψη, το E_G είναι η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να «σπάσει» ένας ομοιοπολικός δεσμός στον κρύσταλλο και να απελευθερωθεί ένα ηλεκτρόνιο σθένους. Το ελεύθερο ηλεκτρόνιο θα ανήκει πλέον στην ενεργειακή περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας. (Τονίζουμε και πάλι ότι σε καμία περίπτωση δεν θα μπορούσε το ηλεκτρόνιο να βρεθεί στην απαγορευμένη ζώνη, αφού η περιοχή αυτή δεν περιέχει επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες και καταστάσεις.)

Επειδή όλες οι καταστάσεις της ζώνης σθένους είναι κατειλημμένες, θα ήταν αδύνατο να επιταχύνουμε ένα ηλεκτρόνιο σθένους με τη βοήθεια ηλεκτρικού πεδίου και να δημιουργήσουμε ηλεκτρικό ρεύμα. Πράγματι, η επιτάχυνση θα επέφερε αύξηση της ενέργειας του ηλεκτρονίου και διέγερσή του σε υψηλότερη ενεργειακή στάθμη της ζώνης σθένους, πράγμα όμως που θα παραβίαζε την απαγορευτική αρχή του Pauli αφού όλες οι στάθμες της ζώνης αυτής είναι ήδη πλήρως κατειλημμένες. Η μόνη επιτρεπτή διέγερση του ηλεκτρονίου είναι η μετάβασή του στην άδεια ζώνη αγωγιμότητας (πρακτικά, το σπάσιμο ενός ομοιοπολικού δεσμού με απελευθέρωση ενός ηλεκτρονίου). Αυτό απαιτεί ενέργεια $E \geq E_G$, όπου $E_G \sim 6 eV$ για το διαμάντι. Μια τόσο μεγάλη ενέργεια δεν μπορεί να προσφερθεί από ένα συνηθισμένης έντασης ηλεκτρικό πεδίο. Για το λόγο αυτό το διαμάντι έχει ελάχιστη (πρακτικά μηδενική) ηλεκτρική αγωγιμότητα.

Λόγω της μεγάλης τιμής του E_G το διαμάντι δεν μπορεί να απορροφήσει φωτόνια της ορατής περιοχής του φάσματος, τα οποία έχουν ενέργειες $1.5-3 eV < E_G$ (η απορρόφηση ενός τέτοιου φωτονίου θα έστελνε ένα ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους στην απαγορευμένη ζώνη!). Αυτό εξηγεί τη *διαφάνεια* του κρυστάλλου. (Το βαθύ μπλε χρώμα μερικών διαμαντιών οφείλεται σε πρόσμειξη με άτομα βορίου.)

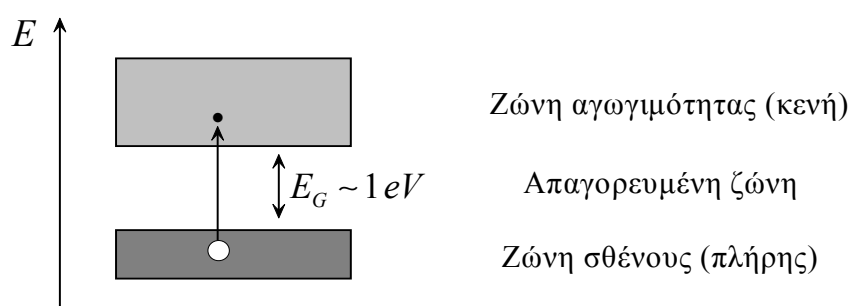
² Προσέξτε ότι δεν εννοούμε μετακίνηση του ηλεκτρονίου στο χώρο, αλλά στο ενεργειακό διάγραμμα!

2.3 Ημιαγωγοί

Οι ημιαγωγοί έχουν ενδιάμεση αγωγιμότητα σε σύγκριση με τα μέταλλα και τους μονωτές. Σαν τυπικά παραδείγματα με πολλές πρακτικές εφαρμογές, θα εξετάσουμε εδώ το πυρίτιο (Si) και το γερμάνιο (Ge). Όπως και το διαμάντι, είναι ομοιοπολικοί κρύσταλλοι τετρασθενών στοιχείων. Έτσι, σε θεμελιώδη κατάσταση (όταν δεν έχουν υποστεί διέγερση) εμφανίζουν μια πλήρη ζώνη σθένους. Σε αντίθεση όμως με το διαμάντι, το ενεργειακό χάσμα E_G των ημιαγωγών είναι σχετικά μικρό, της τάξης του $1eV$:

$$\text{Πυρίτιο (Si, 14): } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2 \quad (E_G = 1.21 eV)$$

$$\text{Γερμάνιο (Ge, 32): } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^2 \quad (E_G = 0.78 eV)$$

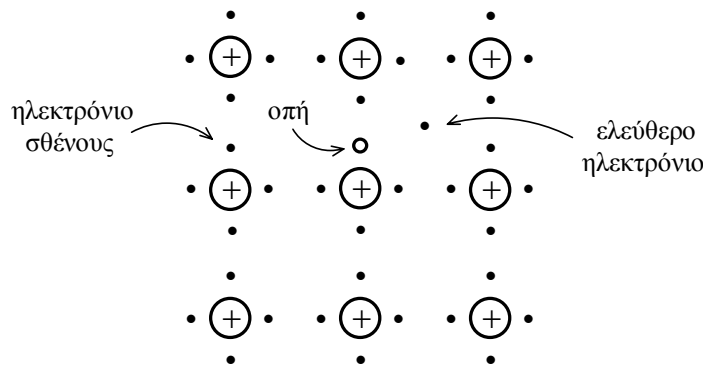


Η ζώνη σθένους περιέχει τα ηλεκτρόνια σθένους (4 ανά άτομο) των ατόμων του κρυστάλλου. Σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες (κοντά στο απόλυτο μηδέν, $T \sim 0K$) η ζώνη αυτή είναι πλήρης, πράγμα που πρακτικά σημαίνει ότι όλα τα ηλεκτρόνια σθένους συμμετέχουν σε ομοιοπολικούς δεσμούς και δεν υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια στον κρύσταλλο (η ζώνη αγωγιμότητας είναι κενή). Έτσι, στις θερμοκρασίες αυτές οι ημιαγωγοί συμπεριφέρονται σαν μονωτές, αφού το ενεργειακό χάσμα E_G δεν μπορεί να υπερπηδηθεί με την απλή εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου. Σε υψηλότερες θερμοκρασίες, όμως, (π.χ., σε θερμοκρασία δωματίου, $T \sim 300K$) τα ηλεκτρόνια των ανώτερων σταθμών της ζώνης σθένους προσλαμβάνουν αρκετή θερμική ενέργεια ώστε να υπερπηδήσουν το σχετικά μικρό χάσμα E_G και να ανυψωθούν ενεργειακά στη ζώνη αγωγιμότητας.

Από φυσική άποψη, η ενέργεια E_G είναι η ελάχιστη που απαιτείται για να σπάσει ένας ομοιοπολικός δεσμός και να απελευθερωθεί ένα ηλεκτρόνιο. Κάτω από την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου, τα απελευθερωμένα ηλεκτρόνια κινούνται προσανατολισμένα όπως και τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων, έχοντας ενέργειες στην περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας του κρυστάλλου.

Από πλευράς οπτικών ιδιοτήτων, οι ημιαγωγοί είναι *αδιαφανείς* διότι το ενεργειακό τους χάσμα είναι μικρότερο από τις ενέργειες των φωτονίων της ορατής περιοχής του φάσματος ($E_G < 1.5-3 eV$). Έτσι, ηλεκτρόνια των ανώτερων σταθμών της ζώνης σθένους μπορούν να απορροφήσουν φωτόνια της περιοχής αυτής και να διεγερθούν στη ζώνη αγωγιμότητας (δηλαδή, να σπάσουν τους ομοιοπολικούς δεσμούς τους και να καταστούν ελεύθερα). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της αγωγιμότητας του ημιαγωγού (*φωτοαγωγιμότητα*).

Κάθε ηλεκτρόνιο σθένους που για οποιονδήποτε λόγο απελευθερώνεται, αφήνει πίσω του έναν *ατελή* («σπασμένο») ομοιοπολικό δεσμό ο οποίος αποτελεί μια *οπή* στον κρύσταλλο του ημιαγωγού. Ισοδύναμα, κάθε ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους που ανυψώνεται στη ζώνη αγωγιμότητας αφήνει μια κενή θέση (*κατάσταση*) στη ζώνη σθένους που επίσης ονομάζεται *οπή*. Η οπή συμπεριφέρεται σαν σωματίο με *θετικό* φορτίο, αφού δημιουργείται από την *απουσία* ενός ηλεκτρονίου. Επιπλέον, όπως θα δούμε, η οπή έχει τη δυνατότητα να μετακινείται μέσα στον κρύσταλλο, συμβάλλοντας έτσι κι αυτή στην αγωγιμότητα του ημιαγωγού. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε μια απλουστευμένη απεικόνιση, σε δύο διαστάσεις, του κρυσταλλικού πλέγματος ενός ημιαγωγού (μόνο τα 4 ηλεκτρόνια σθένους του κάθε ατόμου έχουν σχεδιαστεί). Κάθε άτομο σχηματίζει 4 ομοιοπολικούς δεσμούς με τα 4 γειτονικά του άτομα:



Ας συνοψίσουμε μερικές σημαντικές φυσικές έννοιες για τους ημιαγωγούς:

Ζώνη σθένους: η ενεργειακή περιοχή που σχηματίζεται από το σύνολο των ενεργειακών σταθμών τις οποίες καταλαμβάνουν τα *δέσμια* ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του κρυστάλλου (τα ηλεκτρόνια που συμμετέχουν σε ομοιοπολικούς δεσμούς).

Ζώνη αγωγιμότητας: η ενεργειακή περιοχή που σχηματίζεται από το σύνολο των ενεργειακών σταθμών τις οποίες καταλαμβάνουν τα *ελεύθερα* ηλεκτρόνια (αυτά που έσπασαν τους ομοιοπολικούς δεσμούς).

Ενεργειακό χάσμα: η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να σπάσει ένας ομοιοπολικός δεσμός και να απελευθερωθεί ένα ηλεκτρόνιο σθένους.

Οπή: ατελής (σπασμένος) ομοιοπολικός δεσμός στον κρύσταλλο, που αντιστοιχεί σε μια κενή θέση (*κατάσταση*) στη ζώνη σθένους.

Ας δούμε τώρα το ρόλο της οπής στην αγωγιμότητα του ημιαγωγού: Όταν σε κάποιο σημείο του κρυσταλλικού πλέγματος υπάρχει ατελής δεσμός, είναι σχετικά εύκολο για ένα ηλεκτρόνιο σθένους ενός γειτονικού ατόμου, παίρνοντας ενέργεια από ένα ηλεκτρικό πεδίο, να εγκαταλείψει τον δικό του δεσμό και να καλύψει την οπή αυτή (δεν απαιτείται τώρα ενέργεια E_G , αφού το ηλεκτρόνιο παραμένει στη ζώνη σθένους). Το ηλεκτρόνιο αυτό όμως θα αφήσει πίσω του μια νέα οπή (έναν ατελή δεσμό). Είναι δηλαδή σαν η αρχική οπή να μετατοπίστηκε σε μια νέα θέση, κινούμενη *αντίθετα* από την κατεύθυνση μετατόπισης του ηλεκτρονίου σθένους. Η νέα οπή μπορεί, με τη σειρά της, να καλυφθεί από ένα ηλεκτρόνιο σθένους κάποιου άλλου γειτονικού ατόμου, κι έτσι να έχουμε περαιτέρω μετατόπιση της αρχικής οπής σε κατεύθυνση αντίθετη από αυτή των ηλεκτρονίων, κλπ. Δεδομένου ότι η οπή είναι στην ουσία η *απουσία* ενός (αρνητικά φορτισμένου) ηλεκτρονίου, μπορούμε να τη θεωρή-

σουμε σαν ισοδύναμη με *θετικό* φορτίο ίσο κατά μέτρο με αυτό του ηλεκτρονίου. Συμπερασματικά:

- Οι οπές μπορούν να θεωρηθούν σαν «πραγματικά» σωμάτια με θετικό φορτίο, των οποίων η κατεύθυνση κίνησης είναι *αντίθετη* από αυτή των ηλεκτρονίων σθένους όταν αυτά (υπό την επίδραση, π.χ., ενός ηλεκτρικού πεδίου) εγκαταλείπουν τους ομοιοπολικούς δεσμούς στους οποίους ανήκουν για να καλύψουν γειτονικούς, ατελείς δεσμούς.
- Η αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού οφείλεται τόσο στην κίνηση των *ελεύθερων* ηλεκτρονίων, όσο και στην κίνηση των οπών (ουσιαστικά, των *δέσμιων* ηλεκτρονίων σθένους από δεσμό σε δεσμό).
- Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια έχουν ενέργειες στην περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας, ενώ οι οπές ανήκουν ενεργειακά στη ζώνη σθένους.

Συχνά συμβαίνει να καλύπτεται ένας ατελής δεσμός από ένα *ελεύθερο* ηλεκτρόνιο. Η διαδικασία αυτή της *επανασύνδεσης ζεύγους οπής-ηλεκτρονίου* αντιστοιχεί στη μετάπτωση ενός ηλεκτρονίου από τη ζώνη αγωγιμότητας στη ζώνη σθένους, με αποτέλεσμα την κάλυψη μιας οπής στη ζώνη σθένους.

2.4 Νόμος του Ohm για τα Μέταλλα

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων ενός μετάλλου αποσπώνται εύκολα από τα άτομα στα οποία ανήκουν (παίρνοντας ένα μέρος από την ενέργεια που εκλύεται κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου) και καθίστανται *ελεύθερα ηλεκτρόνια*, έχοντας ενέργειες στην περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας. Ο χαρακτηρισμός «ελεύθερα» υποδηλώνει ότι τα ηλεκτρόνια αυτά δεν δέχονται σημαντικές δυνάμεις κατά την κίνησή τους μέσα στο κρυσταλλικό πλέγμα, εφόσον δεν πλησιάζουν πολύ στα ιόντα του μετάλλου. Η κίνηση των ηλεκτρονίων διαταράσσεται μόνο από τις συγκρούσεις τους με τα ιόντα, με αποτέλεσμα την επιβράδυνσή τους ή την αλλαγή της κατεύθυνσής τους.

Όταν στο εσωτερικό του μετάλλου δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο³ ($\vec{E} = 0$) η κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων είναι τυχαία και προς όλες τις κατευθύνσεις, έτσι ώστε μακροσκοπικά δεν υφίσταται ηλεκτρικό ρεύμα μέσα στο μέταλλο. Η κατάσταση όμως αλλάζει όταν στο εσωτερικό του μετάλλου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} \neq 0$. Το πεδίο τότε ασκεί δυνάμεις στα ελεύθερα ηλεκτρόνια και τα επιταχύνει. Η ταχύτητα των ηλεκτρονίων θα αύξανε απεριόριστα αν δεν συνέβαιναν οι συγκρούσεις τους με τα ιόντα. Λόγω των συγκρούσεων αυτών, τα ηλεκτρόνια χάνουν κινητική ενέργεια (η οποία απορροφάται από το κρυσταλλικό πλέγμα και μετατρέπεται σε θερμότητα Joule) και τελικά αποκτούν μια σταθερή μέση ταχύτητα \vec{v} (*ταχύτητα μεταθέσεως*). Επειδή τα ηλεκτρόνια είναι αρνητικά φορτισμένα, η κατεύθυνση κίνησής τους είναι *αντίθετη* από το \vec{E} . Όπως όμως θα δούμε στο Κεφ.6, η κίνηση ενός αρνητικού φορτίου σε μια κατεύθυνση ισοδυναμεί με την κίνηση ενός *θετικού* φορτίου ίσου μέτρου στην *αντίθετη* κατεύθυνση. (Για παράδειγμα, τα δύο φορτία παράγουν το ίδιο μαγνητικό πεδίο αλλά και δέχονται την ίδια δύναμη από ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.)

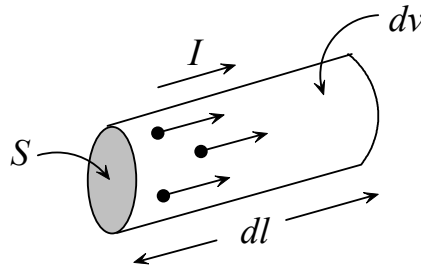
³ Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο E τόσο για την ενέργεια όσο και για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Θα είναι όμως πάντοτε ξεκάθαρο τι ακριβώς εννοούμε.

Μπορούμε λοιπόν *συμβατικά* να θεωρήσουμε ότι τα κινούμενα φορτία είναι *θετικά*, μέτρου $+q$, και η κατεύθυνση κίνησής τους είναι *αντίθετη* από την πραγματική φορά κίνησης των ηλεκτρονίων. Έτσι, συμβατικά, το διάνυσμα \vec{v} της ταχύτητας των φορτίων θα θεωρείται *ομόρροπο* του πεδίου \vec{E} . Όπως αποδεικνύεται πειραματικά, για σχετικά μικρές τιμές του \vec{E} ισχύει ότι

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \quad (2.1)$$

Ο συντελεστής μ καλείται *ευκινησία* του ηλεκτρονίου για το θεωρούμενο μέταλλο. (Όπως θα δούμε αργότερα, η τιμή του μ επηρεάζεται από τη θερμοκρασία.) Η προσανατολισμένη αυτή κίνηση των ηλεκτρονίων συνιστά ένα *ηλεκτρικό ρεύμα*.

Θεωρούμε τώρα τμήμα αγωγού σε σχήμα λεπτού σύρματος απειροστού μήκους dl και εμβαδού διατομής S . Ο όγκος του σύρματος είναι $dv = Sdl$. Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης I :



Καλούμε dN τον αριθμό των ελεύθερων ηλεκτρονίων που διέρχονται από τη διατομή S σε χρόνο dt έτσι ώστε να καταλάβουν τον όγκο dv του σύρματος. Το (συμβατικά θετικό) φορτίο που διέρχεται από τη διατομή S σε χρόνο dt και καταλαμβάνει τον όγκο dv ισούται με $dQ = qdN$, όπου q η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου. Παρατηρούμε ότι ένα ηλεκτρόνιο διανύει το μήκος dl του σύρματος σε χρόνο dt . Άρα, η ταχύτητα μεταθέσεως των ηλεκτρονίων είναι, κατά μέτρο, $v = dl/dt$. Τέλος, η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σύρμα είναι $I = dQ/dt$.

Η *πυκνότητα ρεύματος* στη θεωρούμενη διατομή S είναι

$$J = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} = \frac{qdN}{Sdt} = \frac{qdNdl}{Sdl dt} = q \frac{dN}{dv} \frac{dl}{dt} \quad (2.2)$$

Η ποσότητα

$$n = \frac{dN}{dv} \quad (2.3)$$

καλείται *ηλεκτρονική πυκνότητα* του μετάλλου και παριστά τη *συγκέντρωση* των ελεύθερων ηλεκτρονίων (πλήθος ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου) στο μέταλλο. Επίσης, λόγω της (2.1), $dl/dt = v = \mu E$, όπου v και E τα μέτρα των αντίστοιχων διανυσμάτων. Έτσι, η (2.2) γράφεται

$$J = q n v = q n \mu E \quad (2.4)$$

Το γινόμενο

$$\boxed{\sigma = q n \mu} \quad (2.5)$$

καλείται *ειδική αγωγιμότητα* του μετάλλου. Η (2.4) τελικά γράφεται

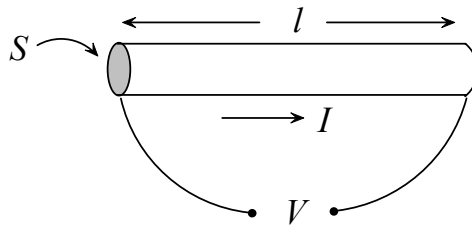
$$J = \sigma E \quad (2.6)$$

ή, σε διανυσματική μορφή,

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \quad (2.7)$$

όπου \vec{J} διάνυσμα μέτρου J με κατεύθυνση σύμφωνη με τη *συμβατική* φορά του ρεύματος. Η σχέση (2.7) εκφράζει τη *γενική μορφή του νόμου του Ohm*. Είναι κατά βάση μια εμπειρική σχέση που βρίσκεται ότι ισχύει για όλα τα μέταλλα, υπό την προϋπόθεση ότι η τιμή E του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι πολύ μεγάλη.

Η γενική σχέση (2.7) αποδείχθηκε για ένα απειροστό τμήμα ενός μετάλλου και, με την έννοια αυτή, είναι ανεξάρτητη από το σχήμα ή τις διαστάσεις του μετάλλου. Θεωρούμε τώρα την ειδική περίπτωση ενός μεταλλικού σύρματος μήκους l και σταθερής διατομής S , το οποίο διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I . Καλούμε V την τάση (διαφορά δυναμικού) στα άκρα του σύρματος:



Η πυκνότητα ρεύματος $J=I/S$ είναι σταθερή κατά μήκος του σύρματος, αφού τα I και S είναι σταθερά. Από το νόμο του Ohm (2.6) έπεται ότι και το E είναι σταθερό κατά μήκος του σύρματος, δηλαδή, το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο σύρμα είναι *ομογενές*. Όπως γνωρίζουμε (και όπως θα δείξουμε στο δεύτερο μέρος του βιβλίου), στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $E=V/l$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την (2.6) έχουμε:

$$I = JS = \sigma ES = \sigma \frac{V}{l} S = \frac{V}{l/\sigma S}$$

Ορίζουμε την *ειδική αντίσταση* ρ του μετάλλου και την *αντίσταση* R του σύρματος με τις σχέσεις

$$\rho = \frac{1}{\sigma}, \quad R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S} \quad (2.8)$$

Βρίσκουμε έτσι την *ειδική μορφή του νόμου του Ohm*

$$\boxed{I = \frac{V}{R}} \quad (2.9)$$

Σημειώνουμε ότι η ειδική αντίσταση ρ αφορά γενικά το θεωρούμενο μέταλλο, ανεξάρτητα από το σχήμα ή τις διαστάσεις του, ενώ η αντίσταση R αφορά το συγκεκριμένο σύρμα και εξαρτάται από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά. Προσέξτε επίσης ότι η ειδική μορφή (2.9) του νόμου του Ohm ισχύει μόνο για μεταλλικά σύρματα σταθερής διατομής. (Γιατί η διατομή του σύρματος απαιτείται να είναι σταθερή;)

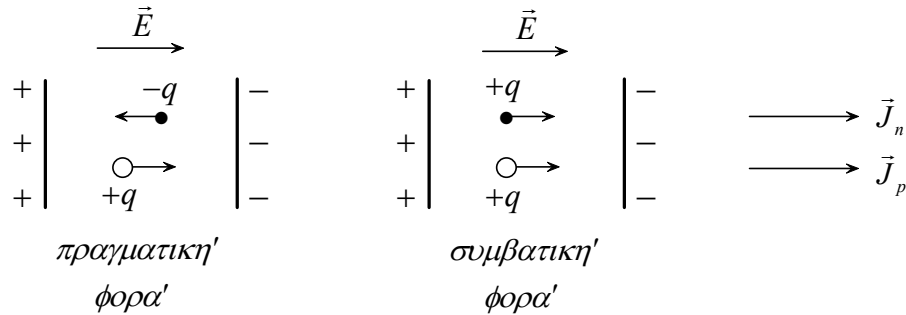
2.5 Νόμος του Ohm για τους Ημιαγωγούς

Όπως γνωρίζουμε, στους ημιαγωγούς οι ηλεκτρικοί φορείς είναι τα (ελεύθερα) ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας και οι οπές της ζώνης σθένους. Καλούμε n και p τις συγκεντρώσεις (πυκνότητες) ηλεκτρονίων⁴ και οπών, αντίστοιχα, όπου με τον όρο *συγκέντρωση* εννοούμε, γενικά, το πλήθος ομοίων πραγμάτων (ηλεκτρονίων, οπών, ατόμων, κλπ.) ανά μονάδα όγκου. Σε *καθαρό ημιαγωγό*, χωρίς δηλαδή εξωτερικές προσμείξεις, ο αριθμός των ηλεκτρονίων είναι ίσος με τον αριθμό των οπών, αφού κάθε οπή έχει προκύψει από την αποδέσμευση ενός ηλεκτρονίου. Άρα,

$$n = p \equiv n_i \quad (\text{καθαρός ημιαγωγός}) \quad (2.10)$$

Η κοινή τιμή n_i των δύο πυκνοτήτων στον καθαρό ημιαγωγό καλείται *αυτογενής πυκνότητα*. Αντίθετα, όπως θα δούμε αργότερα, στην περίπτωση *ημιαγωγού προσμείξεως* ισχύει γενικά ότι $n \neq p$.

Όταν μέσα στον κρύσταλλο υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , οι κινήσεις τόσο των ηλεκτρονίων όσο και των οπών προσανατολίζονται σύμφωνα με αυτό, δημιουργώντας δύο παράλληλες πυκνότητες ρεύματος \vec{J}_n και \vec{J}_p . Τα διανύσματα αυτά είναι *ομόρροπα* μεταξύ τους και έχουν την κατεύθυνση του πεδίου \vec{E} . Για να το καταλάβουμε αυτό, θεωρούμε την κίνηση ενός ηλεκτρονίου και μιας οπής μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , π.χ., στο χώρο ανάμεσα στις πλάκες ενός πυκνωτή:



Στην πραγματικότητα, η οπή κινείται σύμφωνα με το πεδίο \vec{E} ενώ το ηλεκτρόνιο αντίθετα με αυτό. *Συμβατικά*, όμως, η κίνηση του ηλεκτρονίου ισοδυναμεί με κίνηση *θετικού* φορτίου στην αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή ομόρροπα προς την οπή και προς το \vec{E} . Έτσι, και τα δύο ρεύματα που προκύπτουν από την κίνηση των φορτίων είναι στην κατεύθυνση του \vec{E} .

⁴ Με τον όρο «ηλεκτρόνια» θα εννοούμε στο εξής τα *ελεύθερα* ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας.

Τα ρεύματα \vec{J}_n και \vec{J}_p υπακούουν χωριστά στο νόμο του Ohm :

$$\vec{J}_n = \sigma_n \vec{E} , \quad \vec{J}_p = \sigma_p \vec{E} \quad (2.11)$$

όπου οι αντίστοιχες ειδικές αγωγιμότητες ορίζονται

$$\sigma_n = q n \mu_n , \quad \sigma_p = q p \mu_p \quad (2.12)$$

Τα n και p είναι, όπως προαναφέραμε, οι συγκεντρώσεις ηλεκτρονίων και οπών, αντίστοιχα, ενώ τα μ_n και μ_p παριστούν τις *ευκινησίες* των ηλεκτρονίων και των οπών για τον θεωρούμενο ημιαγωγό (το q είναι η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου). Όπως βρίσκεται πειραματικά, το μ_p είναι κάπως μικρότερο από το μ_n (μπορείτε να δώσετε μια φυσική εξήγηση γι' αυτό;). Το ολικό ρεύμα είναι

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p = (\sigma_n + \sigma_p) \vec{E}$$

ή

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \quad (2.13)$$

όπου

$$\boxed{\sigma = \sigma_n + \sigma_p = q n \mu_n + q p \mu_p} \quad (2.14)$$

η *ολική ειδική αγωγιμότητα* του υλικού. Για *καθαρό* ημιαγωγό,

$$\sigma_i = q n_i (\mu_n + \mu_p) \quad (2.15)$$

όπου λάβαμε υπόψη την (2.10). Οι (2.13) και (2.14) εκφράζουν το νόμο του Ohm για έναν ημιαγωγό.

Παρατηρούμε ότι, γενικά, η ειδική αγωγιμότητα σ είναι ένα μέτρο της αγωγιμότητας ενός υλικού το οποίο υπακούει στο νόμο του Ohm. Πράγματι, όσο μεγαλύτερο είναι το σ τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του ρεύματος για δοσμένη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου. Μπορούμε τώρα να καταλάβουμε γιατί σε κανονικές συνθήκες ένα μέταλλο είναι πολύ πιο αγώγιμο από έναν καθαρό ημιαγωγό: Συγκρίνοντας τις ειδικές αγωγιμότητες (2.5) και (2.15) βλέπουμε ότι $\sigma_{\text{μετάλλου}} \gg \sigma_i$. Αυτό οφείλεται στο ότι η ηλεκτρονική πυκνότητα n του μετάλλου είναι πολύ μεγαλύτερη από την αυτογενή πυκνότητα n_i του καθαρού ημιαγωγού ($n \gg n_i$) λόγω του ότι το μέταλλο έχει *εξ αρχής* άφθονα ελεύθερα ηλεκτρόνια ενώ ο καθαρός ημιαγωγός, υπό κανονικές συνθήκες, έχει μόνο ένα μικρό αριθμό ελεύθερων ηλεκτρονίων και οπών. Το μειονέκτημα του ημιαγωγού είναι, βέβαια, η παρουσία *απαγορευμένης ζώνης*, κάτι που δεν υφίσταται στην περίπτωση του μετάλλου.

2.6 Επίδραση της Θερμοκρασίας στην Αγωγιμότητα

Μια βασική διαφορά ανάμεσα στα μέταλλα και τους ημιαγωγούς είναι ο τρόπος που επηρεάζεται η αγωγιμότητά τους όταν μεταβάλλεται η θερμοκρασία. Έχει παρατηρηθεί ότι με την αύξηση της θερμοκρασίας η αντίσταση των μετάλλων αυξάνει, δηλαδή η αγωγιμότητά τους ελαττώνεται. Αντίθετα, η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της αγωγιμότητας των ημιαγωγών. Για να κατανοήσουμε αυτά τα φαινόμενα θα πρέπει να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζονται από τη θερμοκρασία οι διάφοροι παράγοντες που υπεισέρχονται στις εκφράσεις της ειδικής αγωγιμότητας σε κάθε περίπτωση.

α) Μέταλλα

Η ειδική αγωγιμότητα ενός μετάλλου δίνεται από τη σχέση (2.5): $\sigma = qn\mu$. Η τιμή q του φορτίου του ηλεκτρονίου δεν εξαρτάται, φυσικά, από τη θερμοκρασία. Στα μέταλλα η ηλεκτρονική πυκνότητα n (αριθμός ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου) είναι σταθερή, ανεξάρτητη της θερμοκρασίας, διότι το πλήθος των ελεύθερων ηλεκτρονίων του μετάλλου (ίσο με τον ολικό αριθμό των ηλεκτρονίων σθένους των ατόμων) είναι εξ αρχής δεδομένο και δεν επηρεάζεται από τις μεταβολές της θερμοκρασίας. Όμως, η ευκινησία μ των ηλεκτρονίων *μειώνεται* με τη θερμοκρασία, για τον εξής λόγο: Αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση του πλάτους ταλάντωσης των ιόντων του κρυστάλλου, άρα και αύξηση της πιθανότητας σύγκρουσης των ελεύθερων ηλεκτρονίων με τα ιόντα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται η κίνηση των ηλεκτρονίων ανάμεσα στα ιόντα και να μειώνεται η μέση ταχύτητα κίνησής τους για δοσμένη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου. Έτσι, βάσει της (2.1), η ευκινησία μ των ηλεκτρονίων ελαττώνεται. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

αύξηση της θερμοκρασίας επιφέρει ελάττωση της αγωγιμότητας του μετάλλου.

β) Καθαροί Ημιαγωγοί

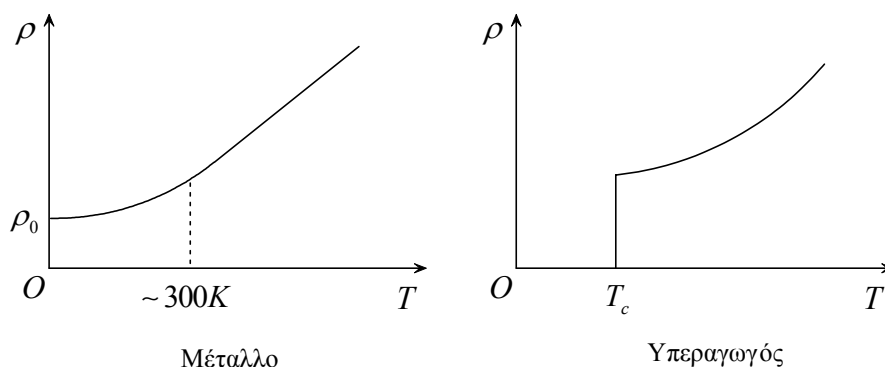
Η ειδική αγωγιμότητα δίνεται από τη σχέση (2.15): $\sigma_i = qn_i(\mu_n + \mu_p)$. Η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση του πλήθους των ζευγών ηλεκτρονίων-οπών στον κρύσταλλο (διότι όλο και περισσότεροι ομοιοπολικοί δεσμοί σπάζουν και όλο και περισσότερα ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους διεγείρονται στη ζώνη αγωγιμότητας αφήνοντας πίσω τους οπές), με αποτέλεσμα την αύξηση της αυτογενούς πυκνότητας n_i . Οι ευκινησίες μ_n και μ_p μειώνονται κάπως αλλά όχι τόσο ώστε να ισοσκελιστεί η αύξηση του n_i . Έτσι, τελικά,

αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της αγωγιμότητας του ημιαγωγού.

Σε αρκετά υψηλές θερμοκρασίες, μάλιστα, οι αγωγιμότητες των μετάλλων και των ημιαγωγών τείνουν να εξισωθούν! Ας μην ξεχνάμε, πάντως, ότι σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος τα μέταλλα είναι ασύγκριτα πιο αγωγά σε σχέση με τους ημιαγωγούς. Οι δεύτεροι, εν τούτοις, πλεονεκτούν στο ότι διαθέτουν *δύο* ειδών φορείς, ηλεκτρόνια και οπές, πράγμα που δίνει τη δυνατότητα ανάπτυξης νέων ειδών αγωγίμων υλικών και καθιστά τους ημιαγωγούς πολύ χρήσιμους στις εφαρμογές της Ηλεκτρονικής.

Σημείωση: Αγωγοί και Υπεραγωγοί

Πολλή συζήτηση έχει γίνει τις δύο τελευταίες δεκαετίες για το φαινόμενο της *υπεραγωγιμότητας*. Σε αυτό συνετέλεσαν κάποιες πρόσφατες σημαντικές ανακαλύψεις που κάνουν τα υπεραγωγία υλικά να φαίνονται πιο προσιτά για πρακτικές εφαρμογές. Η διαφορά ανάμεσα σε ένα κοινό και ένα υπεραγωγίμο μέταλλο φαίνεται αν συγκρίνουμε τις καμπύλες που παριστούν τη μεταβολή της ειδικής αντίστασης σαν συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας:



Είπαμε παραπάνω ότι η αντίσταση ενός μετάλλου οφείλεται στις ταλαντώσεις των ιόντων του κρυσταλλικού πλέγματος. Καθώς η θερμοκρασία T ελαττώνεται, το πλάτος ταλάντωσης γίνεται μικρότερο και η ειδική αντίσταση ρ μειώνεται. Όπως μάλιστα βρίσκεται πειραματικά, σε συνήθεις θερμοκρασίες ($T \sim 300K$) η ειδική αντίσταση είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας. Αν αυτό ισχύει γενικά για κάθε T , θα πρέπει η αντίσταση να μηδενίζεται για $T \rightarrow 0$. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα. Ο λόγος είναι πως, εκτός από τις ταλαντώσεις των ιόντων υπάρχουν κι άλλοι παράγοντες που συνεισφέρουν στην αντίσταση του μετάλλου, όπως π.χ. κάποιες ατέλειες της κρυσταλλικής δομής. Σε χαμηλές θερμοκρασίες αυτές οι ατέλειες παίζουν σημαντικό ρόλο (σε αντίθεση με τις ταλαντώσεις των ιόντων που σχεδόν καταπαύουν), με αποτέλεσμα η ειδική αντίσταση να τείνει σε μια πεπερασμένη τιμή ρ_0 καθώς $T \rightarrow 0$.

Με τους *υπεραγωγούς* τα πράγματα είναι διαφορετικά, αφού η ειδική τους αντίσταση πέφτει απότομα στο μηδέν όταν η θερμοκρασία γίνει μικρότερη από μια *κρίσιμη θερμοκρασία* T_c χαρακτηριστική για το υλικό. (Σε θερμοκρασίες πάνω από την T_c οι υπεραγωγοί συμπεριφέρονται σαν κοινά μέταλλα.) Για τους περισσότερους υπεραγωγούς (όπως, π.χ., ο Hg ή ο Pb) η κρίσιμη θερμοκρασία είναι λίγοι βαθμοί πάνω από το απόλυτο μηδέν, πράγμα που τους καθιστά δύσκολα αξιοποιήσιμους από πλευράς εφαρμογών. Έχουν όμως τώρα βρεθεί ενώσεις που εμφανίζουν υπεραγωγίμες ιδιότητες σε πολύ υψηλότερες θερμοκρασίες, στην περιοχή των 100K. Οι νέες αυτές ανακαλύψεις ανοίγουν καινούργιους δρόμους στις εφαρμογές των υπεραγωγών. Τέτοιες εφαρμογές περιλαμβάνουν την κατασκευή υπεραγωγίμων μαγνητών για τη δημιουργία πολύ ισχυρών μαγνητικών πεδίων, την κατασκευή μαγνητόμετρων για τη μέτρηση πολύ ασθενών μαγνητικών πεδίων (ιδιαίτερα χρήσιμα στην ιατρική έρευνα), την αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας χωρίς απώλειες με τη χρήση γιγαντιαίων υπεραγωγίμων δακτυλίων, κλπ.

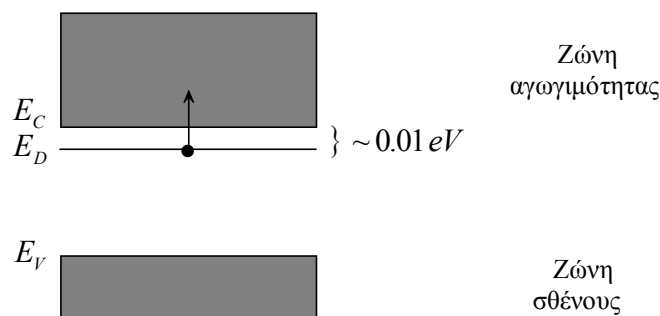
2.7 Ημιαγωγοί Προσμείξεως

Η αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού αυξάνει σημαντικά με την προσθήκη κατάλληλων προσμείξεων. Μια πρόσμειξη ανατρέπει την ισορροπία των συγκεντρώσεων ($n=p$) ανάμεσα στα ηλεκτρόνια και τις οπές του καθαρού ημιαγωγού. Διακρίνουμε έτσι δύο τύπους ημιαγωγών προσμείξεως: *ημιαγωγούς τύπου n* όταν $n > p$, και *ημιαγωγούς τύπου p* όταν $p > n$. Λέμε ότι στους ημιαγωγούς τύπου n τα ηλεκτρόνια είναι *φορείς πλειονότητας* και οι οπές *φορείς μειονότητας*, ενώ το αντίστροφο ισχύει για τους ημιαγωγούς τύπου p .

α) Ημιαγωγός τύπου n

Φανταστείτε ότι σε κρύσταλλο καθαρού γερμανίου (Ge) ή πυριτίου (Si) αντικαθιστούμε μερικά από τα τετρασθενή άτομα με άτομα *πεντασθενούς* στοιχείου όπως ο φωσφόρος (P,15) ή το αρσενικό (As,33). Το πεντασθενές στοιχείο καλείται *δότης* διότι τα άτομά του προσφέρουν το ένα παραπάνω ηλεκτρόνιο σθένους που έχουν σε σύγκριση με τα άτομα του καθαρού ημιαγωγού, συμβάλλοντας έτσι στην αγωγιμότητα του κρυστάλλου. Τα 4 από τα 5 ηλεκτρόνια σθένους του ατόμου του δότη σχηματίζουν 4 ομοιοπολικούς δεσμούς με 4 γειτονικά άτομα Ge ή Si, ενώ το 5^ο ηλεκτρόνιο είναι αδέσμευτο και εύκολα απελευθερώνεται από το άτομο του δότη, με ενέργεια απόσπασης $\sim 0.01 eV$. Έτσι, με την προσθήκη δότη πετυχαίνουμε να αυξήσουμε τον αριθμό των ελεύθερων ηλεκτρονίων του κρυστάλλου.

Ο ημιαγωγός που προκύπτει από την πρόσμειξη είναι ένα νέο κβαντικό σύστημα, και ως εκ τούτου η δομή των ενεργειακών ζωνών του αναμένουμε να διαφέρει από εκείνη του καθαρού ημιαγωγού. Πού θα «βολέψουμε» το 5^ο ηλεκτρόνιο σθένους του δότη *πριν* αυτό αποσπαστεί από το άτομο στο οποίο ανήκει; Όχι στη ζώνη σθένους, αφού αυτή είναι γεμάτη σε χαμηλές θερμοκρασίες. Ούτε όμως και στη ζώνη αγωγιμότητας, αφού το ηλεκτρόνιο δεν είναι ακόμα ελεύθερο. Το 5^ο ηλεκτρόνιο του δότη, λοιπόν, βρίσκεται σε μια νέα ενεργειακή στάθμη E_D η οποία τώρα εμφανίζεται μέσα στην απαγορευμένη ζώνη, πολύ κοντά στη ζώνη αγωγιμότητας. Με μικρή δόση ενέργειας ($\sim 0.01 eV$) το ηλεκτρόνιο διεγείρεται στη ζώνη αγωγιμότητας, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (το E_V παριστά την ανώτερη στάθμη της ζώνης σθένους, ενώ το E_C την κατώτερη στάθμη της ζώνης αγωγιμότητας):

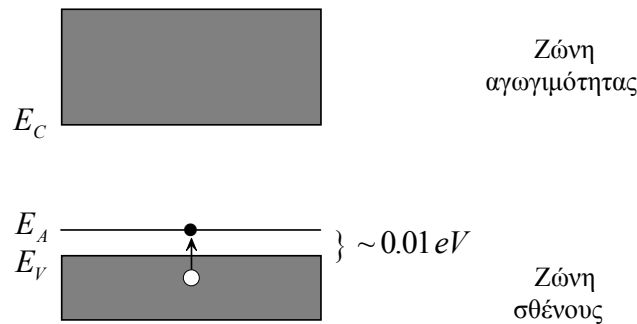


Η προσθήκη δότη σε καθαρό ημιαγωγό προκαλεί όχι μόνο αύξηση των ηλεκτρονίων στη ζώνη αγωγιμότητας αλλά και *ελάττωση των οπών* στη ζώνη σθένους. Αυτό συμβαίνει διότι το πλεόνασμα ελεύθερων ηλεκτρονίων οδηγεί σε αυξημένο αριθμό μεταπτώσεων ηλεκτρονίων από τη ζώνη αγωγιμότητας στη ζώνη σθένους, με αποτέλεσμα την κάλυψη μερικών οπών της ζώνης σθένους.

β) Ημιαγωγός τύπου p

Σε κρύσταλλο καθαρού Ge ή Si αντικαθιστούμε μερικά από τα τετρασθενή άτομα με άτομα *τρισθενούς* στοιχείου όπως το βόριο (B,5), το γάλλιο (Ga,31) ή το ίνδιο (In,49). Το τρισθενές στοιχείο καλείται *αποδέκτης* διότι τα άτομά του, έχοντας ένα ηλεκτρόνιο σθένους λιγότερο σε σύγκριση με τα άτομα του καθαρού ημιαγωγού, μπορούν να δεχθούν προσφορά ενός ηλεκτρονίου από τα άτομα του ημιαγωγού. Το άτομο του αποδέκτη σχηματίζει 3 ομοιοπολικούς δεσμούς με τα 4 γειτονικά άτομα Ge ή Si, ενώ ο 4^{ος} δεσμός είναι ατελής. Ο δεσμός αυτός μπορεί να συμπληρωθεί από ένα ηλεκτρόνιο σθένους κάποιου κοντινού ατόμου Ge ή Si, ενώ στη θέση του ηλεκτρονίου εμφανίζεται μια νέα οπή στον κρύσταλλο (η απαιτούμενη ενέργεια απόσπασης του ηλεκτρονίου από το άτομο του Ge ή του Si είναι $\sim 0.01 eV$). Έτσι, με την προσθήκη αποδέκτη πετυχαίνουμε να αυξήσουμε τον αριθμό των οπών του κρυστάλλου.

Ο αποδέκτης εισάγει μια νέα, *κενή* στάθμη E_A μέσα στην απαγορευμένη ζώνη και πολύ κοντά στη ζώνη σθένους. Με μικρή δόση ενέργειας ($\sim 0.01 eV$) ένα ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους μπορεί εύκολα να διεγερθεί στη στάθμη αυτή, αφήνοντας πίσω του μια οπή:



Η προσθήκη αποδέκτη σε καθαρό ημιαγωγό προκαλεί όχι μόνο αύξηση των οπών στη ζώνη σθένους αλλά και *ελάττωση των ηλεκτρονίων* στη ζώνη αγωγιμότητας. Αυτό συμβαίνει διότι το πλεόνασμα οπών οδηγεί σε αυξημένο αριθμό επανασυνδέσεων ηλεκτρονίων-οπών με μεταπτώσεις ηλεκτρονίων από τη ζώνη αγωγιμότητας στη ζώνη σθένους, πράγμα που έχει σαν αποτέλεσμα την κάλυψη μερικών οπών στη ζώνη σθένους και την αντίστοιχη ελάττωση του αριθμού των ηλεκτρονίων στη ζώνη αγωγιμότητας.

Είναι εντυπωσιακό ότι και η ελάχιστη πρόσμειξη (π.χ., ένα άτομο δότη ή αποδέκτη ανά 10^6 άτομα καθαρού ημιαγωγού) είναι αρκετή για να αυξήσει σημαντικά (περίπου 10 φορές) την αγωγιμότητα του ημιαγωγού σε συνήθεις θερμοκρασίες.

2.8 Νόμος Δράσεως των Μαζών

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε ότι μια πρόσμειξη σε καθαρό ημιαγωγό αυξάνει τη συγκέντρωση ενός φορέα (των ηλεκτρονίων ή των οπών) ενώ παράλληλα ελαττώνει τη συγκέντρωση του άλλου φορέα. (Θυμίζουμε ότι στον καθαρό ημιαγωγό οι δύο συγκεντρώσεις έχουν κοινή τιμή, ίση με την αυτογενή πυκνότητα n_i .) Αυτή η αυξομείωση δεν γίνεται με τυχαίο τρόπο αλλά υπακούει σε ένα συγκεκριμένο νόμο που ονομάζεται *νόμος δράσεως των μαζών*.

Καλούμε n και p τις συγκεντρώσεις (πυκνότητες) ηλεκτρονίων και οπών, αντίστοιχα, σε έναν ημιαγωγό προσμείξεως οποιουδήποτε τύπου. Όταν ο ημιαγωγός βρίσκεται σε καθαρή μορφή (πριν, δηλαδή, από την πρόσμειξη), $n=p=n_i$. Μετά την πρόσμειξη, όμως, $n \neq p$ (με εξαίρεση μια ειδική περίπτωση που θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο). Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι τιμές των συγκεντρώσεων n , p και n_i έχουν μετρηθεί σε συνθήκες *θερμικής ισορροπίας*, δηλαδή σε *δοσμένη, σταθερή θερμοκρασία*. Ο νόμος δράσεως των μαζών μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Σε συνθήκες θερμικής ισορροπίας, το γινόμενο np των συγκεντρώσεων ηλεκτρονίων και οπών σε δοσμένο ημιαγωγό είναι σταθερό, ανεξάρτητο από το είδος ή την ποσότητα των προσμείξεων που ο ημιαγωγός αυτός περιέχει.

Για να δώσουμε μαθηματική έκφραση στο νόμο αυτό, γράφουμε

$$(np)_{\text{τυχαία πρόσμειξη}} = (np)_{\text{καθαρός ημιαγωγός}} \Rightarrow np = n_i n_i \Rightarrow$$

$$\boxed{np = n_i^2} \quad (2.16)$$

Παρατηρούμε ότι το n_i είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας και αυξάνει με αυτή (βλ. Παρ. 2.6). Έτσι, η σχέση (2.16) ισχύει για *δοσμένη, σταθερή θερμοκρασία*.

Με το νόμο δράσεως των μαζών μπορούμε εύκολα να εξηγήσουμε γιατί μια πρόσμειξη σε καθαρό ημιαγωγό αυξάνει την αγωγιμότητά του. Η ειδική αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού, ανεξάρτητα αν αυτός έχει υποστεί πρόσμειξη ή όχι, δίνεται από την έκφραση (2.14):

$$\sigma = qn\mu_n + qp\mu_p$$

Επειδή τα μ_n και μ_p δεν διαφέρουν πολύ, μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση

$$\mu_n \approx \mu_p \equiv \mu$$

Τότε,

$$\sigma = q\mu(n + p) \quad (2.17)$$

Παρατηρούμε ότι η ειδική αγωγιμότητα εξαρτάται από το άθροισμα των συγκεντρώσεων ηλεκτρονίων και οπών. Χρησιμοποιώντας γνωστή ταυτότητα της άλγεβρας και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.16), έχουμε:

$$\begin{aligned} (n + p)^2 &= (n - p)^2 + 4np = (n - p)^2 + 4n_i^2 \Rightarrow \\ (n + p)^2 &= (n - p)^2 + \text{σταθερο}' \end{aligned}$$

Έτσι, η (2.17) δίνει

$$\sigma = q\mu \sqrt{(n-p)^2 + \text{σταθ.}} \quad (2.18)$$

όπου η σταθερή ποσότητα μέσα στη ρίζα ισούται με $4n_i^2$ και, φυσικά, εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Από την (2.18) βλέπουμε ότι η ειδική αγωγιμότητα σ γίνεται ελάχιστη όταν $n-p=0 \Leftrightarrow n=p$, πράγμα που συμβαίνει όταν ο ημιαγωγός είναι καθαρός. Έτσι, με την παραμικρή πρόσμειξη θα έχουμε $n-p \neq 0 \Leftrightarrow n \neq p$ και το σ θα αυξηθεί, με την προϋπόθεση ότι η θερμοκρασία μένει σταθερή. Με την αύξηση του ποσού της πρόσμειξης αυξάνει και η διαφορά $|n-p|$, άρα αυξάνει το σ βάσει της (2.18).

Τίθεται τώρα το εξής ερώτημα: Αφού η αύξηση της πρόσμειξης αυξάνει την αγωγιμότητα, γιατί στην πράξη οι προσμειξεις που γίνονται στους ημιαγωγούς περιορίζονται σε ένα ελάχιστο ποσοστό της τάξης του 0.0001% ; Ας μην ξεχνάμε εδώ ότι η χρησιμότητα των ημιαγωγών δεν συνίσταται τόσο στο βαθμό της αγωγιμότητάς τους όσο στον τρόπο με τον οποίο αυτή γίνεται, με τη συμβολή δηλαδή δύο ειδών φορέων. Υπερβολικά μεγάλη πρόσμειξη θα αύξανε μεν σημαντικά τους φορείς πλειονότητας αλλά ουσιαστικά θα εξαφάνιζε τους φορείς μειονότητας! Σημειώνουμε επίσης ότι ούτε η υπερβολικά μεγάλη αύξηση της θερμοκρασίας ενδείκνυται γιατί η αυτογενής πυκνότητα n_i τείνει να γίνει συγκρίσιμη με τη συγκέντρωση των ατόμων του δότη ή του αποδέκτη, ο ρόλος των ατόμων πρόσμειξης στην αγωγιμότητα αρχίζει να υποβαθμίζεται, και ο ημιαγωγός συμπεριφέρεται σαν να είναι καθαρός, πράγμα ανεπιθύμητο στις ηλεκτρονικές διατάξεις που βασίζονται σε ημιαγωγούς προσμειξέως.

Εφαρμογή: Θα υπολογίσουμε τις συγκεντρώσεις των φορέων μειονότητας σε ημιαγωγούς τύπων n και p . Δίνεται η αυτογενής πυκνότητα n_i του καθαρού ημιαγωγού καθώς και οι συγκεντρώσεις N_D και N_A των ατόμων του δότη και του αποδέκτη, αντίστοιχα. (Η θερμοκρασία θεωρείται δοσμένη και σταθερή.)

α) Ημιαγωγός τύπου n : Σχεδόν όλα τα άτομα του δότη είναι ιονισμένα, δηλαδή έχουν συνεισφέρει το 5° ηλεκτρόνιο σθένους τους το οποίο κινείται ως ελεύθερο ηλεκτρόνιο με ενέργειες στην περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας. Από την άλλη μεριά, σχεδόν όλα τα ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας οφείλονται στα άτομα του δότη, αφού μεγάλο μέρος των ηλεκτρονίων που προϋπήρχαν στον καθαρό ημιαγωγό έχουν ήδη επανασυνδεθεί με οπές στη ζώνη σθένους. Άρα, είναι λογικό να κάνουμε την προσέγγιση $n \approx N_D$. Από το νόμο δράσεως των μαζών (2.16) βρίσκουμε τη συγκέντρωση των οπών, οι οποίες αποτελούν τους φορείς μειονότητας:

$$p = \frac{n_i^2}{N_D} \quad (2.19)$$

β) Ημιαγωγός τύπου p : Σχεδόν όλες οι οπές στη ζώνη σθένους οφείλονται στον αποδέκτη. Έτσι, $p \approx N_A$. Η (2.16) δίνει τη συγκέντρωση των ηλεκτρονίων, που εδώ είναι φορείς μειονότητας:

$$n = \frac{n_i^2}{N_A} \quad (2.20)$$

2.9 Μεικτές Προσμείξεις σε Ημιαγωγούς

Σε έναν ημιαγωγό προσμείξεως είναι δυνατό να συνυπάρχουν άτομα δότη με άτομα αποδέκτη. Ο σύνθετος αυτός ημιαγωγός θα συμπεριφέρεται σαν τύπου n ή τύπου p , ανάλογα με το αν οι φορείς πλειονότητας είναι τα ηλεκτρόνια ή οι οπές, αντίστοιχα. Καλούμε N_D τη συγκέντρωση (πεντασθενών) ατόμων δότη και N_A τη συγκέντρωση (τρισθενών) ατόμων αποδέκτη. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Αν $N_D = N_A$, τότε $n = p = n_i$, όπου n_i η αυτογενής πυκνότητα του καθαρού ημιαγωγού. Δηλαδή, οι δότες εξουδετερώνονται πλήρως από τους αποδέκτες και ο ημιαγωγός συμπεριφέρεται σαν να είναι *καθαρός*.

β) Αν $N_D > N_A$, τότε $n > p$ και ο ημιαγωγός είναι *τύπου n* . Φορείς πλειονότητας είναι τα ηλεκτρόνια. Αν δεν υπήρχε ο αποδέκτης, η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων θα ήταν ίση περίπου με αυτή των ατόμων του δότη (βλ. Εφαρμογή, Παρ.2.8). Τα άτομα όμως του αποδέκτη εξουδετερώνουν μέρος των ηλεκτρονίων. Υποθέτοντας ότι $N_D \gg N_A$, μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $n \approx N_D - N_A$. Από το νόμο δράσεως των μαζών (2.16) βρίσκουμε τη συγκέντρωση των οπών, που είναι οι φορείς μειονότητας:

$$p = \frac{n_i^2}{N_D - N_A} \quad (2.21)$$

γ) Αν $N_A > N_D$, τότε $p > n$ και ο ημιαγωγός είναι *τύπου p* . Η συγκέντρωση των οπών (φορέων πλειονότητας) είναι $p \approx N_A - N_D$ (υποθέτοντας ότι $N_A \gg N_D$), ενώ η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων βρίσκεται με τη βοήθεια της (2.16):

$$n = \frac{n_i^2}{N_A - N_D} \quad (2.22)$$

2.10 Ρεύματα Διάχυσης στους Ημιαγωγούς

Τα ρεύματα διάχυσης διαφέρουν ως προς την αιτία της δημιουργίας τους από αυτά που μελετήσαμε ως τώρα: αποτελούν *στατιστικό* φαινόμενο και δεν σχετίζονται με την ύπαρξη ηλεκτρικού πεδίου (δεν υπακούουν, δηλαδή, στο νόμο του Ohm). Οφείλονται σε *ανομοιόμορφη κατανομή φορέων* (ηλεκτρονίων ή οπών) στον κρύσταλλο, έτσι ώστε οι συγκεντρώσεις n και p να μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο:

$$n = n(x, y, z), \quad p = p(x, y, z)$$

Τούτο έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταφορά ηλεκτρονίων ή οπών από περιοχές μεγαλύτερης συγκέντρωσης σε περιοχές μικρότερης συγκέντρωσης, έτσι ώστε η κατανομή των φορέων να γίνει τελικά ομοιόμορφη. Η κίνηση αυτή των φορέων συνιστά το *ρεύμα διάχυσης*.

Οι πυκνότητες των ρευμάτων διάχυσης \vec{J}_p και \vec{J}_n για τις οπές και τα ηλεκτρόνια, αντίστοιχα, δίνονται από το νόμο του Fick:

$$\vec{J}_p = -qD_p \vec{\nabla} p, \quad \vec{J}_n = +qD_n \vec{\nabla} n \quad (2.23)$$

όπου q η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου και D_p, D_n δύο σταθερές (σταθερές διάχυσης για τις οπές και τα ηλεκτρόνια). Τονίζουμε ότι η φορά του \vec{J}_n είναι συμβατική, δηλαδή αντίθετη από την πραγματική φορά κίνησης των ηλεκτρονίων (για τις οπές όμως που είναι θετικά φορτισμένες, το \vec{J}_p έχει τη φορά της κίνησής τους). Στην περίπτωση που η κατανομή των φορέων στο χώρο είναι ομοιόμορφη, $p=\text{σταθερό}$ και $n=\text{σταθερό}$, έτσι ώστε $\vec{J}_p=0$ και $\vec{J}_n=0$.

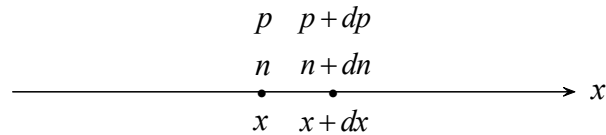
Αν τα n και p μεταβάλλονται μόνο σε μία διεύθυνση, έστω x , τότε $n=n(x)$, $p=p(x)$, και τα ρεύματα (2.23) ανάγονται στις αλγεβρικές εκφράσεις

$$J_p = -qD_p \frac{dp}{dx}, \quad J_n = +qD_n \frac{dn}{dx} \quad (2.24)$$

Η εκλογή των προσήμων στις σχέσεις (2.23) και (2.24) έγινε με βάση την ακόλουθη φυσική απαίτηση:

Η πραγματική φορά κίνησης των φορέων είναι από περιοχές μεγαλύτερης πυκνότητας σε περιοχές μικρότερης πυκνότητας.

Ας ελέγξουμε λοιπόν την ορθότητα των προσήμων μας. Χάρην απλότητας, θεωρούμε ότι $n=n(x)$ και $p=p(x)$:



Θεωρούμε μια κατανομή ηλεκτρονίων και οπών κατά μήκος του άξονα x . Έστω n και p οι αντίστοιχες συγκεντρώσεις στη θέση x κάποια χρονική στιγμή. Την ίδια στιγμή, σε μια γειτονική θέση $x+dx$ οι συγκεντρώσεις είναι $n+dn$ και $p+dp$, όπου τα dn και dp παριστούν τις μεταβολές των συγκεντρώσεων από τη θέση x στη θέση $x+dx$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $dn>0$ και $dp>0$, έτσι ώστε $n+dn>n$ και $p+dp>p$. Δηλαδή, οι συγκεντρώσεις αυξάνουν προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Με βάση την παρατήρηση που κάναμε παραπάνω, τόσο τα ηλεκτρόνια όσο και οι οπές θα πρέπει να κινούνται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα (προς τα αριστερά), δηλαδή από τη θέση μεγαλύτερης συγκέντρωσης προς τη θέση μικρότερης συγκέντρωσης. Μας το εξασφαλίζουν αυτό τα πρόσημα στις σχέσεις (2.24);

Στην περίπτωση των οπών έχουμε ότι

$$\frac{dp}{dx} > 0 \stackrel{(2.24)}{\Rightarrow} J_p < 0$$

Έτσι, βάσει της (2.24), το ρεύμα \vec{J}_p έχει κατεύθυνση προς την αρνητική φορά του άξονα x (προς τα αριστερά). Επειδή οι οπές είναι θετικά φορτισμένες, η φορά κίνησής τους συμπίπτει με αυτήν του \vec{J}_p , είναι δηλαδή προς τα αριστερά. Αυτό συμφωνεί απόλυτα με την πρόβλεψη που κάναμε παραπάνω.

Για τα ηλεκτρόνια έχουμε ότι

$$\frac{dn}{dx} > 0 \stackrel{(2.24)}{\Rightarrow} J_n > 0$$

Βάσει της (2.24), λοιπόν, το ρεύμα \vec{J}_n έχει κατεύθυνση προς την θετική φορά του άξονα x (προς τα δεξιά). Αυτή όμως είναι η *συμβατική* φορά του ρεύματος. Η *πραγματική* φορά κίνησης των (αρνητικά φορτισμένων) ηλεκτρονίων είναι αντίθετη της συμβατικής, δηλαδή προς τα αριστερά. Αυτό συμφωνεί και πάλι με την πρόβλεψη που κάναμε νωρίτερα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Να περιγραφεί η δομή των ενεργειακών ζωνών στα μέταλλα, τους μονωτές και τους ημιαγωγούς. Πώς η δομή αυτή ερμηνεύει την ηλεκτρική αγωγιμότητα των στερεών αυτών; Πώς εξηγείται η ηλεκτρική αγωγιμότητα των κρυστάλλων του νατρίου και του μαγνησίου; Πού οφείλεται η διαφορά αγωγιμότητας ανάμεσα στο διαμάντι και το γερμάνιο;
2. Πώς εξηγείτε το ότι το διαμάντι είναι διαφανές ενώ το νάτριο και το γερμάνιο είναι αδιαφανή; (Φωτόνια ορατής ακτινοβολίας: $1.5-3 \text{ eV}$.)
3. Θεωρούμε κρυστάλλους τριών διαφορετικών στερεών: (α) Ο κρύσταλλος A απορροφά κάθε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει σε αυτόν. (β) Ο κρύσταλλος B απορροφά κάθε ακτινοβολία της οποίας τα φωτόνια έχουν ενέργεια τουλάχιστον 5.9 eV . (γ) Ο κρύσταλλος Γ απορροφά ακτινοβολίες με ενέργεια τουλάχιστον 0.8 eV . Να γίνει ένα ποιοτικό διάγραμμα των ανώτερων ενεργειακών ζωνών για κάθε κρύσταλλο και να περιγραφούν οι ηλεκτρικές και οι οπτικές ιδιότητες των κρυστάλλων. (Φωτόνια ορατής ακτινοβολίας: $1.5-3 \text{ eV}$.)
4. Θεωρούμε δύο κρυστάλλους στερεών. Ο κρύσταλλος A απορροφά κάθε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει σε αυτόν, ενώ ο κρύσταλλος B απορροφά κάθε ακτινοβολία της οποίας τα φωτόνια έχουν ενέργεια τουλάχιστον 0.9 eV . Οι κρύσταλλοι βρίσκονται αρχικά σε ένα ψυγείο και στη συνέχεια τοποθετούνται σε ένα θερμοθάλαμο. Πώς θα μεταβληθεί η ηλεκτρική αντίσταση του κάθε κρυστάλλου; Εξηγήστε.
5. Να περιγραφούν οι φυσικές σημασίες των παρακάτω εννοιών:
 - α) Ζώνη αγωγιμότητας μετάλλου.
 - β) Ζώνη σθένους και ζώνη αγωγιμότητας ημιαγωγού.
 - γ) Ενεργειακό χάσμα ημιαγωγού.
 - δ) Οπή σε ημιαγωγό.
6. Να αποδειχθεί η γενική μορφή του νόμου του Ohm για ένα μέταλλο, καθώς και η ειδική μορφή του νόμου για ένα μεταλλικό σύρμα σταθερής διατομής.
7. Με βάση το νόμο του Ohm και τις εκφράσεις της ειδικής αγωγιμότητας, να εξηγηθεί γιατί ένα μέταλλο είναι πολύ πιο αγωγίμο από έναν καθαρό ημιαγωγό.
8. Να περιγραφεί η επίδραση της θερμοκρασίας στην αγωγιμότητα των μετάλλων και των ημιαγωγών. Ποιοι φυσικοί μηχανισμοί λαμβάνουν χώρα; Πώς επηρεάζονται τα φυσικά μεγέθη που υπεισέρχονται στις εκφράσεις της ειδικής αγωγιμότητας σε κάθε περίπτωση; Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στους κοινούς αγωγούς και τους υπεραγωγούς;
9. Να περιγραφεί ο φυσικός μηχανισμός με τον οποίο μια πρόσμειξη τύπου n ή τύπου p συμβάλλει στην αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού. Ποιοι είναι οι φορείς μειονότητας σε κάθε περίπτωση;

- 10.** Να διατυπωθεί ο νόμος δράσεως των μαζών. Με βάση αυτόν, να εξηγηθεί γιατί μια πρόσμειξη αυξάνει την αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού.
- 11.** Θεωρούμε δείγμα μοναδιαίου όγκου κρυστάλλου καθαρού γερμανίου (Ge) σε σταθερή θερμοκρασία. Το πλήθος των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας στο δείγμα είναι ίσο με a . Αντικαθιστούμε τώρα N άτομα Ge με άτομα φωσφόρου (P,15) και άλλα $10N$ άτομα Ge με άτομα βορίου (B,5). Ποιο θα είναι το νέο πλήθος των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας;
- 12.** Μερικά διαμάντια αντί να είναι τελείως διαφανή έχουν ένα βαθύ μπλε χρώμα που οφείλεται σε πρόσμειξη ατόμων βορίου (B,5). Πώς μεταβάλλει η πρόσμειξη το διάγραμμα των ενεργειακών ζωνών του καθαρού διαμαντιού; Σχεδιάστε το διάγραμμα ζωνών του μπλε διαμαντιού με δεδομένο ότι $E_G \simeq 6 \text{ eV}$ και ότι τα φωτόνια της «ερυθρής» περιοχής του φάσματος του φωτός έχουν ενέργεια της τάξης των 1.7 eV . (Θεωρούμε προσεγγιστικά ότι το φως έχει μια «μπλε» και μια «κόκκινη» συνιστώσα.)
- 13.** Σε τι διαφέρουν ως προς τα αίτια της δημιουργίας τους τα ρεύματα διάχυσης από εκείνα που υπακούουν στο νόμο του Ohm; Να δοθούν οι εκφράσεις των ρευμάτων διάχυσης ηλεκτρονίων και οπών και να εξηγηθεί η επιλογή των προσήμων στις εκφράσεις αυτές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

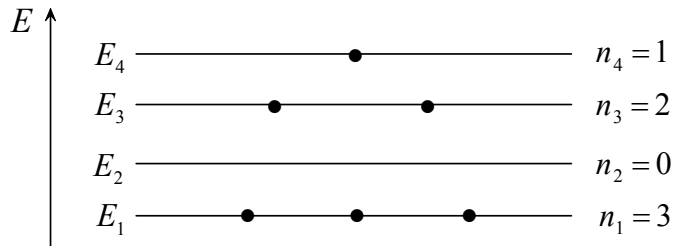
3.1 Βασικές Έννοιες από τη Στατιστική Φυσική

Με τον όρο *σύστημα* θα εννοούμε ένα σύνολο όμοιων σωματιδίων, τα οποία μπορεί να είναι ηλεκτρόνια, άτομα, μόρια, ή ακόμα και σπές σε έναν ημιαγωγό. Ο τρόπος με τον οποίο τα συστήματα ανταλλάσσουν ενέργεια με το περιβάλλον τους αποτελεί το κύριο αντικείμενο της *Θερμοδυναμικής*. Η Θερμοδυναμική δεν ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για τις μικροσκοπικές ιδιότητες των σωματιδίων που αποτελούν το σύστημα. Μακροσκοπικές φυσικές ποσότητες όπως η θερμότητα, η εντροπία, η θερμοχωρητικότητα, κλπ., εισάγονται ως πειραματικά μετρήσιμα μεγέθη χωρίς να συνδέονται άμεσα με την εσωτερική δομή του συστήματος.

Όμως, η μακροσκοπική συμπεριφορά ενός συστήματος εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις μικροσκοπικές ιδιότητες των σωματιδίων που το αποτελούν. Για παράδειγμα, το σύστημα των ελεύθερων ηλεκτρονίων ενός μετάλλου συμπεριφέρεται διαφορετικά απ' το σύστημα των μορίων ενός ιδανικού αερίου. Είναι λοιπόν αναγκαίο να συνδέσουμε τη μακροσκοπική συμπεριφορά των συστημάτων με τη μικροσκοπική τους δομή. Αυτό ακριβώς είναι το αντικείμενο της *Στατιστικής Φυσικής*. Στη Στατιστική Φυσική αναπτύσσονται μέθοδοι για τη μελέτη μακροσκοπικών ιδιοτήτων του συστήματος (όπως η πίεση ή η θερμοκρασία) χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε την λεπτομερή κίνηση του κάθε σωματιδίου χωριστά. Εξάλλου κάτι τέτοιο θα ήταν πρακτικά αδύνατο, αν σκεφτούμε ότι τα συστήματα για τα οποία μιλάμε αποτελούνται από έναν τεράστιο αριθμό σωματιδίων, της τάξης του 10^{23} ανά cm^3 !

Πολλές από τις ιδιότητες ενός συστήματος, όπως π.χ. η θερμοκρασία, ορίζονται μόνο όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση *θερμικής ισορροπίας*. Αυτό, με απλά λόγια, σημαίνει ότι το σύστημα δεν ανταλλάσσει ενέργεια στη μορφή θερμότητας με το περιβάλλον του, καθώς και ότι δεν υπάρχει ανταλλαγή θερμότητας ανάμεσα στα διάφορα μέρη του συστήματος. (Η θερμότητα, θυμίζουμε, είναι μια μορφή *ανταλλαγής* ενέργειας που, σε αντίθεση με το έργο, δεν μπορεί να εκφραστεί μακροσκοπικά σαν δύναμη \times μετατόπιση.) Σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας το σύστημα χαρακτηρίζεται από καθορισμένη, σταθερή απόλυτη θερμοκρασία T . Γενικά, ένα σύστημα που δεν αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του (άρα δεν ανταλλάσσει ενέργεια με αυτό) θα καλείται *απομονωμένο*.

Θεωρούμε τώρα ένα απομονωμένο σύστημα που αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό όμοιων σωματιδίων. Υποθέτουμε πως πρόκειται για ένα κβαντικό σύστημα, έτσι ώστε οι ενέργειες κάθε σωματιδίου να μπορούν να παίρνουν ορισμένες μόνο τιμές E_1, E_2, E_3, \dots , χαρακτηριστικές για τα σύστημα αυτό. Λέμε ότι κάθε σωματίδιο μπορεί να «καταλαμβάνει» μία από τις διαθέσιμες ενεργειακές στάθμες E_1, E_2, E_3, \dots , του συστήματος. Συμφωνούμε επίσης ότι το σύστημά μας καταλαμβάνει *μοναδιαίο όγκο*. Έτσι, όλα τα φυσικά μεγέθη που αφορούν το σύστημα θα αναφέρονται *στη μονάδα του όγκου*. Κάποια χρονική στιγμή τα σωματίδια κατανέμονται με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο στις διάφορες ενεργειακές στάθμες, έτσι ώστε n_i σωματίδια ανά μονάδα όγκου να βρίσκονται στη στάθμη E_i (να έχουν, δηλαδή, ενέργεια E_i):



Ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων του συστήματος ανά μονάδα όγκου είναι

$$n = \sum_i n_i \quad (3.1)$$

ενώ η ολική ενέργεια του συστήματος ανά μονάδα όγκου είναι¹

$$U = \sum_i n_i E_i \quad (3.2)$$

Το διατεταγμένο σύνολο $(n_1, n_2, n_3, \dots) \equiv (n_i)$ αποτελεί μια *κατανομή* και ορίζει μια *μικροκατάσταση* του συστήματος, συμβατή με τη μακροσκοπική κατάσταση που προσδιορίζεται από το πλήθος n των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου, την ολική ενέργεια U , κλπ. Η έκφραση (3.2) προϋποθέτει ότι τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν (ή τουλάχιστον δεν αλληλεπιδρούν έντονα), έτσι ώστε να μπορούμε να ορίσουμε την ενέργεια του κάθε σωματιδίου χωριστά. Αυτό ισχύει κατά προσέγγιση για τα μόρια των ιδανικών αερίων και τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων.

Επειδή το σύστημα είναι απομονωμένο, τα n και U είναι σταθερά. Εν τούτοις, οι (3.1) και (3.2) δεν προσδιορίζουν μονοσήμαντα την κατανομή (n_i) αφού διαφορετικές κατανομές (n_i) , (n_i') , (n_i'') , κλπ, μπορεί να αντιστοιχούν στις ίδιες τιμές των n και U . Τώρα, για τις τιμές αυτές υπάρχει μια *πλέον πιθανή κατανομή (μικροκατάσταση)*. Όταν το σύστημα βρίσκεται σε αυτή την κατάσταση μέγιστης πιθανότητας, λέμε ότι είναι σε *στατιστική ισορροπία* (στη Θερμοδυναμική χρησιμοποιείται ο όρος *θερμική ισορροπία*). Όταν ένα απομονωμένο σύστημα περιέλθει σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας έχει την τάση να παραμείνει σε αυτή, εκτός αν διαταραχθεί από κάποιο εξωτερικό αίτιο. Επιπλέον, όπως αναφέραμε πιο πάνω, σε κατάσταση ισορροπίας το σύστημα χαρακτηρίζεται από μια καλά καθορισμένη, σταθερή θερμοκρασία T . Στο εξής, θα θεωρούμε ότι το σύστημα στο οποίο αναφερόμαστε βρίσκεται σε στατιστική ισορροπία.

Τι γίνεται όταν οι ενέργειες των σωματιδίων του συστήματος παίρνουν *συνεχείς* τιμές E , όπου $E_1 \leq E \leq E_2$, αντί για τις διακριτές E_1, E_2, E_3, \dots ; Κάτι τέτοιο συμβαίνει, για παράδειγμα, με τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων, που οι ενέργειές τους μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο μέσα στα όρια της ζώνης αγωγιμότητας, καθώς και με τα μόρια των ιδανικών αερίων όταν ο όγκος που καταλαμβάνουν είναι μεγάλος. Στην περίπτωση αυτή έχουμε άπειρες ενεργειακές στάθμες κατανεμημένες συνεχώς ανάμεσα στις ακραίες τιμές E_1 και E_2 . Η κατανομή των σωματιδίων στις στάθμες αυτές περιγράφεται τώρα με τη βοήθεια μιας συνάρτησης $n(E)$ που ονομάζεται *ενεργειακή πυκνότητα* και ορίζεται ως εξής:

¹ Προσέξτε ότι οι τιμές E_i της ενέργειας είναι χαρακτηριστικές του είδους του συστήματος και δεν εξαρτώνται από τον όγκο του.

Το γινόμενο $n(E)dE$ παριστά το πλήθος των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου που έχουν ενέργειες στο διάστημα μεταξύ E και $E+dE$.

Λέμε ότι η ενεργειακή πυκνότητα $n(E)$ εκφράζει την κατανομή της ενέργειας στο σύστημα. Ακριβέστερα, για δοσμένη τιμή E της ενέργειας, η $n(E)$ περιγράφει την «τάση» που έχουν τα σωματίδια του συστήματος να έχουν ενέργειες στην περιοχή της E : μεγάλο $n(E)$ σημαίνει μεγάλο αριθμό σωματιδίων στην ενεργειακή περιοχή μεταξύ E και $E+dE$.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το συνολικό πλήθος n των σωματιδίων του συστήματος ανά μονάδα όγκου ισούται με

$$n = \int_{E_1}^{E_2} n(E) dE \quad (3.3)$$

Στην περίπτωση των μετάλλων το n παριστά το πλήθος των ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου, δηλαδή την *ηλεκτρονική πυκνότητα* που εμφανίζεται στην έκφραση της ειδικής αγωγιμότητας ($\sigma=q\eta\mu$).

Τώρα, σε αναλογία με αυτά που είπαμε στο Κεφ.1 για τα ηλεκτρόνια των ατόμων, η κατάσταση ενός σωματιδίου του συστήματος περιγράφεται με τη βοήθεια ενός συνόλου *κβαντικών αριθμών*, χαρακτηριστικών για το είδος του συστήματος. Γενικά, σε κάθε τιμή E της ενέργειας (δηλαδή, σε κάθε ενεργειακή στάθμη) αντιστοιχούν πολλές διαφορετικές κβαντικές καταστάσεις. Κάποιες από αυτές θα είναι «κατειλημμένες» από σωματίδια ενώ κάποιες άλλες θα είναι κενές. Σε αναλογία με την ενεργειακή πυκνότητα $n(E)$, ορίζουμε τώρα την *πυκνότητα καταστάσεων* $N(E)$ ως εξής:

Το γινόμενο $N(E)dE$ παριστά το πλήθος των καταστάσεων, ανά μονάδα όγκου του συστήματος, που αντιστοιχούν σε ενέργειες στο διάστημα μεταξύ E και $E+dE$.

Είναι προφανές ότι, όπως η ενεργειακή πυκνότητα έτσι και η πυκνότητα καταστάσεων ορίζεται μόνο στην περίπτωση που η ενέργεια E παίρνει *συνεχείς* τιμές. Επίσης, είναι φανερό πως δεν μπορούμε να βρούμε σωματίδια σε μια ενεργειακή περιοχή όπου δεν υπάρχουν κβαντικές καταστάσεις. Έτσι, $n(E)=0$ όταν $N(E)=0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού μπορεί να υπάρχουν ενεργειακές περιοχές όπου οι καταστάσεις είναι κενές. Αν όμως το σύστημα μεταβεί σε μια διαφορετική κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, με την ανακατανομή των σωματιδίων στις ενεργειακές στάθμες είναι δυνατό κάποια από αυτά να καταλάβουν κβαντικές καταστάσεις που ήταν προηγουμένως κενές.

3.2 Κλασική Κατανομή Maxwell-Boltzmann για Ιδανικό Αέριο

Το πρώτο σημαντικό πρόβλημα που καλείται να επιλύσει η Στατιστική Φυσική είναι η κατανομή της ενέργειας σε ένα *ιδανικό μονατομικό αέριο*. Επειδή ακριβώς είναι μονατομικό, η ενέργεια των μορίων του είναι αμιγώς *κινητική ενέργεια μεταφοράς* (δεν υπάρχει δυναμική ενέργεια λόγω ενδομοριακών δυνάμεων, αφού τέτοιες δυνάμεις δεν υπάρχουν σε ένα ιδανικό αέριο, ούτε και ενέργεια περιστροφής ενός μορίου ή ταλάντωσης των ιόντων που το συνθέτουν). Έτσι, οι μοριακές ενεργειακές στάθμες δίνονται από τη σχέση $E_i = \frac{1}{2} m v_i^2$, όπου m η μάζα ενός μορίου και v_i οι δυνατές τιμές της

ταχύτητας των μορίων. Για δοσμένες φυσικές συνθήκες, κάθε στάθμη E_i καταλαμβάνεται από όλα τα μόρια που έχουν κοινή ταχύτητα v_i .

Επειδή το αέριο είναι κβαντικό σύστημα που βρίσκεται σε περιορισμένο χώρο, οι τιμές της ταχύτητας και της ενέργειας των μορίων είναι κβαντισμένες έτσι ώστε τα v_i και E_i παίρνουν διακριτές τιμές (όπως άλλωστε φανερώνει και η χρήση του δείκτη i). Όταν όμως ο όγκος V που καταλαμβάνει το αέριο είναι μεγάλος, η μοριακή κινητική ενέργεια $E = \frac{1}{2} m v^2$ μπορεί να θεωρηθεί πως δεν είναι κβαντισμένη αλλά παίρνει *συνεχείς* τιμές. Η κατανομή της ενέργειας στα μόρια του αερίου, λοιπόν, εμπλέκει αναγκαία τις έννοιες της ενεργειακής πυκνότητας και της πυκνότητας καταστάσεων που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Όπως αποδεικνύεται, η πυκνότητα καταστάσεων δίνεται από τη σχέση

$$N(E) = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} \quad (3.4)$$

όπου m η μάζα ενός μορίου.² Η ενεργειακή πυκνότητα $n(E)$, θυμίζουμε, ορίζεται έτσι ώστε το γινόμενο $n(E) dE$ να παριστά το πλήθος των μορίων ανά μονάδα όγκου που έχουν ενέργειες στο διάστημα μεταξύ E και $E+dE$. Όπως βρίσκεται, όταν το αέριο είναι σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας,

$$n(E) = \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} \quad (3.5)$$

όπου n το πλήθος των μορίων ανά μονάδα όγκου και T η απόλυτη θερμοκρασία. Προσέξτε ότι *δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των μορίων που μπορούν να καταλάβουν μια κβαντική κατάσταση*. Με άλλα λόγια, τα μόρια του αερίου *δεν υπόκεινται στην απαγορευτική αρχή του Pauli*.

Η μέση (κινητική) ενέργεια των μορίων σε θερμοκρασία T δίνεται από τη σχέση

$$\langle U \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (3.6)$$

Το k που εμφανίζεται στις (3.5) και (3.6) είναι η *σταθερά του Boltzmann*, ίση με

$$k = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (3.7)$$

Αν N είναι ο ολικός αριθμός των μορίων του αερίου, η ολική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με $N \langle U \rangle$. Έτσι, αν V είναι ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο, η *ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου* του συστήματος είναι

$$U = \frac{N}{V} \langle U \rangle = n \langle U \rangle = \frac{3}{2} n kT \quad (3.8)$$

και, όπως βλέπουμε, εξαρτάται από τη συγκέντρωση n των μορίων (αριθμός μορίων ανά μονάδα όγκου) και την απόλυτη θερμοκρασία. Παρατηρούμε ιδιαίτερα ότι, βάσει της (3.6),

η απόλυτη θερμοκρασία T ενός ιδανικού αερίου είναι ένα μέτρο της μέσης κινητικής ενέργειας των μορίων του σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας.

² Επειδή η ενέργεια E είναι αμιγώς κινητική, έπεται ότι $E \geq 0$. Έτσι, η παρουσία του E μέσα σε τετραγωνική ρίζα είναι θεμιτή.

Ειδικά, η μέση κινητική ενέργεια των μορίων μηδενίζεται στη θερμοκρασία του απολύτου μηδενός ($T=0$). Όπως θα δούμε παρακάτω, κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων, παρά τις επιφανειακές ομοιότητες που εμφανίζει το σύστημα αυτό με τα μόρια των ιδανικών αερίων!

3.3 Κβαντική Στατιστική

Θα θέλαμε τώρα να μελετήσουμε άλλα κβαντικά συστήματα, όπως τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων. Η θεωρία Maxwell-Boltzmann, που οδήγησε με επιτυχία στα γνωστά συμπεράσματα της κινητικής θεωρίας των ιδανικών αερίων, αποδεικνύεται λιγότερο κατάλληλη για τη μελέτη ηλεκτρονικών συστημάτων. Ας δούμε γιατί.

Η θεωρία Maxwell-Boltzmann είναι κατά βάση μια κλασική θεωρία. Παρόλο που καταρχήν θεωρήσαμε τα μόρια των αερίων σαν κβαντικά σωμάτια (για παράδειγμα, είπαμε πως καταλαμβάνουν κβαντικές καταστάσεις), στην ουσία τα αντιμετωπίσαμε σαν κλασικά σωματίδια, αφού αγνοήσαμε τη σπουδαιότερη αρχή της κβαντικής θεωρίας: την *αρχή της αβεβαιότητας*. (Μη σας ξεγελά η παρουσία της κβαντικής σταθεράς h στη σχέση (3.4): το βασικό αποτέλεσμα (3.5) για την ενεργειακή πυκνότητα μπορεί να εξαχθεί με κλασικές μεθόδους, χωρίς τη συνδρομή της Κβαντομηχανικής.) Κάτι τέτοιο δεν είναι επιτρεπτό στην περίπτωση των ηλεκτρονίων, ούτε καν προσεγγιστικά, λόγω της εξαιρετικά μικροσκοπικής φύσης τους σε σύγκριση με τα μόρια των αερίων. Το πρόβλημα αυτό έρχεται να διορθώσει η *Κβαντική Στατιστική*.

Στην Κβαντική Στατιστική, *όμοια* σωματίδια που *αλληλεπιδρούν* θεωρούνται ως *μη-διακριτά*. Με τον όρο «όμοια σωματίδια» εννοούμε σωματίδια που μπορούν να αντικαταστήσουν το ένα το άλλο χωρίς να παρατηρήσουμε οποιαδήποτε φυσική μεταβολή στη μακροσκοπική κατάσταση του συστήματος. (Για παράδειγμα, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός μετάλλου είναι όμοια σωμάτια διότι δεν έχει σημασία ποια ακριβώς ηλεκτρόνια καταλαμβάνουν μια ενεργειακή στάθμη αλλά πόσα ηλεκτρόνια καταλαμβάνουν τη στάθμη αυτή.) Στην Κλασική Μηχανική, όπου η έννοια της τροχιάς ενός σωματιδίου έχει φυσικό νόημα, είναι δυνατό να ξεχωρίσουμε όμοια σωμάτια που αλληλεπιδρούν παρακολουθώντας απλά τις τροχιές τους κατά τη διάρκεια ενός πειράματος. Λέμε ότι τα κλασικά σωμάτια είναι *διακριτά*. Αυτή την άποψη ασπάζεται και η θεωρία Maxwell-Boltzmann για τα μόρια των ιδανικών αερίων. Τα πράγματα δεν είναι όμως τόσο απλά όταν πρόκειται για συστήματα πολύ μικροσκοπικών σωματιδίων όπως είναι, π.χ., τα ηλεκτρόνια ενός μετάλλου, αφού για τέτοια αμιγώς κβαντικά σωματίδια η αρχή της αβεβαιότητας δεν μας επιτρέπει να καθορίσουμε με ακρίβεια τις τροχιές τους (στην κβαντική θεωρία η έννοια της τροχιάς δεν υφίσταται καν). Έτσι, όταν τέτοια *όμοια* κβαντικά σωμάτια αλληλεπιδρούν είναι αδύνατο να διακρίνουμε το ένα από το άλλο κατά τη διάρκεια ενός πειράματος. Λέμε ότι τα σωμάτια αυτά είναι *μη-διακριτά*. (Όταν δεν αλληλεπιδρούν, τα όμοια σωμάτια μπορούν να θεωρούνται ως διακριτά.)

Η Κβαντική Στατιστική, λοιπόν, είναι η γενίκευση της Κλασικής Στατιστικής έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη η αρχή της αβεβαιότητας. Σύμφωνα με την Κβαντική Στατιστική, στη Φύση υπάρχουν δύο ειδών σωμάτια που, όταν ομαδοποιούνται σε συστήματα όμοιων, μη-διακριτών σωματιδίων, ακολουθούν αντίστοιχα δύο διαφορετικούς στατιστικούς νόμους κατανομής της ενέργειας:

- Τα σωματίδια που υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli ονομάζονται *φερμιόνια* και ακολουθούν την κατανομή *Fermi-Dirac*.
- Τα σωματίδια που δεν υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli ονομάζονται *μποζόνια* και ακολουθούν την κατανομή *Bose-Einstein*.

Όπως έχει παρατηρηθεί,

όλα τα σωματίδια με ημιακέραιο spin (π.χ., ηλεκτρόνια) είναι φερμιόνια, ενώ όλα τα σωματίδια με ακέραιο spin (π.χ., φωτόνια) είναι μποζόνια.

Σύμφωνα με τα παραπάνω,

δύο όμοια φερμιόνια δεν μπορούν να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση σε ένα σύστημα, ενώ ένας αυθαίρετος αριθμός όμοιων μποζονίων μπορούν να καταλαμβάνουν την ίδια κβαντική κατάσταση.

Με δεδομένο ότι ακόμα και τα μόρια των ιδανικών αερίων είναι κβαντικά συστήματα που αποτελούνται από διαφόρων ειδών φερμιόνια (ηλεκτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια), αναρωτιόμαστε τώρα αν η κατανομή Maxwell-Boltzmann μάς είναι πλέον άχρηστη. Λοιπόν, αυτό που «σώζει την παρτίδα» για την Κλασική Στατιστική είναι πως, στο όριο που μπορούμε να αγνοούμε την αρχή της αβεβαιότητας, τόσο η κατανομή Fermi-Dirac, όσο και η κατανομή Bose-Einstein, ανάγονται στην κατανομή Maxwell-Boltzmann. Υπάρχουν φυσικές συνθήκες όπου μπορούμε να αγνοήσουμε την αρχή της αβεβαιότητας, όπως π.χ. στην περίπτωση ενός ιδανικού αερίου που έχει *μικρή πυκνότητα* (μικρή συγκέντρωση μορίων) και βρίσκεται σε *υψηλή θερμοκρασία*. Στις συνθήκες αυτές τα κβαντικά φαινόμενα δεν είναι σημαντικά και η χρήση κλασικών στατιστικών μεθόδων είναι επιτρεπτή και οδηγεί σε σωστά φυσικά συμπεράσματα.

3.4 Κατανομή Fermi-Dirac για τα Ηλεκτρόνια ενός Μετάλλου

Η στατιστική θεωρία των Fermi-Dirac αφορά συστήματα όμοιων, μη-διακριτών σωματιδίων που υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli (*φερμιόνια*). Ένα τέτοιο σύστημα αποτελούν τα ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός μετάλλου. Αν και οι ενέργειες των ηλεκτρονίων είναι κβαντισμένες, μπορούμε προσεγγιστικά να θεωρούμε πως μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο μέσα στα όρια της ζώνης αγωγιμότητας. Η προσέγγιση αυτή ισχύει στο βαθμό που ο χώρος μέσα στον οποίο κινούνται τα ηλεκτρόνια έχει σχετικά μεγάλο όγκο (κάτι ανάλογο ισχύει και για τα μόρια των ιδανικών αερίων).

Τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας του μετάλλου λέγονται *ελεύθερα* διότι κινούνται ανάμεσα στα θετικά ιόντα χωρίς να δέχονται σημαντικές δυνάμεις (εκτός βέβαια αν προσκρούσουν στα ιόντα!). Ένα ελεύθερο σωματίδιο έχει σταθερή δυναμική ενέργεια που μπορεί (αυθαίρετα) να λαμβάνεται ίση με μηδέν. Έτσι, η ενέργεια E ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου είναι *αμιγώς κινητική*, πράγμα που σημαίνει ότι $E \geq 0$. Θα θεωρούμε, λοιπόν, ότι η ενέργεια E ενός ηλεκτρονίου του μετάλλου μπορεί να πάρει όλες τις τιμές από 0 μέχρι $+\infty$. (Το άνω όριο, φυσικά, είναι θεωρητικό, αφού για να παραμείνει το ηλεκτρόνιο μέσα στο μέταλλο δεν θα πρέπει το E να ξεπεράσει το έργο εξαγωγής.)

Έστω $N(E)$ η *πυκνότητα καταστάσεων* στη ζώνη αγωγιμότητας του μετάλλου. Όπως θυμόμαστε, η συνάρτηση αυτή ορίζεται έτσι ώστε το γινόμενο $N(E)dE$ να ισούται με το πλήθος των καταστάσεων (ανά μονάδα όγκου) με ενέργειες μεταξύ E και $E+dE$ (ισοδύναμα, το πλήθος των κβαντικών καταστάσεων που περιέχονται σε όλες τις ενεργειακές στάθμες μεταξύ E και $E+dE$ στη ζώνη αγωγιμότητας). Όπως αποδεικνύεται, η συνάρτηση $N(E)$ δίνεται από την έκφραση

$$N(E) = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} \equiv \gamma E^{1/2} \quad (3.9)$$

όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου. Συγκρίνοντας την (3.9) με την (3.4) παρατηρούμε ότι η πυκνότητα καταστάσεων για τα ηλεκτρόνια του μετάλλου είναι διπλάσια από αυτή για τα μόρια ενός ιδανικού αερίου. Ο διπλασιασμός των καταστάσεων οφείλεται στους δύο πιθανούς προσανατολισμούς του spin των ηλεκτρονίων, δηλαδή στις δύο δυνατές τιμές του κβαντικού αριθμού m_s ($= \pm 1/2$). Η θεώρηση αυτή δεν υφίσταται στην κατανομή Maxwell-Boltzmann, αφού η κλασική θεωρία δεν λαμβάνει υπόψη κβαντικές έννοιες όπως το spin.

Για να βρούμε την κατανομή της ενέργειας στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου θα πρέπει να προσδιορίσουμε την *ενεργειακή πυκνότητα* $n(E)$. Η συνάρτηση αυτή, θυμόμαστε, ορίζεται έτσι ώστε το γινόμενο $n(E)dE$ να παριστά το πλήθος των ηλεκτρονίων (ανά μονάδα όγκου του μετάλλου) με ενέργειες μεταξύ E και $E+dE$ (ισοδύναμα, το πλήθος των ελεύθερων ηλεκτρονίων που καταλαμβάνουν τις ενεργειακές στάθμες μεταξύ E και $E+dE$ στη ζώνη αγωγιμότητας). Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι, λόγω της απαγορευτικής αρχής του Pauli, ο αριθμός των ηλεκτρονίων στο ενεργειακό αυτό διάστημα δεν θα πρέπει να ξεπερνάει τον αριθμό των διαθέσιμων καταστάσεων στο ίδιο διάστημα:

$$n(E)dE \leq N(E)dE \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{n(E)}{N(E)} \leq 1$$

Παρατηρούμε ότι το πηλίκο $n(E)/N(E)$ πληροί τις προϋποθέσεις ώστε να παριστά πιθανότητα. Ορίζουμε λοιπόν τη *συνάρτηση πιθανότητας* $f(E)$:

$$f(E) = \frac{n(E)}{N(E)} \quad \Leftrightarrow \quad n(E) = f(E)N(E) \quad (3.10)$$

Η $f(E)$ παριστά το ποσοστό των καταστάσεων με ενέργεια E που είναι κατειλημμένες από ηλεκτρόνια, ή ισοδύναμα, την πιθανότητα να είναι κατειλημμένη μια κατάσταση με ενέργεια E από ένα ηλεκτρόνιο.

Η αναλυτική έκφραση για την $f(E)$ δίνεται από τη *συνάρτηση πιθανότητας Fermi-Dirac*:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} \quad (3.11)$$

όπου T η απόλυτη θερμοκρασία, k η σταθερά Boltzmann (3.7), και E_F μια παράμετρος που ονομάζεται *ενέργεια Fermi* για το δεδομένο μέταλλο. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι, αν και αναφερόμαστε εδώ ειδικά στα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων, η έκφραση (3.11) ισχύει γενικά για όλα τα συστήματα φερμιονίων.

Συνδυάζοντας τις (3.10), (3.11) και (3.9) μπορούμε τώρα να γράψουμε την έκφραση για την ενεργειακή πυκνότητα $n(E)$, η οποία ουσιαστικά προσδιορίζει την κατανομή της ενέργειας στα ελεύθερα ηλεκτρόνια:

$$n(E) = f(E)N(E) = \frac{\gamma E^{1/2}}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} \quad (3.12)$$

Θα θέλαμε τώρα να δούμε τη φυσική σημασία της ενέργειας Fermi E_F . Αυτή προκύπτει από την (3.11) με τις παρακάτω μαθηματικές παρατηρήσεις:

- Όταν $T \rightarrow 0$, $\lim_{T \rightarrow 0^+} [e^{(E-E_F)/kT}] = \begin{cases} \infty, & E > E_F \\ 0, & E < E_F \end{cases}$
- Για $T > 0$, $e^{(E-E_F)/kT} = 1$ όταν $E = E_F$

Άρα, ισχύουν τα εξής:

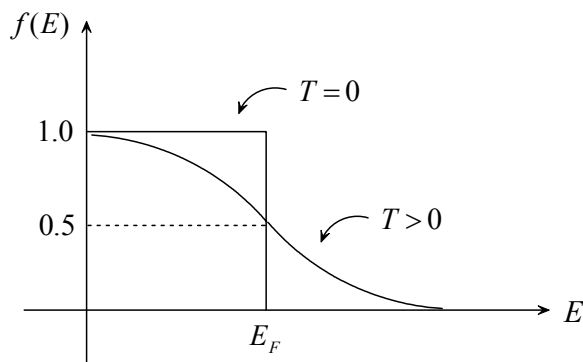
$$\text{Για } T = 0 \Rightarrow f(E) = \begin{cases} 0, & E > E_F \\ 1, & E < E_F \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\text{Για } T > 0 \Rightarrow f(E_F) = \frac{1}{2} \quad (3.14)$$

Η φυσική σημασία των παραπάνω είναι η ακόλουθη:

1. Για $T=0$, όλες οι καταστάσεις με ενέργειες $E < E_F$ είναι κατειλημμένες από ηλεκτρόνια ενώ όλες οι καταστάσεις με $E > E_F$ είναι κενές.
2. Για $T > 0$, οι μισές καταστάσεις με ενέργεια $E = E_F$ είναι κατειλημμένες. Έτσι, η πιθανότητα κατάληψης μιας κατάστασης στη στάθμη Fermi E_F είναι 50%.

Προσέξτε ότι η συνάρτηση $f(E)$ είναι ασυνεχής για $E = E_F$ όταν $T = 0$. Έτσι, δεν είναι δυνατό να προσδιορίσουμε το ποσοστό κατάληψης της στάθμης Fermi για $T = 0$. Στο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της $f(E)$ για $T = 0$ και $T > 0$:



Παρατηρούμε την ασυνέχεια της $f(E)$ στο σημείο $E = E_F$ όταν $T = 0$. Τονίζουμε και πάλι ότι το διάγραμμα αυτό ισχύει γενικά για όλα τα συστήματα φερμιονίων.

3.5 Υπολογισμός της Ενέργειας Fermi για ένα Μέταλλο

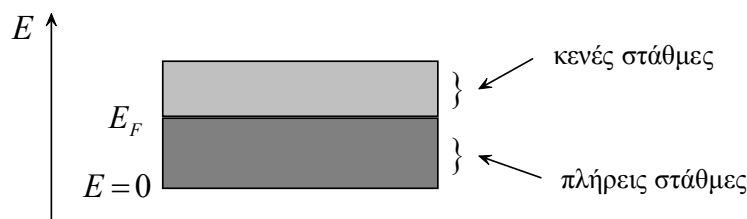
Σύμφωνα με τη φυσική ερμηνεία που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η ενέργεια Fermi E_F θέτει ένα άνω όριο στις ενέργειες των ελεύθερων ηλεκτρονίων του μετάλλου για $T=0$. Επειδή η ενέργεια ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου είναι αμιγώς κινητική, μπορούμε να γράψουμε

$$E_F = (E_k)_{max} \quad \text{για} \quad T=0 \quad (3.15)$$

Δηλαδή,

η ενέργεια Fermi ενός μετάλλου παριστά τη μέγιστη κινητική ενέργεια των ελεύθερων ηλεκτρονίων του στην απόλυτη θερμοκρασία $T=0$.

Έτσι, στη θερμοκρασία $T=0$ όλες οι κβαντικές καταστάσεις της ζώνης αγωγιμότητας από την κατώτατη στάθμη $E=0$ έως τη στάθμη Fermi $E=E_F$ είναι κατειλημμένες, ενώ όλες οι καταστάσεις στις στάθμες πάνω από την E_F είναι κενές. Το παρακάτω διάγραμμα απεικονίζει τη ζώνη αγωγιμότητας του μετάλλου για $T=0$:



Παρατηρούμε εδώ μια ουσιαστική διαφορά από την κλασική θεωρία των ιδανικών αερίων. Σύμφωνα με αυτή, όλα τα μόρια ενός αερίου έχουν (κινητική) ενέργεια $E=0$ όταν $T=0$. Αντίθετα, για $T=0$ τα ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός μετάλλου έχουν (κινητικές) ενέργειες που κυμαίνονται από $E=0$ έως $E=E_F$. Αυτό συμβαίνει διότι τα ηλεκτρόνια, ως φερμιόνια, υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli η οποία δεν τους επιτρέπει να βρίσκονται όλα στη στάθμη ελάχιστης ενέργειας $E=0$, αφού η στάθμη αυτή δεν διαθέτει τον απαιτούμενο αριθμό κβαντικών καταστάσεων. Για θερμοκρασίες $T>0$, μερικά ελεύθερα ηλεκτρόνια αποκτούν θερμική ενέργεια τέτοια ώστε η (κινητική) ενέργειά τους να ξεπεράσει την τιμή της E_F . Τα ηλεκτρόνια αυτά τότε καταλαμβάνουν στάθμες της ζώνης αγωγιμότητας που βρίσκονται πάνω από τη στάθμη Fermi E_F . Όσο για την ίδια τη στάθμη E_F , θυμίζουμε ότι οι μισές καταστάσεις της είναι κατειλημμένες για $T>0$.

Προτείνουμε τώρα μια μέθοδο για τον υπολογισμό της ενέργειας Fermi E_F του συστήματος των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας ενός μετάλλου. Έστω n η ηλεκτρονική πυκνότητα του μετάλλου (πλήθος ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου) και $n(E)$ η ενεργειακή πυκνότητα της κατανομής Fermi-Dirac. Οι δύο αυτές ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση (3.3):

$$n = \int_{E_1}^{E_2} n(E) dE = \int_0^{\infty} n(E) dE \quad (3.16)$$

όπου στην περίπτωση μας θέσαμε $E_1=0$, $E_2=+\infty$ (βλ. Παρ.3.4). Αντικαθιστώντας την έκφραση της σχέσης (3.12) για το $n(E)$, έχουμε:

$$n = \int_0^{\infty} \frac{\gamma E^{1/2}}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} dE \quad (3.17)$$

Αν μπορούσαμε να υπολογίσουμε αναλυτικά το ολοκλήρωμα στην (3.17), το μόνο που θα είχαμε να κάνουμε θα ήταν να λύσουμε το τελικό αποτέλεσμα ως προς E_F και να εκφράσουμε την ενέργεια Fermi σαν συνάρτηση των n και T . Επειδή όμως κάτι τέτοιο δεν είναι εύκολο, θα περιοριστούμε σε κάτι απλούστερο: Θα υπολογίσουμε την E_F στην ειδική περίπτωση όπου $T=0$. Από τις (3.10), (3.9) και (3.13) έχουμε ότι, στη θερμοκρασία αυτή,

$$n(E) = f(E)N(E) = \begin{cases} 0, & E > E_F \\ \gamma E^{1/2}, & 0 \leq E < E_F \end{cases} \quad (3.18)$$

Αντικαθιστώντας την (3.18) στην (3.16), βρίσκουμε:

$$n = \int_0^{E_F} n(E) dE + \int_{E_F}^{\infty} n(E) dE = \int_0^{E_F} \gamma E^{1/2} dE + 0 \Rightarrow$$

$$n = \frac{2}{3} \gamma E_F^{3/2} \quad (3.19)$$

έτσι ώστε

$$\boxed{E_F = \left(\frac{3n}{2\gamma} \right)^{2/3}} \quad (3.20)$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια Fermi του μετάλλου εξαρτάται μόνο από την ηλεκτρονική πυκνότητα n και είναι ανεξάρτητη από τις διαστάσεις του κρυστάλλου (από το ολικό πλήθος των ιόντων). Όπως αποδεικνύεται, η τιμή αυτή της E_F δεν μεταβάλλεται σημαντικά με τη θερμοκρασία. Έτσι, παρόλο που αποδείχθηκε για $T=0$, η σχέση (3.20) θα θεωρείται πως έχει γενική ισχύ για κάθε T . Οι τιμές της E_F για τα μέταλλα κυμαίνονται από περίπου $3eV$ έως $12eV$.

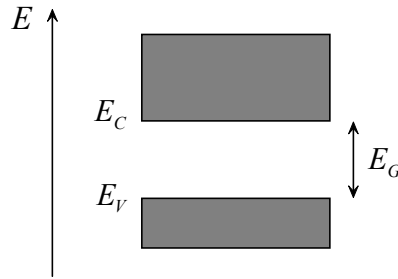
3.6 Κατανομή Fermi-Dirac για τους Καθαρούς Ημιαγωγούς

Το ηλεκτρονικό σύστημα που μας ενδιαφέρει στους καθαρούς ημιαγωγούς είναι τα ηλεκτρόνια σθένους, τόσο τα δέσμια σε ομοιοπολικούς δεσμούς όσο και τα ελεύθερα. Τα ηλεκτρόνια αυτά βρίσκονται ενεργειακά στις ζώνες σθένους και αγωγιμότητας. Η κατανομή της ενέργειας στα ηλεκτρόνια καθορίζεται, όπως πάντα, από την ενεργειακή πυκνότητα $n(E)$, η οποία συνδέεται με την πυκνότητα καταστάσεων $N(E)$ και τη συνάρτηση πιθανότητας $f(E)$ με τη σχέση

$$n(E) = f(E) N(E) \quad (3.21)$$

Όπως γνωρίζουμε, το γινόμενο $n(E)dE$ παριστά το πλήθος των ηλεκτρονίων, ανά μονάδα όγκου του υλικού, με ενέργειες μεταξύ E και $E+dE$.

Η μορφή της συνάρτησης $N(E)$, που είναι γενίκευση της (3.9) για τα μέταλλα, εξαρτάται από την ενεργειακή περιοχή στην οποία η συνάρτηση αυτή ορίζεται:



α) Στη ζώνη αγωγιμότητας,

$$N(E) = \gamma (E - E_C)^{1/2}, \quad E \geq E_C \quad (3.22)$$

β) Στη ζώνη σθένους,

$$N(E) = \gamma (E_V - E)^{1/2}, \quad E \leq E_V \quad (3.23)$$

γ) Στην απαγορευμένη ζώνη του καθαρού ημιαγωγού δεν υπάρχουν επιτρεπτές καταστάσεις, οπότε

$$N(E) = 0, \quad E_V < E < E_C \quad (3.24)$$

Η συνάρτηση πιθανότητας για τα ηλεκτρόνια σθένους δίνεται από την έκφραση Fermi-Dirac:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} \quad (3.25)$$

όπου το E παίρνει τιμές στις τρεις παραπάνω ενεργειακές περιοχές. Θα θέλαμε τώρα να βρούμε τη συνάρτηση πιθανότητας $f_p(E)$ για τις σπές στη ζώνη σθένους του ημιαγωγού. Σκεφτόμαστε ως εξής: Μια κατάσταση στην ενεργειακή στάθμη E της ζώνης σθένους είναι κατειλημμένη είτε από ένα ηλεκτρόνιο είτε από μία σπή. Αν $f(E)$ και $f_p(E)$ είναι οι αντίστοιχες πιθανότητες κατάληψης, τότε

$$f(E) + f_p(E) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f_p(E) = 1 - f(E) \quad (3.26)$$

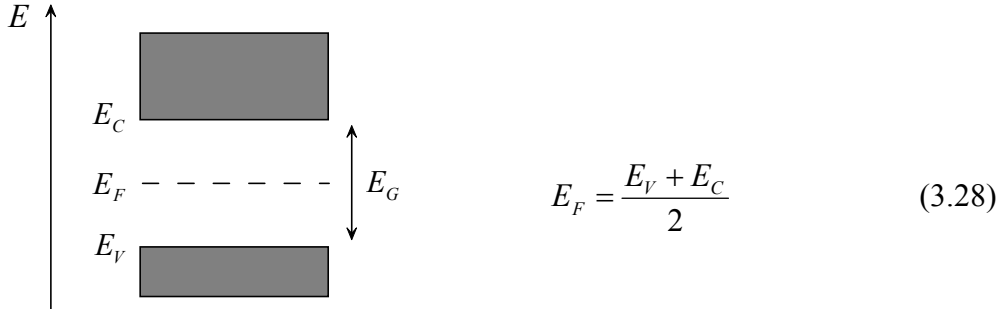
Αντικαθιστώντας την έκφραση (3.25) για την $f(E)$, βρίσκουμε ότι

$$f_p(E) = \frac{e^{(E-E_F)/kT}}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} \quad (3.27)$$

Από φυσική άποψη, η $f_p(E)$ παριστά το ποσοστό των καταστάσεων με ενέργεια E που δεν είναι κατειλημμένες από ηλεκτρόνια, ή ισοδύναμα, την πιθανότητα να μην είναι κατειλημμένη μια κατάσταση με ενέργεια E .

3.7 Ενέργεια Fermi στους Ημιαγωγούς

Η ενέργεια Fermi για έναν καθαρό ημιαγωγό (πιο σωστά, για το σύστημα των ηλεκτρονίων σθένους του ημιαγωγού) δίνεται από την έκφραση



$$E_F = \frac{E_V + E_C}{2} \quad (3.28)$$

(βλ. σχήμα). Γράφουμε:

$$E_F = \frac{E_V + (E_V + E_G)}{2} = E_V + \frac{E_G}{2} \quad (3.29)$$

Αυτό σημαίνει ότι

η στάθμη Fermi ενός καθαρού ημιαγωγού βρίσκεται στο μέσον της απαγορευμένης ζώνης.

Επιπλέον, η E_F είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία καθώς και από τις διαστάσεις του κρυστάλλου.

Πώς ερμηνεύεται η θέση της E_F μέσα στην απαγορευμένη ζώνη στον καθαρό ημιαγωγό; Θα πρέπει μήπως να συμπεράνουμε ότι υπάρχει, τελικά, κάποια επιτρεπόμενη στάθμη σε μια ενεργειακή περιοχή που μέχρι τώρα θεωρούσαμε απρόσιτη για τα ηλεκτρόνια; Όχι! Γενικά μιλώντας, η ενέργεια Fermi E_F είναι απλά μια παράμετρος της κατανομής Fermi-Dirac και δεν αντιπροσωπεύει απαραίτητα μια επιτρεπόμενη ενεργειακή στάθμη για τα ηλεκτρόνια. Δηλαδή, η στάθμη Fermi είναι δυνατό να μην περιέχει επιτρεπτές καταστάσεις. Αυτό ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση του καθαρού ημιαγωγού.³ Η παρουσία της στάθμης E_F μέσα στην απαγορευμένη ζώνη είναι απόλυτα συμβατή με τη γενικότερη φυσική ερμηνεία που επιδέχεται η ενέργεια Fermi, όπως την περιγράψαμε στην Παρ.3.4. Αναλυτικά:

α) Για $T > 0$ γνωρίζουμε ότι $f(E_F) = 1/2$. Δηλαδή, οι μισές καταστάσεις της στάθμης E_F είναι κατειλημμένες από ηλεκτρόνια. Στην περίπτωσή μας, όμως, η E_F βρίσκεται μέσα στην απαγορευμένη ζώνη, άρα δεν είναι δυνατό να διαθέτει επιτρεπτές καταστάσεις. Έτσι, πάνω στη στάθμη Fermi έχουμε ότι

$$\frac{1}{2} \times 0 \text{ καταστάσεις} = 0 \text{ ηλεκτρόνια}$$

πράγμα λογικό, αφού καμία στάθμη στην απαγορευμένη ζώνη καθαρού ημιαγωγού δεν μπορεί να περιέχει ηλεκτρόνια.

³ Αντίθετα, στα μέταλλα η E_F είναι επιτρεπόμενη στάθμη αφού βρίσκεται σε μια επιτρεπτή περιοχή ενέργειας, τη ζώνη αγωγιμότητας.

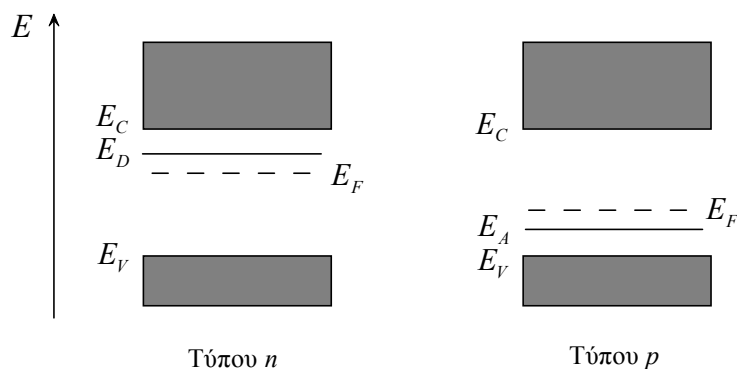
β) Για $T=0$, όλες οι επιτρεπτές στάθμες κάτω από την E_F είναι πλήρεις ενώ όλες οι επιτρεπτές στάθμες πάνω από την E_F είναι κενές. Όμως, επιτρεπτές στάθμες κάτω και πάνω από την E_F υπάρχουν μόνο στις ζώνες σθένους και αγωγιμότητας, αντίστοιχα. Έτσι, όλες οι στάθμες της ζώνης σθένους είναι πλήρως κατειλημμένες από ηλεκτρόνια σθένους, ενώ καμία στάθμη της ζώνης αγωγιμότητας δεν περιέχει ηλεκτρόνια. Από φυσική άποψη τούτο σημαίνει ότι, για $T=0$ όλοι οι ομοιοπολικοί δεσμοί στον κρύσταλλο είναι πλήρεις, ενώ δεν υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια.

Το γεγονός ότι η στάθμη E_F βρίσκεται στο μέσον της απαγορευμένης ζώνης ανα-νακλά μια προφανή συμμετρία ανάμεσα στα ελεύθερα ηλεκτρόνια και τις οπές στον καθαρό ημιαγωγό. Μαθηματικά, η συμμετρία αυτή εκφράζεται με τη σχέση

$$n = p = n_i \quad (\text{καθαρός ημιαγωγός}) \quad (3.30)$$

Δηλαδή, η στάθμη Fermi «κρατάει ίσες αποστάσεις» από τις δύο ενεργειακές ζώνες στις οποίες βρίσκονται αντίστοιχα οι δύο φορείς αγωγιμότητας του ημιαγωγού.

Νομίζω πως μπορείτε τώρα να μαντέψετε τι θα συμβεί στη στάθμη Fermi του ημιαγωγού όταν κάνουμε προσμείξεις. Το αποτέλεσμα μιας πρόσμειξης είναι η ανατροπή της ισορροπίας ηλεκτρονίων-οπών που εκφράζει η σχέση (3.30). Σε ημιαγωγό τύπου n φορείς πλειονότητας είναι τα ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας, ενώ σε ημιαγωγό τύπου p φορείς πλειονότητας είναι οι οπές της ζώνης σθένους. Η στάθμη Fermi, λοιπόν, μετατοπίζεται προς τη ζώνη όπου βρίσκονται οι φορείς πλειονότητας σε κάθε περίπτωση. Αναλυτικά, σε ημιαγωγό τύπου n η στάθμη Fermi είναι μετατοπισμένη προς τη ζώνη αγωγιμότητας, ενώ σε ημιαγωγό τύπου p είναι μετατοπισμένη προς τη ζώνη σθένους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



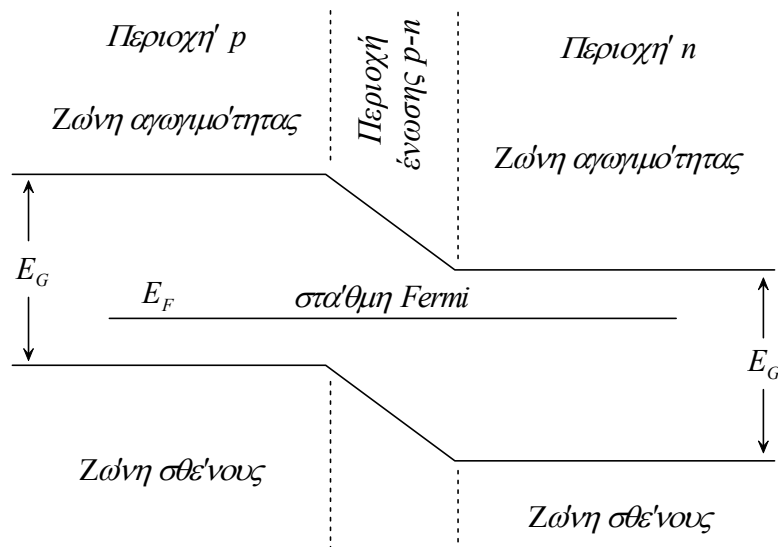
Σε αντίθεση με τον καθαρό ημιαγωγό όπου η E_F είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία (η στάθμη E_F βρίσκεται πάντα στο μέσον της απαγορευμένης ζώνης), στους ημιαγωγούς προσμείξεως η E_F μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία: καθώς το T αυξάνει, η E_F μετατοπίζεται προς το κέντρο της απαγορευμένης ζώνης. Αυτό συμβαίνει γιατί, με την αύξηση της θερμοκρασίας «σπάζουν» όλο και περισσότεροι ομοιοπολικοί δεσμοί στον κρύσταλλο, με συνέπεια να αυξάνουν οι αυτογενείς φορείς (ηλεκτρόνια-οπές) σε σχέση με τους φορείς πρόσμειξης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μοιάζει ο ημιαγωγός όλο και περισσότερο με καθαρό, κι έτσι η στάθμη Fermi να μετατοπίζεται προς το μέσον της απαγορευμένης ζώνης. Αντίθετα, καθώς $T \rightarrow 0$ η στάθμη E_F περνάει πάνω από την E_D (τύπου n) ή κάτω από την E_A (τύπου p).

Η τιμή της E_F εξαρτάται επίσης και από τη συγκέντρωση των ατόμων πρόσμειξης: προσθήκη επιπλέον δότη (αποδέκτη) σε ημιαγωγό τύπου n (τύπου p) έχει σαν αποτέλεσμα τη μετατόπιση της στάθμης Fermi ακόμα πιο κοντά στη ζώνη αγωγιμότητας (σθένους). Σε ακραίες περιπτώσεις, όταν έχουμε μεγάλο εμπλουτισμό σε άτομα δότη ($N_D > 10^{19}$ άτομα / cm^3) ή αποδέκτη ($N_A > 10^{19}$ άτομα / cm^3) η μετατόπιση της στάθμης Fermi είναι τόσο μεγάλη ώστε η E_F βρίσκεται μέσα στη ζώνη αγωγιμότητας ή τη ζώνη σθένους, αντίστοιχα!

Σημείωση: Ενέργεια Fermi για ένωση $p-n$

Η ένωση $p-n$ είναι στην ουσία ένας κρύσταλλος ημιαγωγού στο ένα τμήμα του οποίου έχουμε προσθέσει άτομα αποδέκτη και στο άλλο τμήμα άτομα δότη, έτσι ώστε το τελικό αποτέλεσμα να μοιάζει με συγκόλληση δύο κρυστάλλων ημιαγωγού, ενός τύπου p και ενός τύπου n . Για την απλούστευση της θεωρητικής μελέτης της διάταξης, όμως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ένωση $p-n$ είναι πράγματι συνένωση δύο διαφορετικών κρυστάλλων πρόσμειξης του ίδιου ημιαγωγού.⁴

Πριν τη «συνένωση» οι ενέργειες Fermi των δύο κρυστάλλων είναι διαφορετικές (στον ημιαγωγό τύπου p η στάθμη E_F είναι πιο κοντά στη ζώνη σθένους, ενώ στον ημιαγωγό τύπου n η E_F είναι πιο κοντά στη ζώνη αγωγιμότητας). Μετά τη συνένωση, όμως, προκύπτει ένα ενιαίο ηλεκτρονικό σύστημα στο οποίο αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή της ενέργειας Fermi, άρα και μια μοναδική στάθμη E_F , κοινή για τα τμήματα p και n :



Η ένωση $p-n$ έχει κεντρική σημασία στην Ηλεκτρονική καθώς αποτελεί θεμελιώδες δομικό στοιχείο των σύγχρονων ηλεκτρονικών διατάξεων, όπως το τρανζίστορ.

⁴ Για το λόγο αυτό στη βιβλιογραφία η ένωση $p-n$ αναφέρεται συνήθως ως «επαφή $p-n$ ».

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Ποιο είναι το αντικείμενο της Στατιστικής Φυσικής; Ποια είναι η βασική της διαφορά από τη Θερμοδυναμική;
2. Με ποιους τρόπους θα περιγράφατε την κατανομή της ενέργειας σε ένα σύστημα σωματιδίων των οποίων οι ενέργειες δέχονται (α) διακριτές, (β) συνεχείς τιμές;
3. Ποια είναι η βασική διαφορά της Κβαντικής Στατιστικής από την κλασική θεωρία των Maxwell-Boltzmann; Ποια είδη συστημάτων σωματιδίων υπάρχουν στη Φύση σύμφωνα με την Κβαντική Στατιστική; Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στο spin των σωματιδίων και τη στατιστική τους συμπεριφορά;
4. Φανταστείτε έναν «ανάποδο» κόσμο όπου τα ηλεκτρόνια θα ήταν μποζόνια ενώ τα φωτόνια θα ήταν φερμιόνια. (α) Τι βαθμό θα παίρνατε στο μάθημα της Χημείας; (β) Πόσο θα κόστιζε ένας κοινός φακός laser; [*Υπόδειξη*: (α) Τα μποζόνια δεν υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli. Έτσι, τα ηλεκτρόνια θα είχαν την τάση να συσσωρεύονται στη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη, δηλαδή στην πρώτη υποστοιβάδα. Ποια θα ήταν τότε η δομή του ατόμου; Θα υπήρχαν χημικές αντιδράσεις; (β) Μια ακτίνα laser είναι ένα τεράστιο σύστημα *όμοιων* φωτονίων, δηλαδή φωτονίων που βρίσκονται στην ίδια (περίπου) κβαντική κατάσταση. Θα ήταν κάτι τέτοιο εφικτό αν τα φωτόνια υπάκουαν στην αρχή του Pauli;]
5. Να οριστούν οι έννοιες *ηλεκτρονική πυκνότητα* και *ενεργειακή πυκνότητα* για ένα σύστημα ηλεκτρονίων. Ποια σχέση συνδέει τις δύο αυτές πυκνότητες; Γιατί η ενεργειακή πυκνότητα δεν μπορεί να υπερβαίνει την *πυκνότητα καταστάσεων*;
6. Να δοθεί η γενική έκφραση της πυκνότητας καταστάσεων $N(E)$ για το σύστημα των ελεύθερων ηλεκτρονίων ενός μετάλλου, καθώς και η έκφραση της $N(E)$ για τα ηλεκτρόνια σθένους ενός καθαρού ημιαγωγού.
7. Να οριστεί η έννοια της συνάρτησης πιθανότητας $f(E)$ για τα ηλεκτρόνια ενός συστήματος. Να δοθεί η έκφραση των Fermi-Dirac για το $f(E)$ και να περιγραφεί η φυσική σημασία της ενέργειας Fermi E_F . Να εξαχθεί η αντίστοιχη έκφραση της συνάρτησης πιθανότητας $f_p(E)$ για τις οπές σε έναν ημιαγωγό. Ποια είναι η φυσική της σημασία;
8. Να εξαχθεί η έκφραση της ενέργειας Fermi E_F για ένα μέταλλο. Ποια είναι η φυσική σημασία της E_F στην περίπτωση αυτή; Ποια διαφορά παρατηρούμε σε σύγκριση με την κλασική θεωρία των ιδανικών αερίων;
9. Πού τοποθετείται στο ενεργειακό διάγραμμα η στάθμη Fermi E_F ενός καθαρού ημιαγωγού; Θα πρέπει να μας ενοχλεί η παρουσία της στάθμης αυτής μέσα στην απαγορευμένη ζώνη; Δείξτε ότι η θέση της στάθμης στο ενεργειακό διάγραμμα οδηγεί σε αποδεκτά φυσικά συμπεράσματα, εξετάζοντας ξεχωριστά τις περιπτώσεις $T=0$ και $T>0$. Πού τοποθετείται ενεργειακά η στάθμη Fermi ενός ημιαγωγού προσμείξεως τύπου n ή τύπου p ;

10. Θεωρούμε κρύσταλλο ημιαγωγού τύπου n . Περιγράψτε την τροποποίηση της στάθμης Fermi του συστήματος αν (α) προσθέσουμε επιπλέον άτομα δότη, (β) προσθέσουμε άτομα αποδέκτη, (γ) αυξήσουμε τη θερμοκρασία.

11. Θεωρούμε κρύσταλλο ημιαγωγού τύπου n . Θυμίζουμε ότι ο δότης εισάγει μια νέα ενεργειακή στάθμη E_D στην απαγορευμένη ζώνη, κάτω από τη ζώνη αγωγιμότητας. Σε απόλυτη θερμοκρασία $T \rightarrow 0$ η στάθμη E_D είναι κατειλημμένη από το 5^ο ηλεκτρόνιο σθένους του ατόμου του δότη (σε χαμηλές θερμοκρασίες τα άτομα του δότη δεν είναι ιονισμένα). Δείξτε ότι, στο όριο $T \rightarrow 0$ η στάθμη Fermi του συστήματος μετακινείται *πάνω* από την E_D . [Υπόδειξη: Θυμηθείτε τη φυσική σημασία της E_F για $T=0$.]

12. Η ενέργεια Fermi ενός μετάλλου είναι γνωστή και ίση με E_F . Η ευκινησία των ηλεκτρονίων στο μέταλλο είναι μ . Δείξτε ότι η ειδική αντίσταση του μετάλλου ισούται με

$$\rho = \frac{3}{2q\gamma\mu} E_F^{-3/2}$$

όπου q η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου και γ η σταθερά που ορίζεται στη σχέση (3.9). [Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα την ειδική αγωγιμότητα $\sigma = 1/\rho$ του μετάλλου.]

13. Θεωρούμε δύο μέταλλα M_1 και M_2 . Για τις ευκινησίες των ηλεκτρονίων και τις ενέργειες Fermi των μετάλλων γνωρίζουμε ότι $\mu_1 = 4\mu_2$ και $E_{F,2} = 4 E_{F,1}$. Η ειδική αντίσταση του M_2 είναι $\rho_2 = 1.5 \times 10^{-8} \Omega.m$. Να βρεθεί η ειδική αντίσταση ρ_1 του M_1 . [Απάντηση: $\rho_1 = 3 \times 10^{-8} \Omega.m$]

14. Η ηλεκτρονική πυκνότητα ενός μετάλλου είναι γνωστή και ίση με n . Οι εξωτερικές συνθήκες είναι τέτοιες που, σύμφωνα με την κλασική θεωρία, η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αέρα είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Να βρεθεί η *μέγιστη* κινητική ενέργεια των ελεύθερων ηλεκτρονίων του μετάλλου σύμφωνα με την κβαντική θεωρία.

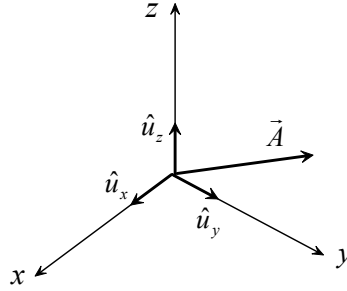
15. Θεωρούμε κρύσταλλο καθαρού ημιαγωγού. Στον άξονα των ενεργειών η στάθμη Fermi βρίσκεται $0.4 eV$ πάνω από την τελευταία συμπληρωμένη ενεργειακή ζώνη. Να βρεθεί το μέγιστο μήκος κύματος της ακτινοβολίας που μπορεί να απορροφήσει ο κρύσταλλος. Δίδονται: $h = 6.63 \times 10^{-34} J.s$, $c = 3 \times 10^8 m/s$, $1 eV = 1.6 \times 10^{-19} J$. [Απάντηση: $\lambda_{max} = 15.54 \times 10^{-7} m$]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΕΔΙΩΝ

4.1 Διανυσματικά Πεδία και Διανυσματικοί Τελεστές

Θεωρούμε τον συνήθη Ευκλείδειο χώρο \mathbf{R}^3 με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) . Καλούμε $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$ τα μοναδιαία διανύσματα¹ στις κατευθύνσεις των αντίστοιχων αξόνων:



Ένα διάνυσμα \vec{A} στο χώρο αυτό γράφεται

$$\vec{A} = A_x \hat{u}_x + A_y \hat{u}_y + A_z \hat{u}_z \equiv (A_x, A_y, A_z) \quad (4.1)$$

όπου A_x, A_y, A_z οι ορθογώνιες συνιστώσες του \vec{A} . Το μέτρο του διανύσματος \vec{A} ορίζεται

$$|\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (4.2)$$

Έστω $\vec{B} \equiv (B_x, B_y, B_z)$ ένα δεύτερο διάνυσμα, και έστω θ η γωνία ανάμεσα στα \vec{A} και \vec{B} . Το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο των \vec{A} και \vec{B} γράφονται, αντίστοιχα,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad (4.3)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{u}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{u}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{u}_z = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \quad (4.4)$$

¹ Ο συνήθης συμβολισμός $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ πρέπει να αποφεύγεται στον Ηλεκτρομαγνητισμό γιατί μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση (το i εμφανίζεται σε μιγαδικές παραστάσεις, ενώ το \vec{k} παριστά κυματοδιάνυσμα).

Δοθέντος ενός διανύσματος \vec{A} , το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{u} στην κατεύθυνση του \vec{A} μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \equiv \left(\frac{A_x}{|\vec{A}|}, \frac{A_y}{|\vec{A}|}, \frac{A_z}{|\vec{A}|} \right) \quad (4.5)$$

(δείξτε αναλυτικά ότι $|\hat{u}|=1$).

Άσκηση: Δείξτε ότι $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$ και ότι

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

Ένα βαθμωτό (μονόμετρο) πεδίο στον \mathbf{R}^3 είναι μια απεικόνιση $\Phi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$. Τα βαθμωτά πεδία παρίστανται σαν συναρτήσεις $\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z)$, όπου

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z \equiv (x, y, z) \quad (4.7)$$

το διάνυσμα θέσης ενός σημείου τού \mathbf{R}^3 ως προς την αρχή των συντεταγμένων του χώρου.

Ένα διανυσματικό πεδίο στον \mathbf{R}^3 είναι μια απεικόνιση $\vec{A}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Τα πεδία αυτά παρίστανται σαν συναρτήσεις της μορφής

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{u}_x + A_y(x, y, z)\hat{u}_y + A_z(x, y, z)\hat{u}_z \\ &\equiv (A_x, A_y, A_z) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Έστω $\Phi(x, y, z)$ ένα βαθμωτό πεδίο. Όταν τα x, y, z μεταβάλλονται κατά $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, αντίστοιχα, η τιμή της συνάρτησης Φ μεταβάλλεται κατά

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \Phi(x, y, z) = \Phi(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \Phi(\vec{r}) \quad (4.9)$$

όπου $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ και $\Delta\vec{r} \equiv (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Από την άλλη, το διαφορικό της Φ είναι

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz \quad (4.10)$$

όπου $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$. Γενικά, $d\Phi \neq \Delta\Phi$ (εκτός αν η συνάρτηση Φ είναι γραμμική). Εν τούτοις, για πολύ μικρές μεταβολές dx, dy, dz , μπορούμε να γράψουμε, προσεγγιστικά, $d\Phi \approx \Delta\Phi$.

Θεωρούμε το διανυσματικό τελεστή

$$\vec{\nabla} = \hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4.11)$$

Δοθείσης μιας συνάρτησης $\Phi(x, y, z)$, ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\text{grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{u}_z \equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (4.12)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η (4.10) γράφεται στη μορφή εσωτερικού γινομένου:

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz)$$

Θέτοντας $d\vec{r} \equiv (dx, dy, dz)$ και λαμβάνοντας υπόψη την (4.12), έχουμε:

$$\boxed{d\Phi = (\vec{\nabla} \Phi) \cdot d\vec{r}} \quad (4.13)$$

Η σχέση αυτή είναι γενίκευση της γνώριμης σχέσης $df(x) = f'(x) dx$.

Καλούμε θ τη γωνία ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{\nabla} \Phi$ και $d\vec{r}$, και θέτουμε

$$d\vec{r} = |d\vec{r}| \hat{u} = (dl) \hat{u}$$

όπου $dl = |d\vec{r}|$ και όπου \hat{u} το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $d\vec{r}$. Η (4.13) τότε γράφεται:

$$d\Phi = (dl) \hat{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi = |\vec{\nabla} \Phi| dl \cos \theta \quad (4.14)$$

Από την (4.14) μπορούμε να ορίσουμε το ρυθμό μεταβολής τής Φ στην κατεύθυνση του \hat{u} :

$$\frac{d\Phi}{dl} = \hat{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi = |\vec{\nabla} \Phi| \cos \theta \quad (4.15)$$

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι μέγιστος όταν $\theta=0$, δηλαδή όταν η μετατόπιση $d\vec{r}$ είναι στην κατεύθυνση του $\vec{\nabla} \Phi$. Έτσι,

το διάνυσμα $\text{grad } \Phi$ προσδιορίζει την κατεύθυνση στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης Φ είναι μέγιστος.

Αντίθετα, ο ρυθμός μεταβολής τής Φ μηδενίζεται όταν $\theta=\pi/2$, δηλαδή όταν το $d\vec{r}$ είναι κάθετο στο $\vec{\nabla} \Phi$. Αυτό μας οδηγεί στην εξής γεωμετρική πρόταση:

Το διάνυσμα $\text{grad } \Phi$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $\Phi(x,y,z) = \text{σταθερό}$, σε κάθε σημείο της.

Πράγματι, έστω $d\vec{r}$ ένα απειροστό διάνυσμα εφαπτόμενο στην επιφάνεια αυτή σε κάποιο σημείο της. Στην κατεύθυνση του $d\vec{r}$, $\Phi(x,y,z)=\text{σταθ.} \Rightarrow d\Phi = (\vec{\nabla} \Phi) \cdot d\vec{r} = 0$, έτσι ώστε $\vec{\nabla} \Phi \perp d\vec{r}$. Η συνθήκη αυτή ισχύει για κάθε $d\vec{r}$ εφαπτόμενο στην επιφάνεια $\Phi(x,y,z)=\text{σταθ.}$ Άρα, το $\vec{\nabla} \Phi$ είναι κάθετο σε κάθε σημείο της επιφάνειας.

Δοθέντος ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{A}(\vec{r}) \equiv (A_x, A_y, A_z)$, ορίζουμε το *βαθμωτό* πεδίο $\text{div } \vec{A}$ και το *διανυσματικό* πεδίο $\text{rot } \vec{A}$ με τις σχέσεις

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (4.16)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{u}_z \quad (4.17)$$

Η (4.17) γράφεται, συμβολικά,²

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (4.18)$$

Όπως αποδεικνύεται, ισχύουν οι εξής σημαντικές ταυτότητες:

$$\text{rot}(\text{grad } \Phi) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0 \quad (4.19)$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (4.20)$$

Επίσης,

$$\text{div}(\text{grad } \Phi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi \quad (4.21)$$

όπου εισάγαμε τον *τελεστή του Laplace*

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.22)$$

² Προσοχή όμως στην ανάπτυξη της ορίζουσας, γιατί, π.χ., $(\partial/\partial x)A_y \neq A_y(\partial/\partial x)$! Κατά κανόνα, ο διαφορικός τελεστής τοποθετείται *αριστερά* από την παραγωγιζόμενη συνάρτηση.

4.2 Ολοκληρωτικά Θεωρήματα

Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο να κάνουμε ένα σχόλιο για τις περιοχές του χώρου. Κάποιες περιοχές εμφανίζονται να έχουν όριο, ενώ κάποιες άλλες δεν έχουν. Για παράδειγμα, μια σφαιρική περιοχή στο χώρο έχει σαν όριο την επιφάνειά της, ενώ ένας κυκλικός δίσκος στο επίπεδο έχει όριο την περιφέρειά του. Σε κάθε περίπτωση, το όριο μιας περιοχής n διαστάσεων είναι μια περιοχή $(n-1)$ διαστάσεων. Όμως, ποιο είναι το όριο μιας σφαιρικής επιφάνειας ή ενός κύκλου; Κανένα! Ένα σημαντικό θεώρημα της Τοπολογίας μάς πληροφορεί ότι *το όριο μιας περιοχής είναι περιοχή χωρίς όριο*.

Στη Διαφορική Γεωμετρία υπάρχει ένα βασικό θεώρημα, το *θεώρημα του Stokes*, το οποίο σε πολύ γενικές γραμμές λέει το εξής:

Το ολοκλήρωμα της «παραγώγου» ενός πεδίου, μέσα σε ένα χώρο που έχει όριο, ισούται με το ολοκλήρωμα του ίδιου του πεδίου πάνω στο όριο του χώρου.

Συμβολικά, γράφουμε:

$$\int_{\chi\Omega\text{Ρ}\Omega\text{Σ}} \{\text{Παράγωγος Πεδίου}\} = \int_{\text{ΟΡΙΟ ΧΩΡΟΥ}} \{\text{Πεδίο}\} \quad (4.23)$$

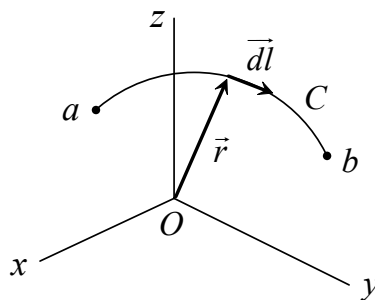
Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1) Το όριο ενός ευθύγραμμου τμήματος ab είναι τα σημεία a και b . Έστω συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται στο τμήμα ab . Η (4.23) τότε γράφεται:

$$\int_a^b f'(x) dx = \int_a^b \frac{df}{dx} dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a) \quad (4.24)$$

που είναι ο γνωστός σας τύπος των Newton-Leibniz.

2) Έστω C μια καμπύλη στον \mathbf{R}^3 , από το σημείο a ως το σημείο b . Θεωρούμε μια απειροστή μετατόπιση $\vec{dl} \equiv (dx, dy, dz)$ πάνω στη C , προσανατολισμένη στη φορά διαγραφής της καμπύλης (από a προς b):



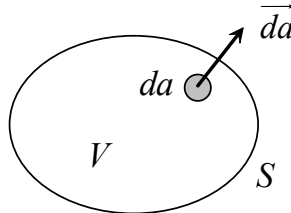
Αν $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z)$ είναι ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο στον \mathbf{R}^3 , το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_a^b \vec{A} \cdot \vec{dl}$ πάνω στη C θα εξαρτάται, γενικά, από την εκλογή της ίδιας της καμπύλης C που ενώνει τα a και b (μια διαφορετική καμπύλη από a ως b θα δώσει μια διαφορετική τιμή για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα). Επιπλέον, για μια κλειστή καμπύλη C (όπου τα σημεία a και b συμπίπτουν) το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl}$ θα είναι, γενικά, διάφορο του μηδενός. Θεωρούμε τώρα την ειδική περίπτωση όπου το πεδίο \vec{A} είναι το *grad* κάποιας συνάρτησης $\Phi(x, y, z)$: $\vec{A} = \vec{\nabla} \Phi$. Ισχύουν τότε τα εξής:

$$\int_a^b (\vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{dl} = \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (4.25)$$

$$\oint_C (\vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{dl} = 0 \quad (4.26)$$

όπου λάβαμε υπόψη την (4.13) (το \vec{dl} παίζει εδώ το ρόλο του $d\vec{r}$, αφού και τα δύο παριστούν μια απειροστή μετατόπιση στο χώρο). Παρατηρούμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (4.25) εξαρτάται μόνο από τα οριακά σημεία a και b και είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή C που τα ενώνει.

3) Έστω όγκος V που περικλείεται από επιφάνεια S . Λέμε ότι η κλειστή επιφάνεια S αποτελεί το όριο του όγκου V . Καλούμε dv ένα στοιχείο του όγκου V και da ένα στοιχείο εμβαδού της S . Θεωρούμε ένα διάνυσμα \vec{da} μέτρου da , κάθετο στην επιφάνεια S στη θέση όπου βρίσκεται το da , με φορά προς το εξωτερικό της S :

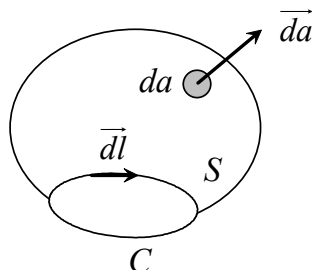


Έστω διανυσματικό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$ που ορίζεται σε κάθε σημείο του όγκου V και σε κάθε σημείο της επιφάνειας S . Σύμφωνα με το *θεώρημα του Gauss*,

$$\boxed{\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dv = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{da}} \quad (4.27)$$

Ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα της μορφής $\int_S \vec{A} \cdot \vec{da}$ (όπου η επιφάνεια S μπορεί να είναι ανοιχτή ή κλειστή) καλείται *ροή του πεδίου \vec{A} δια μέσου της S* .

4) Έστω ανοιχτή επιφάνεια S της οποίας το περίγραμμα (όριο) είναι κλειστή καμπύλη C . Εκλέγουμε μια φορά διαγραφής της καμπύλης και καλούμε \vec{dl} ένα στοιχείο της C προσανατολισμένο κατά τη φορά διαγραφής της. Θεωρούμε επίσης ένα στοιχείο \vec{da} της επιφάνειας S , κάθετο στην S :



Θα μπορούσαμε να πάρουμε την αντίθετη φορά για το \vec{da} , αρκεί να αντιστρέψαμε ταυτόχρονα και τη φορά τού \vec{dl} (επειδή η S είναι ανοιχτή, δεν έχει νόημα να λέμε ότι το \vec{da} είναι «προς τα έξω» ή «προς τα μέσα»). Η σχετική φορά των \vec{dl} και \vec{da} είναι πάντα καθορισμένη σύμφωνα με τον «κανόνα του δεξιού χεριού»: Αν λυγίσουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού κατά τη φορά διαγραφής της καμπύλης C (η οποία φορά είναι σύμφωνη με αυτή του \vec{dl}), ο αντίχειρας θα δείξει προς την κατεύθυνση του \vec{da} . Αν τώρα $\vec{A}(\vec{r})$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται σε κάθε σημείο της S και σε κάθε σημείο της C , τότε, σύμφωνα με το (ειδικό) θεώρημα του Stokes,

$$\boxed{\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{da} = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl}} \quad (4.28)$$

4.3 Αστρόβιλα και Σωληνωτά Πεδία

Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$ λέγεται αστρόβιλο αν

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad (4.29)$$

Τότε, υπό κατάλληλες τοπολογικές προϋποθέσεις³ για την περιοχή του χώρου όπου ορίζεται το \vec{A} , υπάρχει συνάρτηση $\Phi(\vec{r})$ τέτοια ώστε

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \Phi \quad (4.30)$$

[Προσέξτε ότι τότε, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0$, λόγω της (4.19).] Επίσης, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός αστρόβιλου πεδίου εξαρτάται μόνο από τα όρια της καμπύλης (όχι από την ίδια την καμπύλη που τα συνδέει), ενώ το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου είναι μηδέν. Πράγματι:

$$\int_a^b \vec{A} \cdot \vec{dl} = \int_a^b (\vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{dl} = \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a), \text{ ανεξάρτητο του δρόμου } a \rightarrow b$$

Επιπλέον, λόγω της (4.29) και του θεωρήματος του Stokes (4.28), $\oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0$.

³ Ο χώρος όπου ορίζεται το \vec{A} πρέπει να είναι απλά συνεκτικός.

Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r})$ λέγεται *σωληνωτό* αν

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.31)$$

Τότε, υπάρχει διανυσματική συνάρτηση $\vec{A}(\vec{r})$ τέτοια ώστε

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (4.32)$$

[Προσέξτε ότι τότε, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$, λόγω της (4.20).] Επίσης, το επιφανειακό ολοκλήρωμα (η *ροή*) ενός σωληνωτού πεδίου εξαρτάται μόνο από το *όριο* της επιφάνειας (όχι από την ίδια την επιφάνεια), ενώ το *κλειστό* επιφανειακό ολοκλήρωμα του πεδίου είναι μηδέν. Πράγματι, έστω *ανοιχτή* επιφάνεια S που έχει σαν όριο την κλειστή καμπύλη C . Χρησιμοποιώντας την (4.32) και το θεώρημα του Stokes (4.28),

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{da} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{da} = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (4.33)$$

Άρα,

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{da} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{da} \quad \text{όταν οι } S_1 \text{ και } S_2 \text{ έχουν κοινό όριο } C \quad (4.34)$$

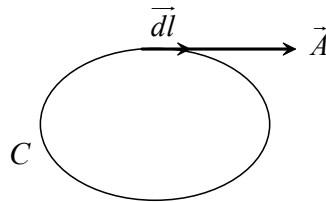
Επιπλέον, αν S είναι μια *κλειστή* επιφάνεια που οριοθετεί τον όγκο V , η (4.31) και το θεώρημα του Gauss (4.27) δίνουν

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{da} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dv = 0 \quad (4.35)$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

- Ένα αστρόβιλο πεδίο δεν μπορεί να έχει κλειστές δυναμικές γραμμές: οι δυναμικές γραμμές του πρέπει να είναι ανοιχτές.

Πράγματι, έστω ότι το αστρόβιλο πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$ έχει μια κλειστή δυναμική γραμμή C :



Το πεδίο \vec{A} είναι εφαπτόμενο στη γραμμή σε κάθε σημείο της. Αν \vec{dl} είναι ένα απειροστό τμήμα της γραμμής, μπορούμε να θεωρήσουμε οριακά ότι το \vec{dl} είναι εφαπτόμενο στη γραμμή, άρα συγγραμμικό με το \vec{A} . Έτσι,

$$\oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = \oint_C |\vec{A}| |\vec{dl}| > 0$$

πράγμα αδύνατο, αφού $\oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0$ για ένα αστρόβιλο πεδίο.

- *Οι δυναμικές γραμμές ενός σωληνωτού πεδίου δεν μπορεί να έχουν αρχή ή τέλος σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου: είτε είναι κλειστές, είτε έρχονται από το άπειρο και καταλήγουν πάλι στο άπειρο.*

Πράγματι, έστω ότι ένα σύνολο από δυναμικές γραμμές του σωληνωτού πεδίου \vec{B} ξεκινούν από ένα σημείο του χώρου. Θεωρούμε κλειστή επιφάνεια S που περιβάλλει το σημείο. Τότε, η ροή του πεδίου δια μέσου της S (ανάλογη, συμβατικά, με τον αριθμό των δυναμικών γραμμών του \vec{B} που διαπερνούν την S) είναι

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{da} \neq 0$$

πράγμα αδύνατο, αφού αντίκειται στην (4.35).

Φυσική ερμηνεία:

- *Ένα χρονικά αμετάβλητο, αστρόβιλο πεδίο δυνάμεων είναι συντηρητικό*

(αυτό θα το εξηγήσουμε στην επόμενη παράγραφο).

- *Ένα σωληνωτό πεδίο δεν μπορεί να έχει μεμονωμένες σημειακές πηγές (πόλους).*

Πράγματι, το ολοκλήρωμα $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{da}$ είναι ένα μέτρο του πλήθους των πηγών ενός πεδίου \vec{B} που βρίσκονται στο εσωτερικό μιας κλειστής επιφάνειας S (οι δυναμικές γραμμές του \vec{B} ξεκινούν από, ή καταλήγουν σε αυτές τις πηγές). Για ένα σωληνωτό πεδίο, όμως, το ολοκλήρωμα αυτό μηδενίζεται για κάθε κλειστή επιφάνεια S .

4.4 Συντηρητικά Πεδία Δυνάμεων

Ένα *στατικό* (χρονικά αμετάβλητο) πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r})$ καλείται *συντηρητικό* όταν το παραγόμενο έργο W_{AB} κατά τη μετακίνηση ενός υποθέματος από ένα σημείο A σε ένα άλλο σημείο B του πεδίου είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που συνδέει τα δύο σημεία. Ισοδύναμα, το έργο κατά τη μετακίνηση του υποθέματος πάνω σε μια κλειστή τροχιά είναι μηδέν:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} \text{ ανεξάρτητο του δρόμου} \iff \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0 \quad (4.36)$$

Έστω S μια ανοιχτή επιφάνεια που έχει σαν όριο την κλειστή τροχιά C . Από το θεώρημα του Stokes και την (4.36) έχουμε ότι

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{da} = 0$$

Η σχέση αυτή ισχύει για *κάθε* ανοιχτή επιφάνεια που έχει σαν όριο την καμπύλη C . Άρα θα πρέπει

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0} \quad (4.37)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων είναι αστρόβιλο.

Από την (4.36) επίσης προκύπτει ότι υπάρχει κάποια συνάρτηση τέτοια ώστε το $\vec{F}(\vec{r})$ να είναι το *grad* της συνάρτησης αυτής. Γράφουμε:

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}U} \quad (4.38)$$

Η συνάρτηση $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$ καλείται *δυναμική ενέργεια* του υποθέματος στο σημείο $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ του πεδίου. (Το αρνητικό πρόσημο στην (4.38) είναι θέμα σύμβασης και δεν έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία.)

Το έργο W_{AB} γράφεται:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B (\vec{\nabla}U) \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dU \Rightarrow$$

$$W_{AB} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \equiv U_A - U_B \quad (4.39)$$

Τώρα, από το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (*ΘΜΚΕ*) έχουμε ότι

$$W_{AB} = E_{k,B} - E_{k,A} \quad (4.40)$$

όπου E_k η κινητική ενέργεια του υποθέματος. Συνδυάζοντας τις (4.39) και (4.40) δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι⁴

$$E_{k,A} + U_A = E_{k,B} + U_B \quad (4.41)$$

Το άθροισμα $(E_k + U)$ παριστά την *ολική μηχανική ενέργεια* του υποθέματος. Η σχέση (4.41) τότε εκφράζει την *αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας*:

Σε ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων η ολική μηχανική ενέργεια ενός υποθέματος μένει σταθερή κατά τη μετακίνηση του υποθέματος μέσα στο πεδίο.

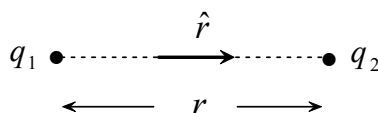
⁴ Προσέξτε ότι, αν δεν είχαμε βάλει το αρνητικό πρόσημο στην (4.38) θα το συναντούσαμε αναπόφευκτα στην (4.41). Δηλαδή, θα έπρεπε να ορίσουμε τη μηχανική ενέργεια σαν *διαφορά* και όχι σαν *άθροισμα*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΤΑΤΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

5.1 Νόμος του Coulomb και Ηλεκτρικό Πεδίο

Θεωρούμε δύο ηλεκτρικά φορτία q_1, q_2 που απέχουν στιγμιαία μεταξύ τους απόσταση r . Έστω \hat{r} μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το q_1 προς το q_2 :



Καλούμε \vec{F}_{12} τη δύναμη που ασκείται από το q_1 στο q_2 . Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb, η δύναμη αυτή (στο σύστημα μονάδων S.I.) ισούται με

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (5.1)$$

όπου $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$. Η δύναμη είναι ελκτική αν τα φορτία είναι ετερόσημα ($q_1 q_2 < 0$) και απωστική αν είναι ομόσημα ($q_1 q_2 > 0$). Σημειώνουμε ότι το φορτίο ενός ηλεκτρονίου ισούται με $-q_e$, όπου $q_e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Λέμε ότι σε κάποια περιοχή του χώρου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο αν κάθε ακίνητο δοκιμαστικό φορτίο q_0 στην περιοχή αυτή δέχεται δύναμη η οποία, γενικά, μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο της περιοχής. Έστω \vec{F} η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q_0 σε κάποιο σημείο. Ορίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό σαν το πηλίκο

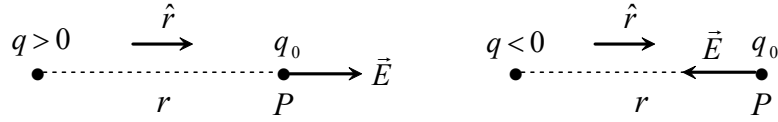
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (5.2)$$

Η ένταση εκφράζεται στο S.I. σε N/C , όπως είναι φανερό από τον παραπάνω ορισμό.

Το πεδίο \vec{E} που ασκεί τη δύναμη \vec{F} στο δοκιμαστικό φορτίο q_0 παράγεται από κάποιο σύστημα φορτίων που δεν περιλαμβάνει το q_0 . Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb, η δύναμη που ασκείται στο q_0 είναι ανάλογη του ίδιου του q_0 . Άρα, το πηλίκο \vec{F}/q_0 είναι τελικά ανεξάρτητο από το q_0 . Δηλαδή, το διάνυσμα \vec{E} που ορίζεται στην (5.2) εκφράζει μια ιδιότητα του ηλεκτρικού πεδίου στο θεωρούμενο σημείο και δεν εξαρτάται από το δοκιμαστικό φορτίο που χρησιμοποιούμε για να το προσδιορίσουμε. Είναι επίσης φανερό ότι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σημείο ταυτίζεται με την κατεύθυνση της δύναμης που δέχεται ένα θετικό φορτίο στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα: Ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε σημειακό φορτίο q

Θεωρούμε ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο q_0 στο σημείο P του χώρου, σε απόσταση r από το q . Καλούμε \hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το q προς το q_0 . Σχεδιάζουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $q > 0$ και $q < 0$:



Σύμφωνα με την (5.1), η δύναμη που ασκείται στο q_0 από το q είναι

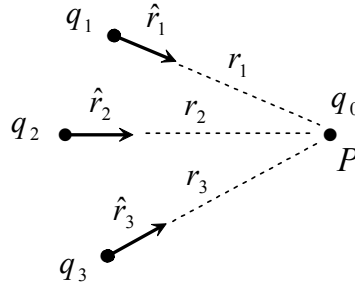
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \hat{r}$$

Άρα, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P είναι $\vec{E} = \vec{F} / q_0 \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}} \quad (5.3)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο της μορφής (5.3) ονομάζεται *πεδίο Coulomb*.

Πιο γενικά, θεωρούμε ένα πλήθος σημειακών φορτίων q_1, q_2, \dots , και ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 στο σημείο P . Καλούμε r_1, r_2, \dots , τις αποστάσεις τού q_0 από τα αντίστοιχα φορτία:



Η ολική δύναμη στο q_0 είναι

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Άρα, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P είναι $\vec{E} = \vec{F} / q_0 \Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = \sum_i \vec{E}_i \quad (5.4)$$

όπου \vec{E}_i το πεδίο Coulomb (5.3) που οφείλεται στο q_i . Παρατηρούμε ότι ισχύει η αρχή της επαλληλίας, σύμφωνα με την οποία

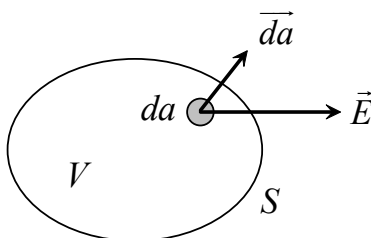
το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε ένα πλήθος σημειακών φορτίων ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων που δημιουργούνται από κάθε φορτίο χωριστά.

Ένα ηλεκτρικό πεδίο λέγεται *στατικό* αν το διάνυσμα της έντασης \vec{E} είναι χρονικά σταθερό σε κάθε σημείο του πεδίου (μπορεί όμως να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο). Για ένα στατικό πεδίο, δηλαδή, ισχύει ότι $\partial\vec{E}/\partial t = 0$, έτσι ώστε $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$. Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από ένα σύστημα ακίνητων φορτίων είναι στατικό. Το χρονικά αμετάβλητο ηλεκτρικό πεδίο καλείται *ηλεκτροστατικό*.

Ένα ηλεκτρικό πεδίο καλείται *ομογενές* αν το διάνυσμα της έντασής του είναι σταθερό στο χώρο (δηλαδή, η ένταση έχει την ίδια διανυσματική τιμή σε όλα τα σημεία του πεδίου).

5.2 Νόμος του Gauss

Μια άμεση συνέπεια του νόμου του Coulomb είναι ο νόμος του Gauss. Από μαθηματική άποψη αντιστοιχεί στην πρώτη από τις εξισώσεις του Maxwell. Για τη διατύπωση του νόμου θεωρούμε καταρχήν έναν όγκο V που περικλείεται από κλειστή επιφάνεια S . Ένα στοιχείο τής S παρίσταται σαν διάνυσμα \vec{da} κάθετο στην S και με φορά προς το εξωτερικό της, με μέτρο $|\vec{da}| = da$ (στοιχειώδες εμβαδόν):



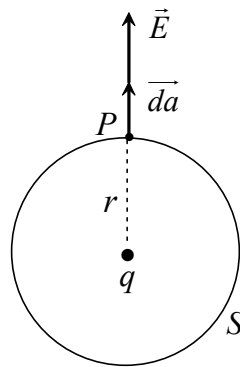
Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια S βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(\vec{r})$. Το πεδίο αυτό οφείλει την ύπαρξή του σε κάποιο σύστημα φορτίων που είναι κατανομημένα στο χώρο, μέσα και έξω από την S . Καλούμε Q_{in} το ολικό φορτίο που περικλείεται από την S . Επίσης, ορίζουμε σαν ροή του πεδίου \vec{E} δια μέσου της S το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da}$. Σύμφωνα με το νόμο του Gauss, η ροή του πεδίου εξαρτάται μόνο από το εσωτερικό φορτίο Q_{in} :

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}} \quad (5.5)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να κάνουμε μια σημαντική επισήμανση: Παρόλο που στο δεξί μέλος τής (5.5) εμφανίζεται το ολικό φορτίο στο εσωτερικό τής S , το \vec{E} στο αριστερό μέλος παριστά το ολικό ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε όλα τα φορτία,

εσωτερικά και εξωτερικά ως προς την S ! Όμως, τα εξωτερικά φορτία δεν συνεισφέρουν στη ροή δια μέσου της κλειστής επιφάνειας S . Αυτό εξηγείται ως εξής: Η ροή ενός ηλεκτρικού πεδίου δια μέσου της S είναι συμβατικά ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών του πεδίου που διαπερνούν την S . Επιπλέον, οι δυναμικές γραμμές του πεδίου Coulomb ενός σημειακού φορτίου ξεκινούν από το φορτίο ή καταλήγουν σε αυτό (ανάλογα με το αν το φορτίο είναι θετικό ή αρνητικό, αντίστοιχα). Τώρα, για το πεδίο ενός φορτίου εξωτερικού ως προς την S , κάθε δυναμική γραμμή που τέμνει την επιφάνεια την διαπερνά δύο φορές, μία φορά εισερχόμενη και μία εξερχόμενη. Έτσι, όση ροή του πεδίου των εξωτερικών φορτίων εισέρχεται στην επιφάνεια, τόση και εξέρχεται από αυτή, με αποτέλεσμα η συνολική ροή που διαπερνά την κλειστή επιφάνεια να είναι μηδέν. Αντίθετα, οι δυναμικές γραμμές του πεδίου ενός εσωτερικού φορτίου τέμνουν την επιφάνεια μόνο μία φορά, κι έτσι η ροή του πεδίου δια μέσου της επιφάνειας είναι μη-μηδενική.

Είπαμε νωρίτερα ότι ο νόμος του Gauss είναι άμεση συνέπεια του νόμου του Coulomb. Αυτό δεν είναι εύκολο να το δείξουμε, είναι όμως εύκολο να δείξουμε το αντίστροφο, ότι δηλαδή ο νόμος του Gauss οδηγεί στο νόμο του Coulomb. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα σημειακό φορτίο q τοποθετημένο στο κέντρο μιας νοητής σφαιρικής επιφάνειας S ακτίνας r . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το q είναι θετικό:



Έστω P τυχαίο σημείο της σφαιρικής επιφάνειας. Λόγω συμμετρίας του προβλήματος, σε κάθε τέτοιο σημείο το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} που παράγεται από το q θα έχει κατεύθυνση κάθετη στην S , ίδια δηλαδή με την κατεύθυνση του στοιχείου επιφάνειας \vec{da} . Επιπλέον, το μέτρο $E=|\vec{E}|$ του ηλεκτρικού πεδίου θα έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της επιφάνειας. Εφαρμόζοντας την (5.5) με $Q_{in}=q$, έχουμε:

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \oint_S |\vec{E}| |\vec{da}| = |\vec{E}| \oint_S da = E(4\pi r^2) \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Αν \hat{r} είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην S στο σημείο P με κατεύθυνση προς το εξωτερικό της S (ομόρροπο δηλαδή με το \vec{da}), γράφουμε:

$$\vec{E} = E\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

που είναι ακριβώς η σχέση (5.3) για το πεδίο Coulomb. Τέλος, αν q_0 είναι ένα δοκιμαστικό φορτίο στο σημείο P , η δύναμη που ασκεί το πεδίο \vec{E} στο q_0 είναι

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \hat{r}$$

Η παραπάνω σχέση δεν είναι άλλη από το νόμο του Coulomb.

Από το προηγούμενο απλό παράδειγμα γίνεται φανερή η χρησιμότητα του νόμου του Gauss στη μορφή (5.5) όταν το πρόβλημα έχει υψηλό βαθμό συμμετρίας. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μπορούμε να επιλέξουμε την κλειστή επιφάνεια S έτσι ώστε το ηλεκτροστατικό πεδίο να έχει σταθερή τιμή E πάνω στην S , κάτι που μας επιτρέπει να βγάλουμε το E έξω από το ολοκλήρωμα στην (5.5). Δυστυχώς όμως τα προβλήματα με συμμετρία αποτελούν την εξαίρεση μάλλον παρά τον κανόνα στον Ηλεκτρισμό! Γι' αυτό θα δοκιμάσουμε να μετατρέψουμε την (5.5) σε μια ισοδύναμη εξίσωση όπου το άγνωστο πεδίο θα είναι πίσω από το σύμβολο μιας παραγώγου αντί ενός ολοκληρώματος. Αναζητούμε δηλαδή μια διαφορική εξίσωση ισοδύναμη με το νόμο του Gauss.

Όπως έχουμε πει, ένα ηλεκτροστατικό πεδίο μπορεί να παραχθεί από ένα σύστημα φορτίων που διατηρούν σταθερές θέσεις στο χώρο. Τα φορτία τα φανταζόμαστε συνήθως σαν μεμονωμένες σημειακές ποσότητες, πράγμα που φανερώνει και η μορφή των εξισώσεων (5.1), (5.3) και (5.4). Στη φυσική πραγματικότητα, όμως, συχνότερα συναντούμε *συνεχείς κατανομές φορτίου* αντί για κατανομές μεμονωμένων σημειακών φορτίων. Αυτό μας οδηγεί στον ορισμό μιας νέας έννοιας, της *πυκνότητας φορτίου*: Έστω dn ένας στοιχειώδης όγκος σε κάποιο σημείο P του χώρου, στη θέση με συντεταγμένες (x,y,z) . Καλούμε dq το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο που περικλείεται στον όγκο dn . Η *πυκνότητα φορτίου* στο σημείο P είναι

$$\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z) = \frac{dq}{dn} \quad (5.6)$$

όπου \vec{r} είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου P . Για μεταβλητό P , η πυκνότητα $\rho(\vec{r})$ είναι μια μονόμετρη συνάρτηση. Προσέξτε ότι, στην περίπτωση ενός *σημειακού* φορτίου στο P , η τιμή της συνάρτησης αυτής είναι *άπειρη* αφού $dn=0$ ενώ $dq \neq 0$. Έτσι, δεν χρησιμοποιούμε την έννοια της πυκνότητας φορτίου στην περίπτωση των σημειακών φορτίων.¹ Το ολικό φορτίο μέσα σε έναν όγκο V ισούται με

$$Q_{in} = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}) dn \quad (5.7)$$

Επιστρέφουμε στο νόμο του Gauss (5.5). Με χρήση του ολοκληρωτικού θεωρήματος του Gauss (4.27), το αριστερό μέλος της (5.5) γράφεται

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dn$$

Αντικαθιστώντας το Q_{in} στο δεξί μέλος με την έκφραση (5.7), έχουμε:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dn = \int_V \frac{1}{\epsilon_0} \rho dn$$

Για να ισχύει η ισότητα αυτή για *αυθαίρετο* όγκο V μέσα στο πεδίο θα πρέπει οι συναρτήσεις που ολοκληρώνονται στα δύο μέλη να είναι μεταξύ τους ίσες:

¹ Κάτι τέτοιο απαιτεί τη χρήση μιας εξωτικής συνάρτησης, της «συνάρτησης δέλτα» του Dirac.

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (5.8)$$

Η σχέση (5.8) εκφράζει το νόμο του Gauss σε διαφορική μορφή. Συνδέει το *div* του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου με την πυκνότητα φορτίου στο σημείο αυτό.

Παρόλο που διατυπώσαμε το νόμο του Gauss (5.8) για την περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου, ο νόμος αυτός εξακολουθεί να ισχύει, όπως θα δούμε αργότερα, και για χρονικά-μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Αυτό δίνει τη δυνατότητα στην πυκνότητα φορτίου να πάρει τη γενικότερη μορφή $\rho(\vec{r}, t)$. Όπως θα δείξουμε τώρα,

σε μια περιοχή του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτροστατικό πεδίο, η κατανομή φορτίου είναι στατική (χρονικά αμετάβλητη).

Πράγματι, από την (5.8) έχουμε ότι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι για μια συνεχή συνάρτηση μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά των μερικών παραγώγων της. Στην περίπτωση τώρα ενός στατικού πεδίου \vec{E} , $\partial \vec{E} / \partial t = 0$ άρα $\partial \rho / \partial t = 0$. Δηλαδή, η κατανομή φορτίου ρ είναι στατική σε μια περιοχή όπου υφίσταται ηλεκτροστατικό πεδίο. [Το αντίστροφο δεν ισχύει: σε μια περιοχή με στατική κατανομή φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο είναι δυνατό να μεταβάλλεται χρονικά αν έξω από την περιοχή αυτή υπάρχει χρονικά-μεταβαλλόμενη κατανομή φορτίου.]

5.3 Ηλεκτρικό Δυναμικό

Ο νόμος του Gauss (5.8) είναι άμεση συνέπεια του νόμου του Coulomb (5.1) και συνδέει το *div* του ηλεκτρικού πεδίου με την κατανομή φορτίου στο χώρο. Από το νόμο του Coulomb προκύπτει επίσης μια σχέση για το *rot* του ηλεκτροστατικού πεδίου:

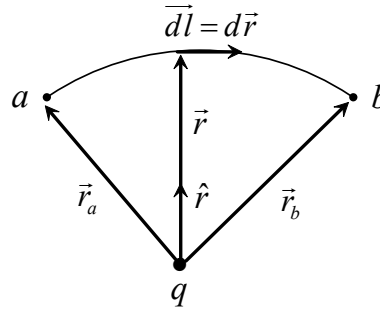
Πρόταση: Μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο $\vec{E}(\vec{r})$, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης που συνδέει τα σημεία a και b . Ισοδύναμα, για κάθε κλειστή διαδρομή C μέσα στο πεδίο,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (5.9)$$

Έπεται ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι αστρόβιλο:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0} \quad (5.10)$$

Απόδειξη: Θεωρούμε αρχικά το ηλεκτροστατικό πεδίο που παράγεται από ένα μοναδικό σημειακό φορτίο q . Μια καμπύλη που εκτείνεται από a έως b βρίσκεται μέσα στο πεδίο:



Θεωρούμε τυχαίο σημείο της καμπύλης με διάνυσμα θέσης \vec{r} ως προς το q . Η ένταση του πεδίου Coulomb στο σημείο αυτό είναι

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \equiv E(r) \hat{r} \quad (5.11)$$

όπου $r = |\vec{r}|$. Αλλά, $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$, οπότε

$$\vec{E} = \frac{E(r)}{r} \vec{r} \quad (5.12)$$

Έστω τώρα \vec{dl} ένα απειροστό, θετικά προσανατολισμένο τμήμα της καμπύλης. Το \vec{dl} παριστά μια απειροστή μεταβολή του διανύσματος θέσης \vec{r} κατά μήκος της καμπύλης: $\vec{dl} = d\vec{r}$. Έτσι,

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{E(r)}{r} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

Αλλά,

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2} d(|\vec{r}|^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = \frac{1}{2} (2rdr) \Rightarrow$$

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr \quad (5.13)$$

Έτσι,

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{E(r)}{r} r dr = E(r) dr$$

και

$$\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_a^b E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (5.14)$$

ανεξάρτητα από την καμπύλη που συνδέει τα σημεία a και b . Αν η καμπύλη είναι κλειστή, τα a και b ταυτίζονται οπότε το δεξί μέλος της (5.14) μηδενίζεται. Άρα, το κλειστό ολοκλήρωμα στη σχέση (5.9) είναι πράγματι μηδέν. Τώρα, αν έχουμε πολλά φορτία q_1, q_2, \dots , το ολικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο είναι το άθροισμα των πεδίων από κάθε φορτίο χωριστά (αρχή της επαλληλίας): $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$. Έτσι, και πάλι,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η σχέση (5.9) ισχύει για οποιαδήποτε *στατική* κατανομή φορτίου, άρα και για οποιοδήποτε *ηλεκτροστατικό* πεδίο.

Θεωρούμε τώρα μια ανοιχτή επιφάνεια S μέσα στο ηλεκτροστατικό πεδίο και καλούμε C την κλειστή καμπύλη που αποτελεί το περίγραμμα (όριο) της S . Συνδυάζοντας την (5.9) με το θεώρημα του Stokes (4.28), έχουμε:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται για *κάθε* επιφάνεια S που έχει σαν όριο μια δοσμένη κλειστή καμπύλη C . Για να ισχύει αυτό θα πρέπει η ίδια η συνάρτηση $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ που ολοκληρώνεται να είναι μηδέν, δηλαδή το πεδίο \vec{E} να είναι *αστρόβιλο*.

Σχόλιο: Ο νόμος του Gauss (5.8) είναι, όπως έχουμε πει, άμεση συνέπεια του νόμου του Coulomb. Από την άλλη, η σχέση (5.10) έχει να κάνει όχι τόσο με τον ίδιο το νόμο του Coulomb, όσο με το γεγονός ότι η δύναμη Coulomb (5.1) είναι *κεντρική*, δηλαδή έχει τη μορφή $\vec{F} = F(r)\hat{r}$. Αυτό αντανακλά και στη μορφή (5.11) του πεδίου Coulomb.

Επειδή το ηλεκτροστατικό πεδίο $\vec{E}(\vec{r})$ είναι αστρόβιλο, μπορεί να εκφραστεί σαν το *grad* κάποιας μονόμετρης συνάρτησης. Γράφουμε:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V} \quad (5.15)$$

(το αρνητικό πρόσημο είναι θέμα σύμβασης και δεν έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία). Η συνάρτηση $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$ καλείται *ηλεκτρικό δυναμικό*. Παρατηρούμε ότι, για δοσμένο πεδίο $\vec{E}(\vec{r})$ το δυναμικό V δεν ορίζεται μονοσήμαντα, αφού οι συναρτήσεις $V(\vec{r})$ και $V'(\vec{r}) = V(\vec{r}) + C$ (όπου C σταθερά) δίνουν την ίδια συνάρτηση $\vec{E}(\vec{r})$ όταν αντικατασταθούν στην (5.15). Αν $d\vec{l} = d\vec{r}$ είναι μια στοιχειώδης μετατόπιση μέσα στο πεδίο, έχουμε:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -(\vec{\nabla}V) \cdot d\vec{l} = -dV \Leftrightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (5.16)$$

Έτσι, κατά μήκος μιας καμπύλης από a έως b , $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b dV \Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_a - V_b} \quad (5.17)$$

Προσέξτε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (5.17) δεν εξαρτάται από την καμπύλη που συνδέει τα a και b . Η διαφορά $(V_a - V_b)$ καλείται *διαφορά δυναμικού* ή *τάση* μεταξύ των σημείων a και b . Η μονάδα δυναμικού στο S.I. καλείται *Volt* (V).

Παράδειγμα: Δυναμικό του πεδίου Coulomb

Το πεδίο Coulomb οφείλεται σε σημειακό φορτίο q και δίνεται από τη σχέση (5.11), ενώ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμά του από a έως b δίνεται από την (5.14). Συγκρίνοντας την τελευταία με την (5.17), έχουμε ότι

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right) = V_a - V_b$$

Παρατηρούμε ότι το δυναμικό σε ένα σημείο του πεδίου είναι της μορφής

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C$$

όπου r η απόσταση του σημείου από το q και C μια αυθαίρετη σταθερά. Κάνοντας την (αυθαίρετη) παραδοχή ότι $V=0$ στο άπειρο (δηλαδή, $V \rightarrow 0$ για $r \rightarrow \infty$), έχουμε ότι $C=0$ και

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}} \quad (5.18)$$

Παρατηρούμε ότι το δυναμικό του πεδίου Coulomb έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο το φορτίο q και ακτίνα r . Αν τώρα έχουμε ένα σύστημα φορτίων q_1, q_2, \dots , το δυναμικό σε σημείο P του πεδίου τους θα είναι το άθροισμα των δυναμικών του πεδίου του κάθε φορτίου χωριστά [αυτό προκύπτει από την αρχή της επαλληλίας για το ηλεκτρικό πεδίο, σε συνδυασμό με τη σχέση (5.15)]. Έτσι, αν r_i είναι η απόσταση του σημείου P από το φορτίο q_i ,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (5.19)$$

Όπως γνωρίζουμε, οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές είναι καμπύλες των οποίων ο προσανατολισμός συμπίπτει με την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} σε κάθε σημείο του χώρου. Έτσι, σε κάθε σημείο P το διάνυσμα \vec{E} είναι εφαπτόμενο στη μία και μοναδική δυναμική γραμμή που διέρχεται από το P . Επειδή το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι αστρόβιλο, οι δυναμικές γραμμές του δεν μπορεί να είναι κλειστές. Οι γραμμές ξεκινούν από θετικά ή καταλήγουν σε αρνητικά ηλεκτρικά φορτία.

Μια *ισοδυναμική επιφάνεια* είναι κάθε επιφάνεια πάνω στην οποία το ηλεκτρικό δυναμικό V έχει σταθερή τιμή (ίδια για όλα τα σημεία της επιφάνειας). Με άλλα λόγια, ισοδυναμική επιφάνεια είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία ισχύει ότι $V(x,y,z)=C$, όπου (x,y,z) οι συντεταγμένες ενός σημείου στο χώρο. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι μια *ισοδυναμική επιφάνεια τέμνει κάθετα τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές*. Πράγματι: Δοθέντος ότι $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ και ότι το πεδίο \vec{E} είναι εφαπτόμενο στις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, έπεται ότι οι γραμμές αυτές θα είναι στη διεύθυνση του $\vec{\nabla}V$ σε κάθε σημείο. Το $\vec{\nabla}V$, όμως, σε κάποιο σημείο είναι κάθετο στην επιφάνεια $V(x,y,z)=C$ που διέρχεται από το σημείο αυτό (βλ. Παρ.4.1). Στην ειδική περίπτωση του πεδίου Coulomb, το οποίο οφείλεται σε σημειακό φορτίο q , οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι σφαιρικές επιφάνειες με κέντρο το q , όπως προκύπτει από την (5.18). Οι δυναμικές γραμμές ξεκινούν ακτινικά από το q και τέμνουν κάθετα τις ισοδυναμικές επιφάνειες.

5.4 Εξισώσεις Poisson και Laplace

Όπως είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους, το ηλεκτροστατικό πεδίο $\vec{E}(\vec{r})$ υπακούει σε δύο θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.20)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (5.21)$$

Ο νόμος του Gauss (5.20) είναι άμεση συνέπεια του νόμου του Coulomb, ενώ η (5.21) μάς λέει ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι αστρόβιλο (αυτό, μεταξύ των άλλων, σημαίνει ότι το πεδίο αυτό δεν μπορεί να έχει κλειστές δυναμικές γραμμές). Καμία από τις εξισώσεις αυτές δεν προσδιορίζει από μόνη της το \vec{E} : σύμφωνα με το *θεώρημα του Helmholtz*, για τον μονοσήμαντο προσδιορισμό ενός στατικού διανυσματικού πεδίου απαιτείται η *ταυτόχρονη* γνώση του *div* και του *rot* του πεδίου, μαζί με κατάλληλες *οριακές συνθήκες* (για παράδειγμα, το \vec{E} πρέπει να τείνει στο μηδέν όσο απομακρυνόμαστε από την κατανομή φορτίου στην οποία οφείλεται το πεδίο).

Η (5.21) μάς δίνει μια μερική λύση του προβλήματος:

$$\exists V(\vec{r}): \vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (5.22)$$

όπου V το δυναμικό του πεδίου. Για να προσδιορίσουμε το V αντικαθιστούμε την (5.22) στην (5.20):

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (5.23)$$

όπου ∇^2 ο τελεστής του Laplace [βλ. εξ.(4.22)]. Η (5.23) καλείται *εξίσωση του Poisson*. Αν στην περιοχή που μελετούμε δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία (παρόλο που έξω από την περιοχή αυτή υπάρχουν φορτία, αυτά στα οποία οφείλεται το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή), τότε $\rho(\vec{r}) = 0$ για κάθε σημείο της περιοχής και η (5.23) ανάγεται στην *εξίσωση του Laplace*:

$$\boxed{\nabla^2 V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0} \quad (5.24)$$

Γενικά, για δοσμένη κατανομή φορτίου $\rho(\vec{r})$, η διαφορική εξίσωση (5.23) μαζί με κατάλληλες οριακές συνθήκες προσδιορίζει μονοσήμαντα το δυναμικό $V(\vec{r})$. Το ηλεκτρικό πεδίο τότε είναι το *-grad* του δυναμικού, σύμφωνα με την (5.22).

5.5 Δυναμική Ενέργεια Φορτίου σε Ηλεκτροστατικό Πεδίο

Στην Παρ.4.4 ορίσαμε την έννοια ενός συντηρητικού πεδίου δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r})$ και συμπεράναμε ότι ένα τέτοιο πεδίο είναι αστρόβιλο: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει συνάρτηση $U(\vec{r})$ τέτοια ώστε η δύναμη που ασκείται σε ένα υπόθεμα στο σημείο $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ του πεδίου να εκφράζεται σαν το αρνητικό του $grad$ τής U στο σημείο αυτό: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Η συνάρτηση U καλείται *δυναμική ενέργεια* του υποθέματος στο θεωρούμενο σημείο του πεδίου.

Θα δείξουμε τώρα ότι

το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητικό.

Πράγματι, έστω φορτίο q (υπόθεμα) στο σημείο \vec{r} . Η δύναμη στο q από το πεδίο \vec{E} στο σημείο αυτό είναι

$$\vec{F} = q\vec{E} = q(-\vec{\nabla}V) = -\vec{\nabla}(qV) \equiv -\vec{\nabla}U$$

όπου V το δυναμικό του ηλεκτροστατικού πεδίου στο θεωρούμενο σημείο. Όπως βλέπουμε, είναι δυνατό να ορίσουμε τη *δυναμική ενέργεια του φορτίου* με την έκφραση

$$\boxed{U(\vec{r}) = qV(\vec{r})} \quad (5.25)$$

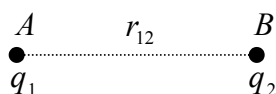
Αυτό ακριβώς αποτελεί προϋπόθεση για να είναι το πεδίο συντηρητικό. Εκτός των άλλων, αυτό σημαίνει ότι η ολική μηχανική ενέργεια ($E_k + U$) του φορτίου μένει σταθερή κατά την κίνησή του μέσα στο πεδίο. Επιπλέον, το πεδίο δεν παράγει έργο κατά την κίνηση του φορτίου πάνω σε μια *κλειστή* τροχιά. Ισοδύναμα, το έργο κατά τη μετακίνηση του φορτίου από ένα σημείο A σε ένα σημείο B του πεδίου είναι ανεξάρτητο της τροχιάς που συνδέει τα δύο σημεία, όπως προκύπτει με χρήση των σχέσεων (4.39) και (5.25):

$$W_{AB} = U_A - U_B = qV_A - qV_B = qV_{AB} \quad (5.26)$$

όπου $V_{AB} = V_A - V_B$ η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα δύο σημεία.

Παρατήρηση: Θα πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα ένα λεπτό σημείο: Το *δυναμικό* V είναι ιδιότητα του *ηλεκτροστατικού πεδίου*, ενώ η *δυναμική ενέργεια* U είναι ιδιότητα του *φορτίου* q μέσα στο πεδίο.

Έστω τώρα δύο σημειακά φορτία q_1, q_2 που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r_{12} . Τα φορτία είναι τοποθετημένα στα σημεία A και B του χώρου, αντίστοιχα:



Η δυναμική ενέργεια του q_1 μέσα στο πεδίο Coulomb που παράγεται από το q_2 είναι

$$U_{12} = q_1 V_2(A) = q_1 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}} \right)$$

ενώ η δυναμική ενέργεια του q_2 μέσα στο πεδίο Coulomb που παράγεται από το q_1 είναι

$$U_{21} = q_2 V_1(B) = q_2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}} \right)$$

Παρατηρούμε ότι $U_{12} = U_{21} = U$, όπου

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (5.27)$$

Το U παριστά τη *δυναμική ενέργεια του συστήματος των q_1, q_2* . Πιο γενικά, η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος φορτίων q_1, q_2, \dots , δίνεται από την έκφραση

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (5.28)$$

Από φυσική άποψη, η ποσότητα αυτή παριστά το έργο που απαιτείται για να συνθέσουμε το σύστημα των φορτίων φέρνοντάς τα από άπειρες αποστάσεις μεταξύ τους (θεωρήσαμε ότι $U=0$ όταν $r_{ij} = \infty$).

Με βάση τη σχέση (5.25) μπορούμε να ορίσουμε τη μονάδα δυναμικού στο S.I.:

$$1 \text{ Volt} = 1 \text{ Joule} / \text{Coulomb} \quad \text{ή σύντομα} \quad 1 \text{ V} = 1 \text{ J} / \text{C}$$

Παρατηρούμε ότι

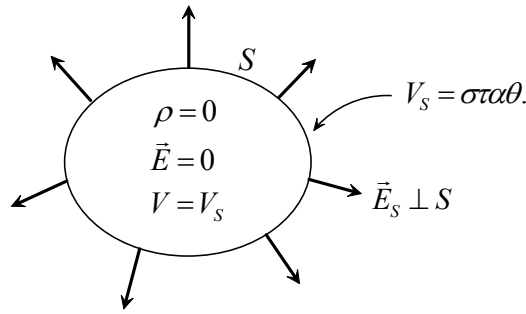
$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} \Rightarrow 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (\text{μονάδα έντασης ηλεκτρικού πεδίου})$$

5.6 Μεταλλικός Αγωγός σε Ηλεκτροστατική Ισορροπία

Όπως θυμόμαστε από το πρώτο μέρος του βιβλίου, η αγωγιμότητα ενός μετάλλου οφείλεται στα *ελεύθερα ηλεκτρόνια*, δηλαδή τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του μετάλλου που έχουν αποσπαστεί από τα άτομα στα οποία ανήκαν και κινούνται ελεύθερα μέσα στο κρυσταλλικό πλέγμα. Ο αγωγός βρίσκεται σε *ηλεκτροστατική ισορροπία* όταν δεν παρατηρείται μακροσκοπική κίνηση φορτίων στο εσωτερικό και την επιφάνειά του (με εξαίρεση τις άτακτες θερμικές κινήσεις των ηλεκτρονίων).

Όταν βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία, ένας αγωγός εμφανίζει τις εξής ιδιότητες:

1. Το ηλεκτρικό πεδίο στο *εσωτερικό* του αγωγού είναι *μηδέν*, ενώ *λίγο έξω* από τον αγωγό το πεδίο είναι *κάθετο στην επιφάνεια* του αγωγού.
2. Η πυκνότητα φορτίου στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν. Έτσι, ηλεκτρικό φορτίο μπορεί να υπάρχει μόνο στην επιφάνεια του αγωγού.
3. Η επιφάνεια του αγωγού είναι *ισοδυναμική επιφάνεια*. Επιπλέον, το δυναμικό στο εσωτερικό του αγωγού είναι σταθερό (ίδιο σε όλα τα σημεία) και ίσο με το δυναμικό στην επιφάνεια.



Απόδειξη: (1) Αν υπήρχε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} \neq 0$ στο εσωτερικό του αγωγού θα έθετε σε κίνηση τα ελεύθερα ηλεκτρόνια, οπότε δεν θα είχαμε ηλεκτροστατική ισορροπία. Αν το ηλεκτρικό πεδίο λίγο έξω από τον αγωγό δεν ήταν κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού θα είχε μια συνιστώσα εφαπτόμενη στην επιφάνεια, πράγμα που θα έθετε σε κίνηση τα ελεύθερα ηλεκτρόνια πάνω στην επιφάνεια. (2) Στο εσωτερικό του μετάλλου, $\vec{E} = 0$. Σύμφωνα με το νόμο του Gauss (5.8), τότε, $\rho = 0$ στην περιοχή αυτή. (3) Αφού το ηλεκτρικό πεδίο λίγο έξω από το μέταλλο είναι κάθετο στην επιφάνεια S του μετάλλου, η επιφάνεια αυτή τέμνει κάθετα τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, άρα είναι ισοδυναμική επιφάνεια (βλ. Παρ.5.3) με σταθερό δυναμικό V_S . Θεωρούμε ένα σημείο a στην επιφάνεια και ένα σημείο b στο εσωτερικό του αγωγού, και μια τυχαία διαδρομή που συνδέει τα σημεία αυτά και βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στον αγωγό. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων a και b βρίσκεται από τη σχέση (5.17), λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{E} = 0$ στο εσωτερικό του μετάλλου:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_b = V_a = V_S$$

διότι $V_a = V_S$ για κάθε σημείο a της επιφάνειας. Άρα, $V_b = V_S$ για κάθε σημείο b στο εσωτερικό του αγωγού.

Θεωρούμε τώρα έναν αγωγό ο οποίος φέρει στην επιφάνειά του φορτίο Q . Έστω V το ηλεκτρικό δυναμικό στον αγωγό, όπου συμφωνούμε ότι $V = 0$ όταν ο αγωγός δεν φέρει φορτίο ($Q = 0$). Όπως αποδεικνύεται, ο λόγος Q/V είναι σταθερός, ανεξάρτητος από το φορτίο Q στον αγωγό. Ο λόγος αυτός καλείται *χωρητικότητα* του αγωγού:

$$C = \frac{Q}{V} \tag{5.29}$$

Η μονάδα χωρητικότητας στο S.I. είναι το *Farad* (F). Προφανώς, $1F = 1C \cdot V^{-1}$.

Ένα πιο σύνθετο σύστημα είναι αυτό που αποτελείται από δύο αγωγούς που φέρουν φορτία $+Q$ και $-Q$. Αν V_1 και V_2 είναι τα αντίστοιχα δυναμικά των αγωγών, μπορούμε να δείξουμε (βλ. Πρόβλ.4) ότι $V_1 > V_2$. Έτσι, η διαφορά δυναμικού $\Delta V = V_1 - V_2$ των δύο αγωγών είναι θετική. Το σύστημα αυτό ονομάζεται *πυκνωτής* και η χωρητικότητά του ορίζεται

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\Delta V} \tag{5.30}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Τι ονομάζουμε, γενικά, στατικό και τι ομογενές πεδίο; Δώστε φυσικά παραδείγματα πεδίων με αυτές τις ιδιότητες.
2. Στο νόμο του Gauss στην ολοκληρωτική μορφή (5.5), το ηλεκτρικό πεδίο πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια S συνδέεται με το ολικό φορτίο στο εσωτερικό της S . Θα επηρεαστεί το πεδίο πάνω στην S αν αφαιρέσουμε όλα τα φορτία που βρίσκονται στο εξωτερικό της επιφάνειας;
3. Ναδειχθεί ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε μια περιοχή του χώρου όπου υπάρχει χρονικά-μεταβαλλόμενη κατανομή φορτίου $\rho(\vec{r}, t)$, δεν μπορεί να είναι στατικό.
4. Να αιτιολογηθεί η αρχή της επαλληλίας για το ηλεκτρικό δυναμικό: «Το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από ένα πλήθος φορτίων ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών των πεδίων που παράγονται από κάθε φορτίο χωριστά».
5. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι φυσικό μέγεθος που σε κάθε σημείο του χώρου έχει μονοσήμαντα καθορισμένη τιμή η οποία μπορεί να μετρηθεί. Ισχύει το ίδιο για το ηλεκτρικό δυναμικό; Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε το δυναμικό σαν απόλυτο φυσικό μέγεθος; Τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο σημεία;
6. Ξεκινώντας με το νόμο του Coulomb, να εξαχθεί αναλυτικά η έκφραση για το δυναμικό του πεδίου Coulomb που οφείλεται σε ένα σημειακό φορτίο q .
7. Τι ονομάζουμε ισοδυναμική επιφάνεια; Ναδειχθεί ότι κάθε τέτοια επιφάνεια τέμνει κάθετα τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές. Να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες του πεδίου Coulomb που παράγεται από ένα σημειακό φορτίο q .
8. Ναδειχθεί ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητικό και να δοθεί η έκφραση της δυναμικής ενέργειας ενός φορτίου q μέσα στο πεδίο αυτό. Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια του ατόμου του υδρογόνου όταν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε απόσταση r από τον πυρήνα (πρωτόνιο).
9. Έστω όγκος V που οριοθετείται από κλειστή επιφάνεια S . Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον V είναι μηδέν, αλλά πάνω στην S αποκτά μη-μηδενική τιμή και διεύθυνση κάθετη στην S σε κάθε σημείο της. Ναδειχθεί ότι (α) η S είναι ισοδυναμική επιφάνεια, (β) ο V είναι χώρος σταθερού δυναμικού, ίσου με αυτό στην S , (γ) το ολικό φορτίο μέσα στον όγκο V είναι μηδέν. [Υπόδειξη: Ποιο φυσικό σύστημα σας θυμίζει η παραπάνω θεωρητική περιγραφή;]
10. Δείξτε με ένα απλό παράδειγμα ότι ο νόμος του Coulomb είναι άμεση συνέπεια του νόμου του Gauss.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο \vec{E} και μια νοητή κλειστή επιφάνεια S μέσα σ' αυτό. (α) Δείξτε ότι η ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου της S είναι μηδέν. (β) Δείξτε ότι το ολικό ηλεκτρικό φορτίο στο εσωτερικό της S είναι μηδέν.

Λύση: Η απάντηση προκύπτει άμεσα αν συνδυάσουμε το νόμο του Gauss με το ολοκληρωτικό θεώρημα του Gauss, λαμβάνοντας υπόψη και το γεγονός ότι το \vec{E} είναι σταθερό (καλούμε V τον όγκο που περικλείεται από την S):

$$\frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv = 0 \quad (\text{διότι } \text{div } \vec{E} = 0)$$

2. Είναι δυνατό να υπάρχει ηλεκτροστατικό πεδίο της μορφής $\vec{E} = F(x, y, z) \hat{u}_x$; Υπό ποια προϋπόθεση; Τι συνάγετε για το δυναμικό V του πεδίου;

Λύση: Ένα ηλεκτροστατικό πεδίο πρέπει να είναι αστρόβιλο:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} \hat{u}_y - \frac{\partial F}{\partial y} \hat{u}_z = 0$$

Ένα διάνυσμα στον \mathbf{R}^3 είναι μηδέν όταν κάθε συνιστώσα του είναι μηδέν:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \Rightarrow F = F(x) \quad \text{οπότε} \quad \vec{E} = F(x) \hat{u}_x$$

Τότε, η σχέση $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ δίνει:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{u}_z = -F(x) \hat{u}_x$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των μοναδιαίων διανυσμάτων στα δύο μέλη,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F(x), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow V = V(x), \quad \frac{dV}{dx} = -F(x)$$

3. Δείξτε ότι σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο ισχύουν τα παρακάτω: (α) Οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές προσανατολίζονται στην κατεύθυνση που ελαττώνεται το δυναμικό του πεδίου. (β) Ένα αρχικά ακίνητο θετικό φορτίο τείνει να κινηθεί στην κατεύθυνση που ελαττώνεται το δυναμικό, ενώ αντίθετα τείνει να κινηθεί ένα αρνητικό φορτίο. (γ) Κάθε φορτίο (θετικό ή αρνητικό) τείνει να κινηθεί στην κατεύθυνση που ελαττώνεται η δυναμική του ενέργεια.

Λύση: (α) Ο προσανατολισμός των δυναμικών γραμμών καθορίζεται από την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} , το οποίο εφάπτεται στις γραμμές αυτές. Για αυθαίρετη απειροστή μετατόπιση $d\vec{r}$ μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο, η μεταβολή του δυναμικού είναι

$$dV = (\vec{\nabla}V) \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Για μια μετατόπιση $d\vec{r}$ κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής και στην κατεύθυνση προσανατολισμού της, το $d\vec{r}$ είναι παράλληλο και ομόρροπο με το \vec{E} , το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E} \cdot d\vec{r}$ παίρνει τη μέγιστη (θετική) τιμή του, ενώ η μεταβολή dV του δυναμικού παίρνει την ελάχιστη *αρνητική* τιμή της (άρα κατ' απόλυτο μέγιστη). Δηλαδή, η *ελάττωση* του δυναμικού είναι μέγιστη κατά μήκος της δυναμικής γραμμής και στην κατεύθυνση προσανατολισμού της.

(β) Η δύναμη στο φορτίο είναι $\vec{F} = q\vec{E}$. Αν $q > 0$, η δύναμη είναι στην κατεύθυνση του \vec{E} το οποίο, με τη σειρά του, είναι στην κατεύθυνση μέγιστης ελάττωσης του V . Στην κατεύθυνση αυτή θα κινηθεί το φορτίο αν είναι αρχικά ακίνητο (αντίθετα θα κινηθεί ένα φορτίο $q < 0$).

(γ) Για αυθαίρετη απειροστή μετατόπιση $d\vec{r}$ μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του φορτίου είναι

$$dU = (\vec{\nabla}U) \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Αν το φορτίο είναι αρχικά ακίνητο, η μετατόπισή του $d\vec{r}$ θα είναι στην κατεύθυνση της δύναμης \vec{F} , το εσωτερικό γινόμενο $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ θα πάρει τη μέγιστη (θετική) τιμή του, ενώ η μεταβολή dU της δυναμικής ενέργειας θα πάρει την ελάχιστη *αρνητική* τιμή της (άρα κατ' απόλυτο μέγιστη). Δηλαδή, το φορτίο θα κινηθεί στην κατεύθυνση μέγιστης *ελάττωσης* της δυναμικής του ενέργειας, *ανεξάρτητα από το πρόσημο του φορτίου!*

4. Δύο φορτισμένοι αγωγοί A και B φέρουν φορτία $+Q$ και $-Q$, αντίστοιχα. Δείξτε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό του A είναι μεγαλύτερο από το δυναμικό του B .

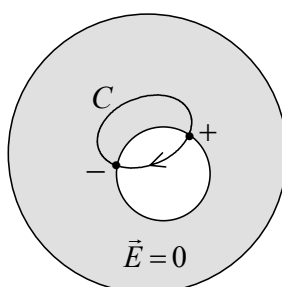
Λύση: Θυμίζουμε ότι το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου παίρνει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία ενός αγωγού (στην επιφάνεια ή το εσωτερικό του). Έστω V_A και V_B τα δυναμικά των δύο αγωγών. Κατά μήκος μιας τυχαίας διαδρομής που συνδέει τον A με τον B ,

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

όπου \vec{E} το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος της διαδρομής. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (αφού η τιμή του ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από την επιλεγμένη διαδρομή), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κινούμαστε από τον A στον B κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής του ηλεκτρικού πεδίου. Μια τέτοια γραμμή προσανατολίζεται πάντα στην κατεύθυνση από τον θετικά φορτισμένο αγωγό A προς τον αρνητικά φορτισμένο αγωγό B , αφού αυτός είναι και ο προσανατολισμός του πεδίου \vec{E} (μπορείτε να το δικαιολογήσετε αυτό). Κατά μήκος της γραμμής τα \vec{E} και $d\vec{l}$ είναι παράλληλα και ομόρροπα, έτσι ώστε $\vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$. Το ολοκλήρωμα (1) λοιπόν είναι θετικό, άρα $V_A - V_B > 0 \Rightarrow V_A > V_B$.

5. Στο εσωτερικό ενός αγωγού υπάρχει μια κοιλότητα η οποία δεν περιέχει φορτία. (α) Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στην κοιλότητα είναι μηδέν. (β) Δείξτε ότι το συνολικό φορτίο στην επιφάνεια της κοιλότητας είναι μηδέν. (γ) Τοποθετούμε τώρα ένα φορτίο Q μέσα στην κοιλότητα. Βρείτε το συνολικό φορτίο που επάγεται στο τοίχωμα της κοιλότητας, καθώς και το συνολικό φορτίο στην επιφάνεια του αγωγού.

Λύση: (α) Αφού δεν υπάρχουν φορτία μέσα στην κοιλότητα, δεν μπορεί να υπάρχουν ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές που να αρχίζουν ή να τελειώνουν μέσα σε αυτή. Για τον ίδιο λόγο, δεν υπάρχουν δυναμικές γραμμές που να αρχίζουν ή να τελειώνουν μέσα στον αγωγό όταν αυτός βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία (η πυκνότητα φορτίου στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν, άρα δεν υπάρχουν εκεί φορτία διάφορα του μηδενός). Έτσι, κάθε δυναμική γραμμή θα πρέπει να αρχίζει και να τελειώνει στο τοίχωμα της κοιλότητας, με κατεύθυνση από ένα θετικό προς ένα αρνητικό φορτίο:



Θεωρούμε μια κλειστή διαδρομή C τέτοια ώστε το τμήμα της που διέρχεται μέσα από την κοιλότητα να συμπίπτει με μια ηλεκτρική δυναμική γραμμή στην περιοχή αυτή. Έτσι, το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} μέσα στην κοιλότητα είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο αυτού του τμήματος της καμπύλης C . Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{E} = 0$ στο εσωτερικό του αγωγού, έχουμε:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_{\text{κοιλότητα}} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_{\text{αγωγός}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_{\text{κοιλότητα}} |\vec{E}| |\vec{dl}| > 0$$

πράγμα που δεν μπορεί να είναι σωστό, αφού $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$ για κάθε ηλεκτροστατικό πεδίο. Το λάθος προέκυψε γιατί υποθέσαμε ότι υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο διάφορο του μηδενός μέσα στην κοιλότητα. Θα πρέπει λοιπόν $\vec{E} = 0$ μέσα στην κοιλότητα.

(β) Θεωρούμε μια κλειστή επιφάνεια S μέσα στον αγωγό, η οποία περιβάλλει την κοιλότητα. Σε κάθε σημείο της S , $\vec{E} = 0$. Έστω Q το ολικό φορτίο στην επιφάνεια της κοιλότητας. Η S δεν θα περικλείει άλλα φορτία, αφού η πυκνότητα φορτίου τόσο στο εσωτερικό του αγωγού όσο και στο εσωτερικό της κοιλότητας είναι μηδέν. Από το νόμο του Gauss, λαμβάνοντας υπόψη ότι $Q_{in} = Q$ και ότι $\vec{E} = 0$ πάνω στην S , έχουμε:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = 0 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow Q = 0 \text{ στην επιφάνεια της κοιλότητας}$$

Προσέξτε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν ανεξάρτητα αν υπάρχουν ή όχι ηλεκτρικά πεδία στο εξωτερικό του αγωγού. Δηλαδή, η κοιλότητα είναι ηλεκτρικά απομονωμένη από τον έξω κόσμο (προστατεύεται, κατά κάποιον τρόπο, από τον αγωγό που την περιβάλλει).

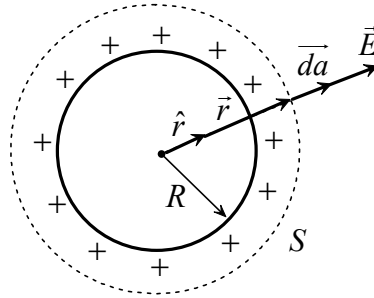
(γ) Θεωρούμε και πάλι μια κλειστή επιφάνεια S μέσα στον αγωγό, η οποία περιβάλλει την κοιλότητα. Σε κάθε σημείο της S , $\vec{E} = 0$. Έστω $Q_{\text{τοιχ}}$ το ολικό επαγόμενο φορτίο στο τοίχωμα της κοιλότητας. Το συνολικό φορτίο που περικλείεται από την S είναι $Q_{\text{in}} = Q + Q_{\text{τοιχ}}$. Από το νόμο του Gauss, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{E} = 0$ πάνω στην S , έχουμε:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = 0 = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{\text{in}} = Q + Q_{\text{τοιχ}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{τοιχ}} = -Q$$

Τώρα, ο αγωγός είναι ηλεκτρικά ουδέτερος και δεν υπάρχει, συνολικά, ηλεκτρικό φορτίο στο εσωτερικό του. Αφού λοιπόν το τοίχωμα της κοιλότητας έχει φορτίο $-Q$, θα πρέπει να υπάρχει ως αντιστάθμισμα ένα φορτίο $+Q$ στην επιφάνεια του αγωγού. Έτσι, το επιφανειακό φορτίο του αγωγού «προδίδει» την ύπαρξη του φορτίου Q μέσα στην κοιλότητα!

6. Συμπαγής μεταλλική σφαίρα ακτίνας R φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q ομοιόμορφα κατανομημένο στην επιφάνειά της. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό μέσα και έξω από τη σφαίρα. (Υποθέστε ότι $V=0$ σε άπειρη απόσταση από τη σφαίρα.)

Λύση: Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος, το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} έξω από τη σφαίρα έχει ακτινική διεύθυνση με κατεύθυνση προς το εξωτερικό της σφαίρας (διότι $Q > 0$) και το μέτρο του $|\vec{E}| = E$ έχει σταθερή τιμή πάνω σε οποιαδήποτε σφαιρική επιφάνεια ομόκεντρη με τη σφαίρα:



Δηλαδή, το εξωτερικό πεδίο θα είναι της μορφής

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}, \quad r > R \quad (1)$$

όπου r η απόσταση από το κέντρο της σφαίρας. Επειδή η σφαίρα είναι αγωγίμη, $\vec{E} = 0$ στο εσωτερικό της, δηλαδή για $r < R$. Για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό της σφαίρας ($r > R$) θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss. Θεωρούμε μια σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας $r > R$, ομόκεντρη με τη σφαίρα. Το ολικό φορτίο που περικλείεται στην S είναι $Q_{\text{in}} = Q$:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{όπου} \quad \vec{E} \cdot \vec{da} = [E(r)\hat{r}] \cdot [(da)\hat{r}] = E(r)da \Rightarrow$$

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S E(r)da = E(r)\oint_S da = E(r)(4\pi r^2) \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r > R \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παρατηρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο *εξωτερικό* της σφαίρας είναι ίδιο με το πεδίο Coulomb που θα δημιουργούσε ένα σημειακό φορτίο Q τοποθετημένο στο κέντρο της σφαίρας! Όπως μπορεί να αποδειχθεί, η σχέση (2) ισχύει και για $r=R$, δίνοντας το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια της σφαίρας (προσέξτε ότι το πεδίο είναι *ασυνεχές* για $r=R$).

Αναζητούμε τώρα το ηλεκτρικό δυναμικό $V(r)$. Γενικά, για μια μετατόπιση από τη θέση a στη θέση b μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο,

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_a - V_b$$

ανεξάρτητα από την καμπύλη που συνδέει τα δύο σημεία. Τώρα,

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = E(r) \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{E(r)}{r} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{E(r)}{r} r dr = E(r) dr$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (5.13). Άρα,

$$V_a - V_b = \int_a^b E(r) dr \quad (3)$$

όπου η $E(r)$ δίνεται από τη σχέση (2) για $r \geq R$, ενώ $E(r)=0$ για $r < R$. Για το δυναμικό στο *εξωτερικό* της σφαίρας, διαλέγουμε το σημείο a πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r \geq R$ όπου το δυναμικό είναι $V(r)$ (ισοδυναμική επιφάνεια), ενώ το σημείο b το παίρνουμε στο άπειρο ($r=\infty$) όπου $V_\infty=0$:

$$V(r) - V_\infty = \int_r^\infty E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(0 - \frac{1}{r}\right) \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad r \geq R$$

Προσέξτε και πάλι ότι το δυναμικό στο *εξωτερικό* της σφαίρας είναι ίδιο με το δυναμικό του πεδίου Coulomb ενός σημειακού φορτίου Q τοποθετημένου στο κέντρο της σφαίρας. Για το δυναμικό στο *εσωτερικό* της σφαίρας, διαλέγουμε το σημείο a πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r < R$ όπου το δυναμικό είναι $V(r)$, ενώ το σημείο b το παίρνουμε στην επιφάνεια της σφαίρας όπου $V(R)=Q/4\pi\epsilon_0 R$, και εφαρμόζουμε την (3) λαμβάνοντας υπόψη ότι $E(r)=0$ για $r < R$:

$$V(r) - V(R) = \int_r^R E(r) dr = 0 \Rightarrow$$

$$V(r) = V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad r \leq R$$

Παρατηρούμε ότι ο χώρος που καταλαμβάνει η σφαίρα είναι χώρος σταθερού δυναμικού.

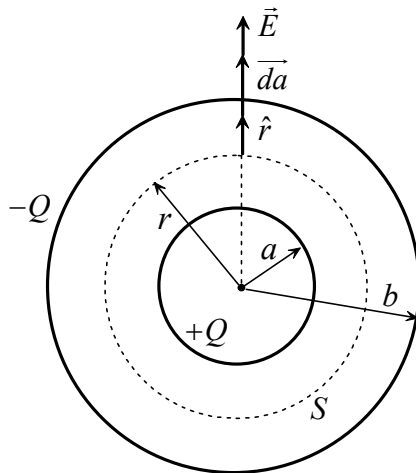
Άσκηση: Δείξτε ότι, αν στη θέση της συμπαγούς σφαίρας είχαμε έναν ομοιόμορφα φορτισμένο *σφαιρικό φλοιό*, τα αποτελέσματα της άσκησης θα ήταν ίδια όπως πριν! (Για να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του φλοιού χρησιμοποιήστε το νόμο του Gauss, παρατηρώντας ότι στο χώρο αυτό δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία.)

7. Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από μια εσωτερική αγωγίμη σφαίρα με ακτίνα a και φορτίο $+Q$, η οποία περιβάλλεται από έναν ομόκεντρο αγωγίμο σφαιρικό φλοιό με ακτίνα b και φορτίο $-Q$. (α) Βρείτε τη χωρητικότητα του πυκνωτή. (β) Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του πυκνωτή ($r > b$) είναι μηδέν, και προσδιορίστε το ηλεκτρικό δυναμικό μέσα ($a \leq r \leq b$) και έξω ($r \geq b$) από τον πυκνωτή (το r συμβολίζει την απόσταση από το κέντρο των σφαιρών).

Λύση: (α) Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του πυκνωτή ($a < r < b$) θα είναι της μορφής (βλ. σχήμα)

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} \quad (1)$$

Δηλαδή, θα έχει ακτινική διεύθυνση με κατεύθυνση από την εσωτερική προς την εξωτερική σφαίρα, και το μέτρο του $|\vec{E}| = E$ θα έχει σταθερή τιμή πάνω σε οποιαδήποτε σφαιρική επιφάνεια ομόκεντρη με τις σφαίρες:



Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss για μια σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας r , παρατηρώντας ότι το ολικό φορτίο που περικλείεται στην S είναι $Q_{in} = +Q$:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S [E(r)\hat{r}] \cdot [(da)\hat{r}] = \oint_S E(r) da = E(r) \oint_S da = E(r)(4\pi r^2) \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad a < r < b \quad (2)$$

Οι επιφάνειες των δύο σφαιρών είναι ισοδυναμικές επιφάνειες. Για να βρούμε τη διαφορά δυναμικού $V = V_a - V_b$ μεταξύ των σφαιρών, θεωρούμε μια τυχαία διαδρομή από την εσωτερική προς την εξωτερική σφαίρα:

$$V = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b E(r) dr \quad (3)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\vec{E} \cdot d\vec{r} = E(r) dr$ που αποδείχθηκε στο Πρόβλ.6. Αντικαθιστώντας την (2) στην (3),

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(b-a)}{ab}$$

Η χωρητικότητα είναι $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}$.

(β) Στο εξωτερικό του πυκνωτή ($r > b$) το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι και πάλι της μορφής (1). Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss για μια σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας $r > b$, παρατηρώντας ότι το ολικό φορτίο που περικλείεται στην S είναι τώρα $Q_{in} = Q + (-Q) = 0$:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow E(r)(4\pi r^2) = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

Άρα, $\vec{E} = 0$ για $r > b$. Έστω τώρα $V(r)$ το δυναμικό σε μια σφαιρική ισοδυναμική επιφάνεια ακτίνας $r > b$. Για μια τυχαία διαδρομή που συνδέει την επιφάνεια αυτή με την εξωτερική σφαίρα,

$$V(r) - V_b = \int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow V(r) = V_b = \text{σταθ.}$$

Θεωρώντας (αυθαίρετα) ότι $V=0$ για $r=\infty$, έχουμε $V_b=0$ και $V(r)=0$ για $r \geq b$. Στο εσωτερικό του πυκνωτή ($a < r < b$) το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τις σχέσεις (1) και (2). Στην περίπτωση αυτή, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $V_b=0$,

$$V(r) - V_b = \int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^b E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^b \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right), \quad a \leq r \leq b$$

Άσκηση: Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός πυκνωτή με παράλληλες επίπεδες πλάκες είναι ομογενές, έχει διεύθυνση κάθετη στις πλάκες, και κατευθύνεται από τη θετική πλάκα στην αρνητική. Δείξτε ότι το μέτρο της έντασης του πεδίου είναι

$$E = \frac{\Delta V}{l}$$

όπου l η κάθετη απόσταση ανάμεσα στις πλάκες και ΔV η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους. Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη γενική έκφραση για την ένταση ενός ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου. [Υπόδειξη: Εφαρμόστε τη σχέση (5.17) κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής του ηλεκτρικού πεδίου, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μεταλλικές πλάκες είναι ισοδυναμικές επιφάνειες.]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ

6.1 Πυκνότητα Ρεύματος

Ο όρος *ηλεκτρικό ρεύμα* αναφέρεται στην *προσανατολισμένη* κίνηση ηλεκτρικού φορτίου. Ο προσανατολισμός του φορτίου επιτυγχάνεται, π.χ., με την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου, ή είναι αποτέλεσμα ανομοιόμορφης κατανομής των ηλεκτρικών φορέων (ρεύματα διάχυσης). Τονίζουμε ότι η άτακτη θερμική κίνηση που παρατηρείται, π.χ., στα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων ακόμα και χωρίς την παρουσία ηλεκτρικού πεδίου *δεν* αποτελεί ηλεκτρικό ρεύμα, αφού γίνεται κατά τρόπο τυχαίο και μη-προσανατολισμένο.

Θεωρούμε το σύνολο των φυσικών φαινομένων που οφείλονται σε *κίνηση* (όχι απλά παρουσία) ηλεκτρικού φορτίου. Σε κάθε τέτοιο φαινόμενο υπεισέρχονται δύο παράγοντες: το *πρόσημο* του φορτίου και η *κατεύθυνση* κίνησής του. Ας θεωρήσουμε ένα θετικό φορτίο q που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα \vec{v} :

$$q \bullet \longrightarrow \vec{v}$$

Έστω δύο γειτονικά σημεία A και B από τα οποία πέρασε το q τις χρονικές στιγμές t και $t+dt$, αντίστοιχα. Επειδή $q>0$, μέσα στο χρονικό διάστημα dt το φορτίο στο σημείο A ελαττώθηκε κατά q ενώ το φορτίο στο σημείο B αυξήθηκε κατά q . Το ίδιο όμως θα συνέβαινε αν ένα *αρνητικό* φορτίο $-q$ μετακινιόταν από το B στο A με ταχύτητα $-\vec{v}$, δηλαδή με κατεύθυνση κίνησης προς τα *αριστερά*:

$$-\vec{v} \longleftarrow \bullet -q$$

(Αφού το B χάνει αρνητικό φορτίο, τελικά κερδίζει θετικό φορτίο, ενώ το A κερδίζει αρνητικό άρα χάνει θετικό φορτίο, όπως και πριν.) Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

η κίνηση ενός αρνητικού φορτίου σε μια κατεύθυνση ισοδυναμεί με την κίνηση ενός θετικού φορτίου στην αντίθετη κατεύθυνση.

Για παράδειγμα, όταν ένα φορτίο q κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο \vec{B} με ταχύτητα \vec{v} , δέχεται δύναμη $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$. Την ίδια ακριβώς δύναμη δέχεται ένα φορτίο $-q$ κινούμενο στην αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα $-\vec{v}$:

$$\vec{F} = (-q)[(-\vec{v}) \times \vec{B}] = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Όμοια, το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από ένα φορτίο q κινούμενο με ταχύτητα \vec{v} είναι ίδιο με αυτό που παράγεται από ένα αντίθετο φορτίο κινούμενο με αντίθετη ταχύτητα.

Σε φυσικά φαινόμενα που οφείλονται σε *κίνηση* ηλεκτρικού φορτίου είναι συχνά βολικό να θεωρούμε ότι τα κινούμενα φορτία είναι θετικά. Έτσι, ένα αρνητικό φορτίο $-q$ κινούμενο σε μια κατεύθυνση (*πραγματική φορά*) μπορεί να αντιμετωπίζεται σαν να ήταν θετικό φορτίο $+q$ κινούμενο στην *αντίθετη* κατεύθυνση (*συμβατική φορά*).

Θεωρούμε μια περιοχή του χώρου όπου κινούνται ηλεκτρικά φορτία. Έστω da_{\perp} μια στοιχειώδης επιφάνεια σε κάποιο σημείο $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ της περιοχής. Μέσα από την da_{\perp} διέρχεται φορτίο dq σε χρόνο dt , κινούμενο *κάθετα* στην da_{\perp} με ταχύτητα \vec{v} . Καλούμε

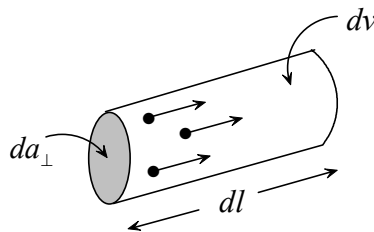
$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v} \quad (\text{όπου } v = |\vec{v}|)$$

το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της κίνησης (κάθετο στην da_{\perp}). Η *πυκνότητα ρεύματος* στο θεωρούμενο σημείο ορίζεται

$$\vec{J} = \frac{dq}{da_{\perp} dt} \hat{u} = \frac{dq}{v da_{\perp} dt} \vec{v} \quad (6.1)$$

Παρατηρούμε ότι η κατεύθυνση του \vec{J} συμπίπτει με την κατεύθυνση κίνησης *θετικού* φορτίου ($dq > 0$) ενώ είναι *αντίθετη* από την κατεύθυνση κίνησης *αρνητικού* φορτίου. Παρατηρούμε επίσης ότι η πυκνότητα ρεύματος \vec{J} δεν αλλάζει αν αντιστρέψουμε ταυτόχρονα το πρόσημο του φορτίου και τη φορά κίνησής του. Έτσι, αρνητικό φορτίο κινούμενο σε μια κατεύθυνση δίνει την ίδια πυκνότητα ρεύματος με ένα αντίστοιχο θετικό φορτίο κινούμενο στην αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα ίσου μέτρου.

Ας φανταστούμε τώρα ότι το φορτίο dq διέρχεται κάθετα από τη στοιχειώδη επιφάνεια da_{\perp} και, μέσα σε χρόνο dt , προχωρεί κατά dl και καταλαμβάνει ένα στοιχειώδη όγκο dv :



όπου

$$dv = da_{\perp} dl = da_{\perp} (v dt) = v da_{\perp} dt$$

Η σχέση (6.1) τώρα γράφεται:

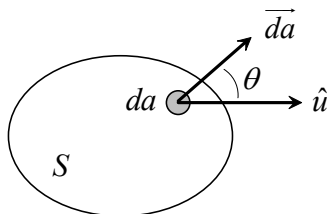
$$\vec{J} = \frac{dq}{dv} \vec{v}$$

Η ποσότητα dq/dv παριστά την *πυκνότητα κινούμενου φορτίου* ρ_k στο θεωρούμενο σημείο. Άρα, τελικά,

$$\boxed{\vec{J} = \rho_k \vec{v}} \quad (6.2)$$

Προσοχή: Το ρ_k είναι η πυκνότητα του κινούμενου φορτίου στο οποίο οφείλεται το ρεύμα \vec{J} . Δεν θα πρέπει να συγχέεται με την *ολική* πυκνότητα φορτίου ρ που οφείλεται σε *όλα* τα φορτία, κινητά και ακίνητα (π.χ., κινούμενα ηλεκτρόνια και ακίνητα θετικά ιόντα σε ένα μέταλλο).

Θεωρούμε τώρα μια επιφάνεια S (ανοιχτή ή κλειστή) μέσα από την οποία διέρχεται ηλεκτρικό φορτίο. Έστω \vec{da} ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια σε κάποιο σημείο της, το μέτρο da του οποίου παριστά το εμβαδόν ενός στοιχείου της επιφάνειας στη θέση εκείνη:



Καλούμε dq το στοιχειώδες φορτίο που διέρχεται από το στοιχείο da σε χρόνο dt . Το ολικό φορτίο που διέρχεται από την επιφάνεια S στο ίδιο χρονικό διάστημα το καλούμε dQ . Γράφουμε, συμβολικά,

$$dQ = \int_S dq$$

Έστω \vec{v} η ταχύτητα κίνησης του φορτίου dq δια μέσου του da . Όπως πριν, καλούμε

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v}$$

το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της κίνησης. Κατά συνθήκη, θα θεωρούμε ότι $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (όπου θ η γωνία ανάμεσα στα \vec{da} και \hat{u}), δηλαδή ότι το φορτίο διαπερνά την επιφάνεια κινούμενο προς την πλευρά όπου βρίσκεται το \vec{da} . Η υπόθεση αυτή βασίζεται στις παρατηρήσεις που κάναμε νωρίτερα: Αν η πραγματική κίνηση του φορτίου είναι προς την αντίθετη πλευρά της επιφάνειας απ' αυτή στην οποία βρίσκεται το \vec{da} , μπορούμε ισοδύναμα να θεωρήσουμε ότι ένα αντίθετο φορτίο dq διέρχεται από την επιφάνεια με φορά σύμφωνη με το \vec{da} . (Για παράδειγμα, αν θετικό φορτίο διαπερνά το da κινούμενο σε κατεύθυνση αντίθετη από το \vec{da} , θα θεωρούμε ότι αρνητικό φορτίο ίσου μέτρου διέρχεται από το da με κατεύθυνση σύμφωνη με το \vec{da} .) Το εσωτερικό γινόμενο

$$da_{\perp} = \vec{da} \cdot \hat{u} = da \cos \theta$$

παριστά την προβολή τού \vec{da} στην κατεύθυνση του \hat{u} και εκφράζει το εμβαδόν μιας στοιχειώδους επιφάνειας κάθετης στο \hat{u} . (Με βάση τη σύμβαση που κάναμε για το θ , ισχύει πάντα ότι $da_{\perp} > 0$.)

Ορίζουμε το στοιχειώδες ρεύμα δια μέσου του da σαν το πηλίκο

$$dI = \frac{dq}{dt}$$

Το ολικό ρεύμα δια μέσου της S είναι

$$I = \int_S dI = \frac{dQ}{dt} \quad (6.3)$$

(Προσέξτε ότι το I είναι *αλγεβρική τιμή* και μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με το πρόσημο του διερχόμενου φορτίου.) Η πυκνότητα ρεύματος στο σημείο του χώρου όπου βρίσκεται το da είναι

$$\vec{J} = \frac{dq}{da_{\perp} dt} \hat{u} = \frac{dI}{da_{\perp}} \hat{u} \quad (6.4)$$

Η σχέση ανάμεσα στο ολικό ρεύμα I και την πυκνότητα ρεύματος βρίσκεται ως εξής: Παρατηρούμε ότι

$$\vec{J} \cdot \vec{da} = \frac{dI}{da_{\perp}} \hat{u} \cdot \vec{da} = \frac{dI}{da_{\perp}} da_{\perp} = dI$$

Η (6.3) τότε γράφεται:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{da} \quad (6.5)$$

Στην ειδική περίπτωση που η S είναι *επίπεδη* επιφάνεια και το \vec{J} είναι *σταθερό* πάνω στην S και *κάθετο* σε αυτή σε κάθε σημείο της, τα \vec{J} και \vec{da} είναι παράλληλα (θεωρούμε πως είναι και ομόρροπα) και $\vec{J} \cdot \vec{da} = |\vec{J}| |\vec{da}| = J da$, όπου το J είναι σταθερό πάνω στην S . Άρα,

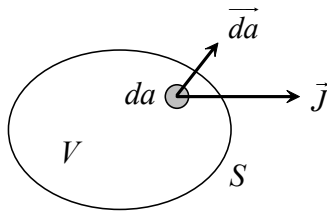
$$I = \int_S J da = J \int_S da = JS \Rightarrow$$

$$J = \frac{I}{S} \quad (6.6)$$

όπου το S παριστά και το εμβαδόν της επιφάνειας. Η σχέση (6.6) περιγράφει, για παράδειγμα, την πυκνότητα ρεύματος στο εσωτερικό ενός μεταλλικού σύρματος εμβαδού διατομής S (βλ. Παρ.2.4).

6.2 Εξίσωση Συνεχείας

Θεωρούμε μια *κλειστή* επιφάνεια S που περικλείει έναν όγκο V :



Εξ ορισμού, το στοιχειώδες διάνυσμα \vec{da} κατευθύνεται προς το *εξωτερικό* της S . Άρα, όταν μιλάμε για φορτίο που διαπερνά τη στοιχειώδη επιφάνεια da με κατεύθυνση σύμφωνη με το \vec{da} , εννοούμε φορτίο που *εξέρχεται* από την S . Το ολικό φορτίο ανά μονάδα χρόνου που εξέρχεται από την S δίνεται από τη σχέση (6.5):

$$I = \frac{dQ}{dt} = \oint_S \vec{J} \cdot \vec{da} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ολοκληρωτικό θεώρημα του Gauss. Επειδή το φορτίο διατηρείται (ούτε χάνεται ούτε δημιουργείται εκ του μηδενός), όσο φορτίο εμφανίστηκε έξω από τον όγκο V σε χρόνο dt τόσο φορτίο χάθηκε μέσα από τον όγκο αυτό στο ίδιο χρονικό διάστημα. Έτσι, η μεταβολή του ολικού φορτίου ανά μονάδα χρόνου μέσα στον όγκο V θα είναι

$$\frac{dQ_{in}}{dt} = - \frac{dQ}{dt} = - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv \quad (6.7)$$

Από την άλλη μεριά, αν $\rho(\vec{r}, t)$ είναι η πυκνότητα φορτίου μέσα στον V τη χρονική στιγμή t ,

$$Q_{in} = \int_V \rho dv$$

Το ολοκλήρωμα είναι τελικά συνάρτηση μόνο του t , αφού αναλυτικά γράφεται (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες):

$$\int_V \rho(x, y, z, t) dx dy dz$$

Έτσι,

$$\frac{dQ_{in}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (6.8)$$

Συγκρίνοντας τις (6.7) και (6.8), βρίσκουμε:

$$- \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \Rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dv = 0$$

Ο μηδενισμός του ολοκληρώματος για *αυθαίρετη* επιλογή του όγκου V απαιτεί το μηδενισμό της ίδιας της συνάρτησης που ολοκληρώνεται:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (6.9)$$

Η σχέση (6.9) καλείται *εξίσωση συνεχείας*. Από τον τρόπο που την εξάγαμε είναι φανερό ότι εκφράζει τη *διατήρηση του φορτίου*. Θα την συναντήσουμε ξανά στο Κεφ.9.

6.3 Νόμος του Ohm

Όπως γνωρίζουμε, το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} στο εσωτερικό ενός αγωγού που βρίσκεται σε *ηλεκτροστατική ισορροπία* είναι μηδέν. (Πράγματι, ένα πεδίο $\vec{E} \neq 0$ θα έθετε σε κίνηση τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού, πράγμα που θα παραβίαζε τη συνθήκη ηλεκτροστατικής ισορροπίας.) Από την άλλη μεριά, είναι φανερό ότι στο εσωτερικό αγωγού που *διαρρέεται από ρεύμα* θα πρέπει να υφίσταται μη-μηδενικό πεδίο \vec{E} . Το πεδίο αυτό ασκεί δυνάμεις στα ελεύθερα ηλεκτρόνια, επιταχύνοντάς τα. Η ταχύτητα των ηλεκτρονίων θα αύξανε απεριόριστα με το χρόνο αν αυτά δεν έχαναν κινητική ενέργεια λόγω συγκρούσεών τους με τα ιόντα του μετάλλου. Έτσι, τα ηλεκτρόνια αποκτούν τελικά μια σταθερή μέση ταχύτητα \vec{v} . Συμβατικά, θεωρούμε τα ηλεκτρόνια σαν *θετικά* φορτισμένα σωμάτια έτσι ώστε το \vec{v} να είναι *ομόρροπο* με το \vec{E} (στην πραγματικότητα, βέβαια, συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο). Όπως αποδεικνύεται εμπειρικά, για σχετικά μικρές τιμές του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι ανάλογη της έντασης του πεδίου:

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \quad (6.10)$$

Ο συντελεστής μ καλείται *ευκινησία* του ηλεκτρονίου για το θεωρούμενο μέταλλο. Όπως εξηγήσαμε στο Κεφ.2, η ευκινησία ελαττώνεται με τη θερμοκρασία με αποτέλεσμα την αύξηση της αντίστασης του μετάλλου.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.2) και (6.10), έχουμε: $\vec{J} = \rho_{\kappa} \mu \vec{E}$, όπου ρ_{κ} η πυκνότητα του *κινούμενου* φορτίου (αυτό περιλαμβάνει *μόνο* τα ελεύθερα ηλεκτρόνια και *όχι* τα ιόντα του μετάλλου). Μπορούμε να γράψουμε

$$\rho_{\kappa} = q_e n \quad (6.11)$$

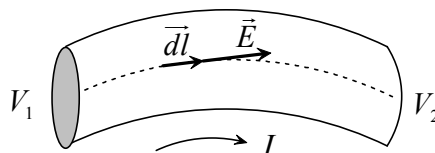
όπου q_e το φορτίο του ηλεκτρονίου (συμβατικά θετικό) και n η *ηλεκτρονική πυκνότητα* του μετάλλου (πλήθος ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου). Έτσι, $\vec{J} = q_e n \mu \vec{E}$. Η ποσότητα

$$\sigma = q_e n \mu \quad (6.12)$$

καλείται *ειδική αγωγιμότητα* του μετάλλου. Καταλήγουμε λοιπόν στη γνωστή μας γενική μορφή του νόμου του Ohm:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \quad (6.13)$$

Θεωρούμε τώρα την ειδική περίπτωση ενός μεταλλικού σύρματος μήκους l και σταθερής διατομής εμβαδού S , το οποίο διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I . Καλούμε $\Delta V = V_1 - V_2$ την τάση (διαφορά δυναμικού) στα άκρα του σύρματος:



Η πυκνότητα ρεύματος \vec{J} στο σύρμα έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στον άξονα του σύρματος και είναι στη φορά κίνησης των (συμβατικά θετικών) φορτίων. Κατά συνθήκη, αυτή είναι και η φορά του ρεύματος I . Από το νόμο του Ohm (6.13), την ίδια κατεύθυνση θα έχει και το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} στο εσωτερικό του σύρματος. Επιπλέον, το μέτρο E του πεδίου είναι σταθερό κατά μήκος του σύρματος. Πράγματι, παίρνοντας το μέτρο της (6.13) και συνδυάζοντάς το με την (6.6), έχουμε:

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\sigma S} = \text{σταθερό} \quad (6.14)$$

διότι τα I , σ , S είναι σταθερά κατά μήκος του σύρματος. Έστω τώρα \vec{dl} μια απειροστή μετατόπιση κατά μήκος του άξονα του σύρματος και στην κατεύθυνση του \vec{J} (άρα και του \vec{E}). Στη μετατόπιση αυτή αντιστοιχεί μια απειροστή μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = -|\vec{E}| |\vec{dl}| = -E dl$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το E είναι σταθερό κατά μήκος του σύρματος, έχουμε:

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_0^l E dl = -E \int_0^l dl \Rightarrow V_1 - V_2 \equiv \Delta V = El \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{\Delta V}{l} = \frac{V_1 - V_2}{l}} \quad (6.15)$$

(παρατηρήστε ότι $V_1 > V_2$ αφού, εξ ορισμού, το μέτρο $E > 0$). Στην ειδική περίπτωση που το σύρμα είναι *ευθύγραμμο*, το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} στο εσωτερικό του θα έχει σταθερό μέτρο και σταθερή κατεύθυνση, θα είναι δηλαδή *ομογενές*. Στην περίπτωση αυτή, η σχέση (6.15) δεν είναι άλλη από τη γνωστή σας έκφραση για την ένταση ενός ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου (βλ. Άσκηση στο τέλος του Κεφ.5).

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις του E στις (6.14) και (6.15) δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι

$$\boxed{I = \frac{\Delta V}{R}} \quad (6.16)$$

όπου R η αντίσταση του σύρματος:

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (6.17)$$

Η (6.16) εκφράζει την *ειδική μορφή του νόμου του Ohm* για μεταλλικά σύρματα σταθερής διατομής. Προσέξτε ότι δεν απαιτείται το σύρμα να είναι ευθύγραμμο (κάτι που, χάριν απλότητας, είχαμε υποθέσει στο Κεφ.2).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε ένα ρεύμα ηλεκτρονίων και ένα ρεύμα οπών σε έναν *καθαρό* ημιαγωγό. Τα ηλεκτρόνια και οι οπές κινούνται υπό την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου. Υποθέτουμε, προσεγγιστικά, ότι οι ευκινήσιες των δύο φορέων είναι ίσες μεταξύ τους. Να συγκριθούν οι αντίστοιχες πυκνότητες ρεύματος για τους δύο φορείς.
2. Ξεκινώντας με την εξίσωση συνεχείας (6.9) και εργαζόμενοι με αντίστροφο τρόπο σε σχέση με την Παρ.6.2, δείξτε ότι το φυσικό περιεχόμενο της (6.9) είναι η αρχή διατήρησης του φορτίου.
3. Ένας αγωγός βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία. Χρησιμοποιώντας τους νόμους Ohm και Gauss δείξτε ότι ηλεκτρικό φορτίο συνολικά διάφορο του μηδενός μπορεί να υπάρξει μόνο στην επιφάνεια του αγωγού.
4. Συνδέουμε το ένα άκρο ενός μεταλλικού σύρματος με το θετικό πόλο μιας μπαταρίας και το άλλο άκρο με τον αρνητικό πόλο. Ποια θα είναι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου και του ηλεκτρικού ρεύματος στο σύρμα; Ποια θα είναι η *πραγματική* φορά κίνησης των ηλεκτρικών φορέων; (Ο θετικός πόλος της μπαταρίας βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό σε σχέση με τον αρνητικό. Κατά συνθήκη, ως φορά του ρεύματος θεωρείται η φορά του διανύσματος της πυκνότητας ρεύματος.)
5. Γιατί η ειδική μορφή (6.16) του νόμου του Ohm ισχύει μόνο όταν η διατομή του μεταλλικού σύρματος είναι σταθερή; Κάτω από ποιες προϋποθέσεις το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του σύρματος είναι ομογενές;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ένα μεταλλικό σύρμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I . Δείξτε ότι (α) το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του σύρματος είναι στατικό, (β) το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο στο εσωτερικό του σύρματος είναι μηδέν (δηλαδή, στο εσωτερικό του το σύρμα είναι ηλεκτρικά ουδέτερο).

Λύση: Καλούμε ρ την ολική πυκνότητα φορτίου στο εσωτερικό του σύρματος. Η πυκνότητα αυτή οφείλεται σε όλα τα φορτία, κινούμενα ηλεκτρόνια και ακίνητα θετικά ιόντα, και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την πυκνότητα ρ_k των κινούμενων ηλεκτρονίων. Γνωρίζουμε τρεις βασικούς νόμους:

$$\text{Νόμος Ohm:} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1)$$

$$\text{Νόμος Gauss:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\text{Εξίσωση συνεχειάς:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

Επειδή το ρεύμα I είναι χρονικά σταθερό,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0 &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \text{ (στατικό } \vec{E}) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \\ &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \rho_{in} = 0 \Rightarrow Q_{in} = \int \rho_{in} dv = 0 \end{aligned}$$

Φυσική ερμηνεία: Κάτω από συνθήκες όπου το ρεύμα στο σύρμα είναι σταθερό, το φορτίο των κινούμενων ηλεκτρονίων αντισταθμίζεται από το αντίθετο φορτίο των (ακίνητων) ιόντων του μετάλλου έτσι ώστε ο αγωγός να είναι στο εσωτερικό του ηλεκτρικά ουδέτερος. (**Παρατήρηση:** Στον υπολογισμό της ολικής πυκνότητας ρ το ηλεκτρόνιο λαμβάνεται πάντα ως αρνητικά φορτισμένο! Αυτό γίνεται γιατί το μέγεθος ρ από μόνο του αφορά παρουσία και όχι κίνηση φορτίων. Έτσι, δεν έχει νόημα η συμβατική αντιστροφή του προσήμου του φορτίου του ηλεκτρονίου. Αντίθετα, στη σχέση $\vec{J} = \rho_k \vec{v}$ για τα κινούμενα ηλεκτρόνια μπορούμε ταυτόχρονα να αντιστρέψουμε τα πρόσημα στα ρ_k και \vec{v} , πράγμα που δεν επηρεάζει την πυκνότητα ρεύματος \vec{J} .)

2. Αποδείξτε τον πρώτο νόμο του Kirchhoff: Σε μια περιοχή R του χώρου στην οποία το ηλεκτρικό πεδίο είναι στατικό, το ολικό ηλεκτρικό ρεύμα δια μέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας είναι μηδέν.

Λύση: Στατικό ηλεκτρικό πεδίο $\Rightarrow \partial \vec{E} / \partial t = 0, \forall \vec{r} \in R$. Από το νόμο του Gauss,

$$\rho = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0, \forall \vec{r} \in R$$

Τότε, από την εξίσωση συνεχειάς,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \forall \vec{r} \in R$$

Παίρνουμε το ολοκλήρωμα της τελευταίας εξίσωσης μέσα σε έναν όγκο V που έχει σαν όριο μια κλειστή επιφάνεια S :

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv = 0$$

Το ολοκλήρωμα όγκου μετασχηματίζεται σε κλειστό επιφανειακό με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού θεωρήματος του Gauss:

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{da} = 0$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα παριστά το ολικό ρεύμα δια μέσου της κλειστής επιφάνειας S . Ο μηδενισμός του ολοκληρώματος αυτού σημαίνει ότι όσο ρεύμα εισέρχεται στην S τόσο και εξέρχεται. Αυτό οφείλεται στο ότι, στην περίπτωση των στατικών πεδίων δεν υπάρχει επιπλέον συγκέντρωση αλλά ούτε και απώλεια ηλεκτρικού φορτίου σε οποιαδήποτε περιοχή του χώρου (αυτό, εξάλλου, δηλώνεται και από τη χρονική σταθερότητα της πυκνότητας φορτίου ρ). Στο όριο που $V \rightarrow 0$ η κλειστή επιφάνεια S εκφυλίζεται σε σημείο. Στην περίπτωση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος ένα τέτοιο σημείο αποτελεί έναν *κόμβο*, πάνω στον οποίο εφαρμόζεται η γνώριμή σας απλούστερη μορφή του πρώτου νόμου του Kirchhoff.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΤΑΤΙΚΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

7.1 Μαγνητικό Πεδίο και Νόμος Biot-Savart

Αν ο λόγος ύπαρξης ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι το ηλεκτρικό φορτίο, ο λόγος ύπαρξης ενός μαγνητικού πεδίου είναι το ηλεκτρικό ρεύμα. Το ηλεκτρικό πεδίο παράγεται από ηλεκτρικά φορτία και επιδρά σε όλα τα φορτία, ανεξάρτητα από την κίνησή τους. Το μαγνητικό πεδίο παράγεται από κινούμενα φορτία και επιδρά μόνο σε κινούμενα φορτία. Φυσικά, η κινητική κατάσταση ενός φορτίου εξαρτάται και από τον παρατηρητή: Ένα φορτίο μπορεί να κινείται ως προς ένα παρατηρητή A αλλά να είναι ακίνητο ως προς έναν άλλο παρατηρητή B που ταξιδεύει μαζί με το φορτίο. Ο A θα καταγράψει μαγνητικό πεδίο ενώ ο B όχι.

Η μαγνητική δύναμη πάνω σε ένα φορτίο q κινούμενο με ταχύτητα \vec{v} μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης \vec{B} ισούται με

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.1)$$

Αν στο χώρο υπάρχει και ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , η ολική δύναμη (δύναμη Lorentz) στο q είναι

$$\vec{F} = q[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})] \quad (7.2)$$

Όπως θα δείξουμε τώρα,

οι μαγνητικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο, έτσι δεν επηρεάζουν το μέτρο (αλλά μόνο τη διεύθυνση) της ταχύτητας των φορτίων.

Πράγματι: Το έργο της μαγνητικής δύναμης κατά τη μετατόπιση ενός φορτίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο δίνεται από μια έκφραση της μορφής

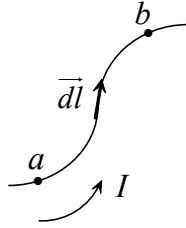
$$W_m = \int_a^b \vec{F}_m \cdot \vec{dl} = q \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = 0$$

αφού

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt = [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}] dt = 0$$

Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, $\Delta E_k = W_m = 0 \Rightarrow E_k = \text{σταθερό} \Rightarrow v = \text{σταθερό}$, όπου v το μέτρο της ταχύτητας του φορτίου.

Έστω τώρα ότι, αντί για ένα σημειακό φορτίο q έχουμε ένα ρεύμα I που διαρρέει ένα μεταλλικό σύρμα. Το σύρμα είναι τοποθετημένο μέσα σε ένα στατικό (χρονικά σταθερό) μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r})$ (το πεδίο αυτό προϋπήρχε και δεν οφείλεται στην παρουσία του ρεύματος I). Έστω $d\vec{l}$ μια στοιχειώδης μετατόπιση κατά μήκος του σύρματος στη φορά κίνησης των συμβατικά θετικών φορτίων (αυτή είναι, εξ ορισμού, και η φορά του ρεύματος I):



Αν από κάθε σημείο του σύρματος περνάει φορτίο dq σε χρόνο dt , τότε $I=dq/dt$. Μέσα στο χρονικό διάστημα dt το φορτίο dq διατρέχει το τμήμα \vec{dl} του σύρματος. Το στοιχειώδες αυτό τμήμα, λοιπόν, περιέχει φορτίο $dq=Idt$ κινούμενο με ταχύτητα $\vec{v} = \vec{dl}/dt$. Έστω τώρα \vec{B} η τιμή του μαγνητικού πεδίου στη θέση που βρίσκεται το \vec{dl} . Η στοιχειώδης μαγνητική δύναμη που δέχεται το τμήμα \vec{dl} είναι

$$d\vec{F}_m = dq(\vec{v} \times \vec{B}) = Idt\left(\frac{\vec{dl}}{dt} \times \vec{B}\right) = I(\vec{dl} \times \vec{B})$$

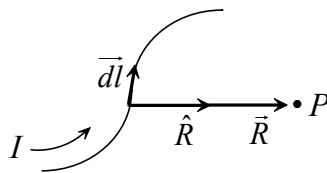
Έτσι, η μαγνητική δύναμη που δέχεται ένα πεπερασμένο τμήμα ab του σύρματος είναι

$$\vec{F}_m = I \int_a^b \vec{dl} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (7.3)$$

Προσέξτε ότι το ολοκλήρωμα είναι επικαμπύλιο κατά μήκος του σύρματος. Αν dx , dy , dz είναι οι συνιστώσες τού \vec{dl} , το εξωτερικό γινόμενο στην (7.3) υπολογίζεται με την ορίζουσα

$$\vec{dl} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ dx & dy & dz \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Όπως μια στατική κατανομή (πυκνότητα) φορτίου $\rho(\vec{r})$ παράγει ένα ηλεκτροστατικό πεδίο $\vec{E}(\vec{r})$, έτσι και μια στατική κατανομή (πυκνότητα) ρεύματος $\vec{J}(\vec{r})$ παράγει ένα στατικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r})$ (ο όρος *στατικό* σημαίνει *χρονικά αμετάβλητο*). Με πιο απλά λόγια, ένα σύστημα χρονικά σταθερών (κατά μέτρο και κατεύθυνση) ρευμάτων I_1, I_2, \dots , παράγουν ένα στατικό μαγνητικό πεδίο \vec{B} . Έστω ένα τέτοιο ρεύμα I και έστω \vec{dl} μια στοιχειώδης μετατόπιση κατά μήκος του σύρματος στη φορά του ρεύματος. Θεωρούμε ένα σημείο P του χώρου στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή $\vec{B}(P)$ του μαγνητικού πεδίου που παράγεται από το I . Καλούμε \vec{R} το στιγμιαίο διάνυσμα θέσης τού P ως προς το \vec{dl} , και $\hat{R} = \vec{R}/R$ (όπου $R=|\vec{R}|$) το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του \vec{R} :



Όπως βρίσκεται εμπειρικά, το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο στο σημείο P , που οφείλεται στο τμήμα \vec{dl} του σύρματος, ισούται με

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl} \times \hat{R}}{R^2}$$

όπου $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ ($1 \text{ A} \equiv 1 \text{ Ampere} = 1 \text{ C/s}$, η μονάδα έντασης ρεύματος στο S.I.). Έτσι, το μαγνητικό πεδίο στο P , που οφείλεται σε ολόκληρο το σύρμα, είναι

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\vec{dl} \times \hat{R}}{R^2} \quad (7.4)$$

όπου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος του σύρματος. Η σχέση (7.4) εκφράζει το νόμο *Biot-Savart* και αποτελεί για το Μαγνητισμό το ανάλογο του νόμου του Coulomb στον Ηλεκτρισμό.

7.2 Νόμος του Gauss για το Μαγνητισμό

Όπως γνωρίζουμε, «πηγή» ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι το ηλεκτρικό φορτίο (ανεξάρτητα από την κίνησή του). Σύμφωνα με το νόμο του Gauss, η ηλεκτρική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι ένα μέτρο του αριθμού των πηγών που βρίσκονται στο εσωτερικό της επιφάνειας (με άλλα λόγια, του ολικού ηλεκτρικού φορτίου που περικλείεται από την επιφάνεια). Όμως, ποιες είναι οι πηγές του μαγνητικού πεδίου; Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε, το πεδίο αυτό οφείλει την ύπαρξή του σε *κινούμενα* ηλεκτρικά φορτία (ηλεκτρικά ρεύματα), ενώ στη Φύση δεν έχουν ποτέ ανιχνευθεί ελεύθεροι (μεμονωμένοι) *μαγνητικοί πόλοι* (μαγνητικά «φορτία»). Αυτό, μεταξύ άλλων, σημαίνει ότι

η ολική μαγνητική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (7.5)$$

Αυτό ερμηνεύεται λέγοντας ότι, όσες δυναμικές γραμμές του πεδίου \vec{B} εισέρχονται στην S τόσες και εξέρχονται από αυτήν, αφού στο εσωτερικό της S δεν υπάρχουν μαγνητικά φορτία από τα οποία θα μπορούσαν να ξεκινούν πρόσθετες μαγνητικές δυναμικές γραμμές. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κλειστές (δεν έχουν αρχή και τέλος)

σε αντίθεση με αυτές του ηλεκτρικού πεδίου οι οποίες ξεκινούν από (ή καταλήγουν σε) ηλεκτρικά φορτία.

Κάνοντας χρήση του ολοκληρωτικού θεωρήματος του Gauss, μπορούμε να μετασχηματίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην (7.5) σε ολοκλήρωμα όγκου:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dv = 0$$

όπου V ο όγκος που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S . Για να ισχύει αυτό για αυθαίρετο όγκο V , θα πρέπει να ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (7.6)$$

η οποία αποτελεί τη διαφορική μορφή του νόμου του Gauss για το μαγνητικό πεδίο. Παρατηρούμε ότι στο δεξί μέλος της (7.6) δεν υπάρχει «πυκνότητα μαγνητικού φορτίου» ανάλογη με την πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου ρ που εμφανίζεται στο νόμο του Gauss (5.8) για το ηλεκτρικό πεδίο.

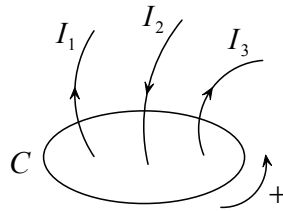
Σύμφωνα με τη σχέση (7.6), το μαγνητικό πεδίο είναι σωληνωτό. Έτσι (βλ. Παρ.4.3),

η μαγνητική ροή $\int_S \vec{B} \cdot \vec{d}\vec{a}$ μέσα από ανοιχτή επιφάνεια S εξαρτάται μόνο από το περίγραμμα C (κλειστή καμπύλη) της S και είναι ίδια για όλες τις (ανοιχτές) επιφάνειες που έχουν κοινό περίγραμμα C .

Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει με την ηλεκτρική ροή $\int_S \vec{E} \cdot \vec{d}\vec{a}$, γιατί μεταξύ δύο επιφανειών με κοινό όριο (περίγραμμα) μπορεί να περικλείονται ηλεκτρικά φορτία από τα οποία ξεκινούν (ή στα οποία καταλήγουν) πρόσθετες ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές. Οι γραμμές αυτές θα διαφοροποιήσουν την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από τις δύο επιφάνειες.

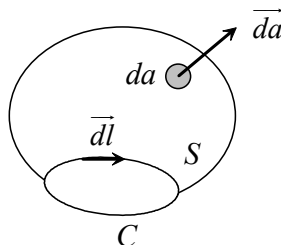
7.3 Νόμος του Ampère

Θεωρούμε έναν κλειστό βρόχο C στον οποίο έχουμε αυθαίρετα ορίσει μια θετική φορά διαγραφής. Έστω ότι μέσα από τον C διέρχονται ρεύματα I_1, I_2, \dots :



Το ολικό ρεύμα που διέρχεται μέσα από το βρόχο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των I_1, I_2, \dots . Στο άθροισμα αυτό τα πρόσημα των ρευμάτων καθορίζονται με βάση τον «κανόνα του δεξιού χεριού»: Λυγίζουμε τα τέσσερα δάχτυλα του δεξιού χεριού κατά τη θετική φορά διαγραφής του βρόχου. Θετικά λαμβάνονται τα ρεύματα που η φορά τους συμφωνεί με την κατεύθυνση του αντίχειρα, ενώ αυτά που έχουν αντίθετη φορά λαμβάνονται ως αρνητικά. Έτσι, το ολικό ρεύμα μέσα από το βρόχο C του παραπάνω σχήματος είναι $I_{in} = I_1 - I_2 + I_3$ (όπου τα I_1, I_2, I_3 παριστούν τα μέτρα των τριών ρευμάτων, έτσι ώστε είναι εξ ορισμού θετικές ποσότητες). Θυμίζουμε ότι, γενικά, ως φορά ενός ρεύματος I λαμβάνεται η φορά της αντίστοιχης πυκνότητας ρεύματος \vec{J} .

Υποθέτουμε τώρα ότι ο βρόχος C είναι το όριο (περίγραμμα) μιας ανοιχτής επιφάνειας S . Έστω \vec{dl} ένα στοιχείο του C προσανατολισμένο στη θετική φορά διαγραφής του βρόχου, και έστω \vec{da} ένα στοιχείο της S . Η σχετική φορά των \vec{dl} και \vec{da} καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως εξηγήσαμε στην Παρ.4.2:



Καλούμε I_{in} το ολικό ρεύμα που διέρχεται μέσα από την καμπύλη C . Υπάρχουν ενδεχομένως και άλλα ρεύματα, έξω από τη C , τα οποία δεν συμπεριλαμβάνονται στο I_{in} . Όλα τα ρεύματα είναι χρονικά σταθερά και όλα μαζί, εσωτερικά και εξωτερικά της C , παράγουν στο χώρο ένα στατικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r})$. Όπως προκύπτει από το νόμο Biot-Savart, η τιμή του κλειστού επικαμπύλιου ολοκληρώματος του \vec{B} πάνω στη C εξαρτάται μόνο από το εσωτερικό ρεύμα I_{in} (παρόλο που, όπως προαναφέραμε, το ίδιο το \vec{B} εξαρτάται και από τα εξωτερικά ρεύματα). Συγκεκριμένα,

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{in} \quad (7.7)$$

Η (7.7) αποτελεί το νόμο του Ampère σε ολοκληρωτική μορφή. Προσέξτε ότι το «πνεύμα» του νόμου αυτού είναι όμοιο με αυτό του νόμου του Gauss για τον Ηλεκτρισμό.

Τώρα, από το θεώρημα του Stokes,

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{da}$$

Επίσης, το ρεύμα που διέρχεται μέσα από το βρόχο C θα διέρχεται και μέσα από κάθε ανοιχτή επιφάνεια S με περίγραμμα C . Έτσι, αν $\vec{J}(\vec{r})$ είναι η πυκνότητα ρεύματος πάνω στην S ,

$$I_{in} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{da}$$

Η (7.7) τότε γράφεται:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{da} = \int_S \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{da}$$

Για να ισχύει η ισότητα για αυθαίρετη επιφάνεια S , θα πρέπει

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (7.8)$$

Η (7.8) εκφράζει το νόμο του Ampère σε διαφορική μορφή.

Παρατηρήσεις:

1. Ο νόμος του Gauss (5.8) στον Ηλεκτρισμό, καθώς και ο αντίστοιχος νόμος (7.6) για το Μαγνητισμό, έχουν γενική ισχύ για όλα τα πεδία \vec{E} και \vec{B} , στατικά και χρονικά μεταβαλλόμενα. Αντίθετα, ο νόμος του Ampère στη μορφή (7.8) ισχύει μόνο για στατικά πεδία \vec{B} . Όμοια, η σχέση $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ισχύει μόνο για στατικά ηλεκτρικά πεδία. Όπως θα δούμε αργότερα, οι δύο τελευταίοι αυτοί νόμοι χρειάζονται αναθεώρηση στην περίπτωση των χρονικά-μεταβαλλόμενων πεδίων.
2. Ο νόμος του Gauss (7.6) για το Μαγνητισμό, καθώς και ο νόμος του Ampère (7.8) για στατικά μαγνητικά πεδία, είναι σε συμφωνία με το νόμο Biot-Savart. Κατ' ανάλογο τρόπο, ο νόμος του Gauss (5.8) στον Ηλεκτρισμό και η σχέση $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ για στατικά ηλεκτρικά πεδία, είναι σε συμφωνία με το νόμο του Coulomb.
3. Η μονάδα έντασης του μαγνητικού πεδίου στο S.I. είναι το *Tesla* (T). Όπως προκύπτει από τη σχέση (7.1), $1 T = 1 N / (A \cdot m)$.

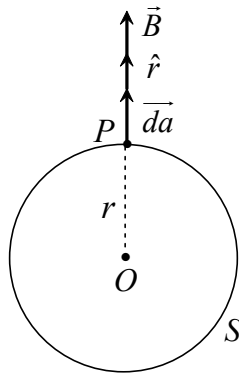
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Αναφέρθηκε ότι το μαγνητικό πεδίο παράγεται από κινούμενα φορτία και επιδρά μόνο σε κινούμενα φορτία. Πώς προκύπτουν αυτά με βάση τις θεμελιώδεις εξισώσεις του Μαγνητισμού;
2. Στο εσωτερικό ενός μακρύ, ευθύγραμμου σωλήνα υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} με διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα του σωλήνα. Ένα φορτίο q εισέρχεται στο σωλήνα με αρχική ταχύτητα κάθετη στη διατομή του. Θα εξέλθει ποτέ το q από το σωλήνα;
3. Ένα φορτισμένο σωματίο διέφυγε από το εργαστήριό μας και κινείται ελεύθερα στην κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα x . Θέλουμε να το σταματήσουμε, και για το σκοπό αυτό σκεφτόμαστε να «φράξουμε» το δρόμο του στήνοντας ένα κατάλληλο πεδίο στην περιοχή όπου κινείται. Τι πεδίο πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, ηλεκτρικό ή μαγνητικό; Ποια θα πρέπει να είναι η κατεύθυνση του πεδίου αυτού αν το σωματίο είναι (α) πρωτόνιο; (β) ηλεκτρόνιο;
4. Ένας εκκεντρικός μάγεις φοράει δύο σκούφους, έναν μικρό εσωτερικά και έναν λίγο μεγαλύτερο εξωτερικά. Για να μην κάνει τον κόπο να τους βάζει και να τους βγάζει έναν-έναν, έχει ράψει μαζί τα ανοίγματά τους (που έχουν την ίδια περίμετρο), φτιάχνοντας στην ουσία ένα διπλό σκούφο. Ο μάγεις ανήκει στο προσωπικό του εργαστηρίου ενός επιστήμονα ο οποίος κάνει πειράματα πάνω στα μαγνητικά πεδία. Ο μάγεις εισέρχεται στο εργαστήριο για να δώσει δείγμα του μενού της ημέρας τη στιγμή που ο επιστήμονας μελετά ένα μαγνητικό πεδίο που υπάρχει στο χώρο του εργαστηρίου. Από ποιο σκούφο θα περάσει περισσότερη μαγνητική ροή;
5. Βρισκόμαστε στην πλατεία ενός μικρού χωριού. Λίγο έξω από το χωριό, εξωγήινοι έχουν κατασκευάσει έναν τεράστιο αγωγό που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I . Ένας επιστήμονας που πίνει τον καφέ του στην πλατεία αντιλαμβάνεται την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου. Για να ερευνήσει την προέλευσή του αποφασίζει να χωρίσει την περίμετρο της πλατείας σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος από στοιχειώδη τμήματα \vec{dl}_i ($i=1,2,\dots$) και σε κάθε ένα από αυτά να καταγράψει την αντίστοιχη τιμή \vec{B}_i του μαγνητικού πεδίου. Η πρόθεσή του είναι να υπολογίσει το άθροισμα $\sum_i \vec{B}_i \cdot \vec{dl}_i$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει το αποτέλεσμα χωρίς να κοπιήσει; [Υπόδειξη: Ένα άθροισμα σαν το παραπάνω μπορεί οριακά να αντικατασταθεί από επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.]

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Το πεδίο Coulomb (5.3) είναι μια ειδική περίπτωση ακτινωτού πεδίου της μορφής $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$, όπου $r = |\vec{r}|$ και $\hat{r} = \vec{r}/r$ (το \vec{r} παριστά το διάνυσμα θέσης του σημείου στο οποίο μετράμε το ηλεκτρικό πεδίο, ως προς τη θέση στην οποία βρίσκεται το σημειακό φορτίο που παράγει το πεδίο αυτό, ενώ το \hat{r} παριστά το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του \vec{r}). Δείξτε ότι δεν είναι δυνατό να υπάρχει ακτινωτό μαγνητικό πεδίο της μορφής $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\hat{r}$. Ποια είναι η φυσική ερμηνεία του συμπεράσματος αυτού;

Λύση: Έστω S μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r με κέντρο κάποιο σταθερό σημείο αναφοράς O :



Έστω \vec{B} το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P της S . Το διάνυσμα θέσης του P ως προς το O είναι $\vec{r} = \overline{OP}$. Από το νόμο του Gauss για το Μαγνητισμό, η ολική μαγνητική ροή μέσα από την S είναι μηδέν:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \overline{da} = 0 \Rightarrow \oint_S [B(r)\hat{r}] \cdot [(da)\hat{r}] = 0 \Rightarrow \oint_S B(r) da = 0$$

Επειδή το $B(r)$ είναι σταθερό πάνω στην S (αφού $r = \text{σταθ.}$ στην S),

$$B(r) \oint_S da = 0 \Rightarrow B(r)(4\pi r^2) = 0 \Rightarrow B(r) = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$$

Άρα, η υπόθεση ότι $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\hat{r}$ δεν ευσταθεί για $\vec{B} \neq 0$. Πράγματι, αν υπήρχε μαγνητικό πεδίο αυτής της μορφής η μαγνητική ροή μέσα από την S δεν θα ήταν μηδέν, κι αυτό θα σήμαινε ότι στο σημείο O , απ' όπου ξεκινούν ακτινωτά οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές, υπάρχει ένας μαγνητικός πόλος!

2. Δείξτε ότι μέσα από μια (κλειστή) δυναμική γραμμή ενός στατικού μαγνητικού πεδίου διέρχεται ολικό ρεύμα διάφορο του μηδενός.

Λύση: Έστω C μια δυναμική γραμμή του \vec{B} . Σε κάθε σημείο της C το \vec{B} είναι εφαπτόμενο σε αυτή, άρα συγγραμμικό και ομόρροπο με το στοιχείο \overline{dl} της C . Έτσι,

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overline{dl} = \oint_C |\vec{B}| |\overline{dl}| > 0 \quad (1)$$

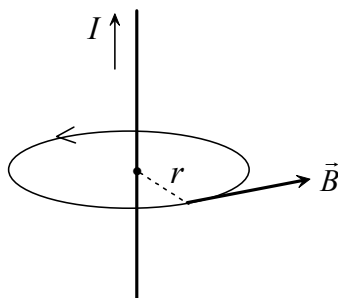
Από την άλλη μεριά, από το νόμο του Ampère,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) είναι φανερό ότι θα πρέπει $I_{in} \neq 0$.

3. Ένας μακρύς και λεπτός μεταλλικός κύλινδρος ακτίνας R , άδειος στο εσωτερικό του, διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I παράλληλο προς τον άξονά του. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο μέσα και έξω από τον κύλινδρο.

Λύση: Καταρχήν θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε ένα απλούστερο και πιο θεμελιώδες πρόβλημα: το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από ένα μακρύ, ευθύγραμμο ρεύμα I . Όπως βρίσκεται από το νόμο Biot-Savart, οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι κυκλικές με τα κέντρα τους στο ρεύμα και τα επίπεδά τους κάθετα σ' αυτό. Το μαγνητικό πεδίο \vec{B} είναι, φυσικά, εφαπτόμενο σε κάθε σημείο μιας δυναμικής γραμμής και η φορά του καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού: αν λυγίσουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού προς την κατεύθυνση του \vec{B} , ο αντίχειρας θα δείχνει στην κατεύθυνση του I :



Το μέτρο B του \vec{B} είναι σταθερό κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής. Αν r είναι η ακτίνα της γραμμής αυτής, βρίσκεται ότι

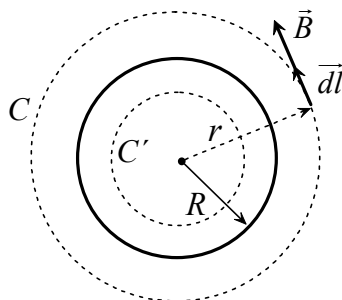
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (1)$$

Προσέξτε ότι αν ολοκληρώσουμε το \vec{B} κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής C , ο νόμος του Ampère επαληθεύεται αυτόματα:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C |\vec{B}| |d\vec{l}| = \oint_C B dl = B \oint_C dl = B(2\pi r) = \mu_0 I = \mu_0 I_{in}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι το B είναι σταθερό πάνω στη C , ίσο με $B(r)$.

Πίσω στο αρχικό πρόβλημα τώρα. Θεωρούμε μια κάθετη τομή του κυλίνδρου:



Φανταστείτε ότι ο άξονας του κυλίνδρου είναι κάθετος στη σελίδα, και το ρεύμα I έχει φορά προς τα έξω (προς εμάς). Επειδή το πρόβλημα έχει την ίδια συμμετρία με το ευθύγραμμο ρεύμα (κυλινδρική συμμετρία), οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου \vec{B} μέσα και έξω από τον κύλινδρο θα είναι κύκλοι κάθετοι στον κύλινδρο με κέντρα πάνω στον άξονά του, ενώ το μέτρο B του \vec{B} θα είναι σταθερό πάνω σε μια δυναμική γραμμή. Έστω C μια δυναμική γραμμή με ακτίνα $r > R$ (εξωτερική ως προς τον κύλινδρο). Εφαρμόζουμε το νόμο του Ampère για τον κλειστό βρόχο C , παρατηρώντας ότι $I_{in} = I$:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} \Rightarrow \mu_0 I = \oint_C |\vec{B}| |d\vec{l}| = \oint_C B dl = B \oint_C dl = B(2\pi r) \Rightarrow$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r > R \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τη (2) με την (1) παρατηρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του κυλίνδρου είναι ίδιο με αυτό που θα δημιουργούσε ένα ευθύγραμμο ρεύμα I ρέοντα κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου! Για να βρούμε το πεδίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου, εφαρμόζουμε το νόμο του Ampère για τον κλειστό βρόχο C' με $r < R$, προσέχοντας τώρα ότι $I_{in} = 0$:

$$\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} \Rightarrow 0 = \oint_{C'} |\vec{B}| |d\vec{l}| = \oint_{C'} B dl = B \oint_{C'} dl = B(2\pi r) \Rightarrow$$

$$B(r) = 0, \quad r < R$$

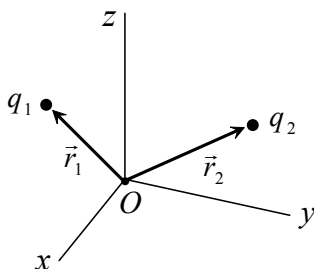
Δηλαδή, δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΣΤΗΝ ΥΛΗ

8.1 Ηλεκτρική και Μαγνητική Διπολική Ροπή

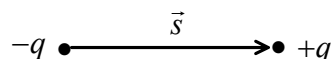
Θεωρούμε ένα σύστημα φορτίων q_1, q_2, \dots , που βρίσκονται στιγμιαία στις θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$, ως προς το σημείο αναφοράς O του συστήματος συντεταγμένων μας:



Η ηλεκτρική διπολική ροπή του συστήματος ορίζεται ως το διάνυσμα

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 + \dots \quad (8.1)$$

Παρατηρούμε ότι, γενικά, η \vec{p} εξαρτάται από την εκλογή του σημείου αναφοράς O . Σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις, όμως, η \vec{p} έχει απόλυτη γεωμετρική σημασία ανεξάρτητη του σημείου αναφοράς. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρικό δίπολο: δύο αντίθετα φορτία $q_1 = -q$ και $q_2 = +q$ σε απόσταση s μεταξύ τους. Καλούμε \vec{s} το διάνυσμα από το $-q$ στο $+q$:

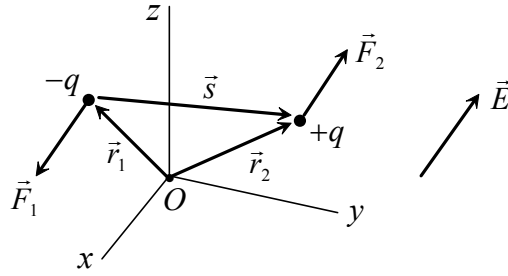


Η ηλεκτρική διπολική ροπή του συστήματος είναι $\vec{p} = (-q)\vec{r}_1 + q\vec{r}_2 = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{s}} \quad (8.2)$$

Προφανώς, η \vec{p} είναι ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου αναφοράς O .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τοποθετούμε ένα ηλεκτρικό δίπολο μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} . Τα δύο φορτία θα δεχθούν δυνάμεις $\vec{F}_1 = -q\vec{E}$, $\vec{F}_2 = +q\vec{E}$, οι οποίες αποτελούν ζεύγος δυνάμεων:

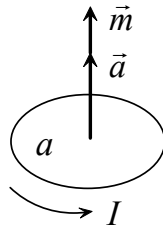


Στο δίπολο, λοιπόν, ασκείται εξωτερική ροπή ίση με

$$\begin{aligned}\vec{T} &= (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{E} = q\vec{s} \times \vec{E} \Rightarrow \\ \vec{T} &= \vec{p} \times \vec{E}\end{aligned}\quad (8.3)$$

(προσέξτε ότι η ροπή αυτή δεν εξαρτάται από το σημείο αναφοράς O). Παρατηρούμε ότι η ροπή \vec{T} τείνει να στρέψει το δίπολο έτσι ώστε η διπολική ροπή \vec{p} να ευθυγραμμιστεί με το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} .

Ο όρος *μαγνητικό δίπολο* είναι παραπλανητικός, αφού γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχουν μαγνητικοί πόλοι! Με τον όρο αυτό εννοούμε απλά έναν κλειστό ρευματικό βρόχο. Η παράδοση ονοματολογία οφείλεται στην παρατήρηση ότι η μαθηματική έκφραση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο βρόχος μοιάζει πολύ με την αντίστοιχη έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από ένα ηλεκτρικό δίπολο. Θεωρούμε λοιπόν ένα μικρό, επίπεδο βρόχο εμβαδού a , ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I . Ορίζουμε ένα διάνυσμα \vec{a} , μέτρου a , κάθετο στο επίπεδο του βρόχου, με φορά συμβατή με τη φορά του ρεύματος και καθοριζόμενη σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού:



Η *μαγνητική διπολική ροπή* του βρόχου είναι το διάνυσμα¹

$$\boxed{\vec{m} = I \vec{a}} \quad (8.4)$$

Προσέξτε ότι το \vec{m} είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόχου και η φορά του είναι συμβατή με τη φορά του I . (Όπως βρίσκεται από το νόμο Biot-Savart, το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από έναν *κυκλικό* ρευματικό βρόχο έχει την κατεύθυνση της μαγνητικής διπολικής ροπής \vec{m} σε κάθε σημείο του άξονα που είναι κάθετος στο βρόχο και διέρχεται από το κέντρο του.) Όταν ένα μαγνητικό δίπολο τοποθετείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο \vec{B} , δέχεται εξωτερική ροπή ίση με

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (8.5)$$

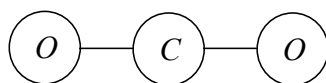
Η ροπή αυτή τείνει να ευθυγραμμίσει τη διπολική ροπή \vec{m} με το \vec{B} .

¹ Θεωρούμε ότι $I > 0$.

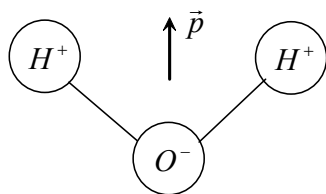
8.2 Διηλεκτρικά Μέσα

Όπως γνωρίζουμε, οι αγωγοί διαθέτουν στο εσωτερικό τους ένα πλήθος ελεύθερων ηλεκτρονίων τα οποία δεν είναι δεσμευμένα από άτομα του υλικού αλλά κινούνται ελεύθερα μέσα στο κρυσταλλικό πλέγμα. Αντίθετα, στους μονωτές (ή *διηλεκτρικά*) τα ηλεκτρόνια σθένους είναι δεσμευμένα από τα άτομα στα οποία ανήκουν και δεν είναι εύκολο να αποσπαστούν από αυτά. Θα μελετήσουμε τώρα τη συμπεριφορά ενός διηλεκτρικού μέσου όταν στο εσωτερικό του υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} .

Ας πάρουμε πρώτα την περίπτωση όπου το διηλεκτρικό αποτελείται από *ουδέτερα άτομα*. Φυσιολογικά, ένα τέτοιο άτομο δεν εμφανίζει ηλεκτρική διπολική ροπή διότι, λόγω συμμετρίας στην κατανομή του φορτίου, το «κέντρο βάρους» του αρνητικού φορτίου λόγω των ηλεκτρονίων συμπίπτει με το αντίστοιχο του θετικού φορτίου στον πυρήνα. Όταν όμως το άτομο βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} παρατηρείται μια σχετική μετατόπιση θετικού και αρνητικού φορτίου: ο πυρήνας μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση του \vec{E} ενώ τα ηλεκτρόνια προς την αντίθετη κατεύθυνση. Το άτομο τώρα μοιάζει με μικρό ηλεκτρικό δίπολο του οποίου η διπολική ροπή \vec{p} είναι στην κατεύθυνση του \vec{E} . Αν μάλιστα το \vec{E} δεν είναι πολύ ισχυρό, η \vec{p} είναι περίπου ανάλογη του \vec{E} . Επειδή η \vec{p} οφείλεται αποκλειστικά στο \vec{E} (δεν προϋπήρχε), λέμε ότι η ροπή αυτή *επάγεται* από το ηλεκτρικό πεδίο. Ανάλογο φαινόμενο έχουμε και στην περίπτωση που το διηλεκτρικό αποτελείται από *μη-πολικά μόρια* (που δεν έχουν, δηλαδή, εξαρχής ηλεκτρική διπολική ροπή), όπως π.χ. το CO_2 :



Μερικά διηλεκτρικά αποτελούνται από *πολικά μόρια* που διαθέτουν *εξαρχής* κάποια ηλεκτρική διπολική ροπή \vec{p} . Τέτοια είναι η περίπτωση του H_2O :



Τα ηλεκτρόνια στο μόριο του H_2O τείνουν αυθόρμητα να συσπειρώνονται πιο κοντά προς το άτομο του οξυγόνου, αφήνοντας τα άτομα του υδρογόνου θετικά φορτισμένα και προσδίδοντας αρνητικό φορτίο στο οξυγόνο. Όταν ένα τέτοιο μόριο βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , η *προϋπάρχουσα* ηλεκτρική διπολική ροπή \vec{p} θα τείνει να ευθυγραμμιστεί με το \vec{E} . Έτσι, το αποτέλεσμα θα είναι και πάλι μια διπολική ροπή στην κατεύθυνση του \vec{E} , μόνο που αυτή τη φορά η \vec{p} προϋπήρχε και δεν την επήγαγε το \vec{E} .

Και στις δύο κατηγορίες διηλεκτρικών μέσων που περιγράψαμε, το αποτέλεσμα της παρουσίας ενός ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} στο εσωτερικό τους είναι κοινό: η εμφάνιση ενός μεγάλου πλήθους από μικρά ηλεκτρικά δίπολα προσανατολισμένα στην κατεύθυνση του \vec{E} . Λέμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο προκαλεί *πόλωση* στο διηλεκτρικό και ορίζουμε το *διάνυσμα πόλωσης* \vec{P} ως τη διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου του υλικού:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \quad (8.6)$$

Σαν αποτέλεσμα της πόλωσης, στο εσωτερικό καθώς και στην επιφάνεια του διηλεκτρικού εμφανίζεται ένα νέο είδος φορτίων που καλούνται *φορτία πόλωσης*. Σε αντίθεση με τα ελεύθερα φορτία των αγωγών, τα φορτία πόλωσης είναι *δέσμια* σε συγκεκριμένα άτομα και δεν μπορούν να μετακινηθούν μέσα στο υλικό. Οφείλονται αποκλειστικά στη διαταραχή της αρχικής ηλεκτροστατικής ισορροπίας του υλικού λόγω της πόλωσης που προκαλεί το ηλεκτρικό πεδίο, και εξαφανίζονται μόλις απομακρυνθεί το \vec{E} . Η *πυκνότητα φορτίου πόλωσης* στο εσωτερικό του διηλεκτρικού ισούται με

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (8.7)$$

όπου υποθέσαμε ότι, γενικά, το διάνυσμα πόλωσης \vec{P} μεταβάλλεται στο χώρο. Στην περίπτωση που η πόλωση είναι *ομογενής*, το \vec{P} είναι σταθερό και $\rho_b=0$ στο εσωτερικό του διηλεκτρικού. Έτσι, σ' αυτή την περίπτωση τα φορτία πόλωσης περιορίζονται στην *επιφάνεια* του υλικού.

Αν στο εσωτερικό ή την επιφάνεια του διηλεκτρικού υπάρχουν και άλλα φορτία που δεν οφείλονται στην πόλωση, τούτα καλούνται *ελεύθερα φορτία* και η πυκνότητά τους συμβολίζεται ρ_f . Τα φορτία αυτά μπορεί να είναι, π.χ., ηλεκτρόνια στις πλάκες ενός πυκνωτή που είναι σε επαφή με το διηλεκτρικό, επιπρόσθετα εξωτερικά φορτία τοποθετημένα με κάποιον τρόπο μέσα στο υλικό, ιόντα Na^+ και Cl^- μέσα σε διάλυμα NaCl σε H_2O , κλπ.

Στην περιοχή ενός πολωμένου διηλεκτρικού, λοιπόν, η *ολική πυκνότητα φορτίου* θα είναι το άθροισμα

$$\rho = \rho_f + \rho_b \quad (8.8)$$

Αντίστοιχα, το *ολικό ηλεκτρικό πεδίο* \vec{E} , που οφείλεται σε όλα τα φορτία (ελεύθερα και δέσμια), θα υπακούει στο νόμο του Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

Ορίζουμε την *ηλεκτρική μετατόπιση*

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (8.9)$$

Ο νόμος του Gauss τώρα γράφεται

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f} \quad (8.10)$$

ή, σε ολοκληρωτική μορφή,

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot \vec{da} = Q_{f,in}} \quad (8.11)$$

όπου $Q_{f,in} = \int_V \rho_f dv$ το ολικό ελεύθερο φορτίο μέσα σε έναν όγκο V που οριοθετείται από την κλειστή επιφάνεια S .

Άσκηση: Δείξτε αναλυτικά την ισοδυναμία ανάμεσα στις (8.10) και (8.11).

Ένα διηλεκτρικό μέσο καλείται *γραμμικό* όταν σε κάθε σημείο του η πόλωση \vec{P} είναι ανάλογη του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} στο σημείο αυτό, με την προϋπόθεση ότι το πεδίο \vec{E} δεν είναι πολύ ισχυρό. Γράφουμε:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (8.12)$$

όπου ο *αδιάστατος* (καθαρός αριθμός) παράγων χ_e καλείται *ηλεκτρική επιδεκτικότητα* του μέσου. Η ηλεκτρική μετατόπιση \vec{D} τότε γράφεται

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}} \quad (8.13)$$

όπου ϵ η *διηλεκτρικότητα* του μέσου, ίση με

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (8.14)$$

Ο λόγος

$$\kappa_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e \quad (8.15)$$

καλείται *σχετική διηλεκτρικότητα* ή *διηλεκτρική σταθερά* του μέσου. Για όλα τα υλικά ισχύει ότι $\chi_e \geq 0$, $\epsilon \geq \epsilon_0$, $\kappa_e \geq 1$. Για το κενό, $\chi_e = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\kappa_e = 1$.

Στην περίπτωση γραμμικού και ομογενούς διηλεκτρικού, ο νόμος του Gauss (8.11) γράφεται (λαμβάνοντας υπόψη ότι $\epsilon = \text{σταθερό}$ για ομογενές μέσο):

$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot \vec{da} = \epsilon \oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = Q_{f,in} \Rightarrow$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{Q_{f,in}}{\epsilon} \quad (8.16)$$

Συνδυάζοντας όσα γνωρίζουμε για τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου, έχουμε:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{f,in}}{\epsilon} \quad (8.17)$$

όπου $Q_{f,in}$ το ελεύθερο φορτίο και Q_{in} το ολικό φορτίο (ελεύθερο και δέσμιο φορτίο πόλωσης) στο εσωτερικό τής S .

Παρατήρηση: Τονίζουμε ότι το \vec{E} παριστά την τελική τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του διηλεκτρικού, μετά την πόλωση του υλικού και τη δημιουργία του δέσμιου φορτίου πόλωσης, και όχι το εξωτερικό πεδίο \vec{E}_0 που προκάλεσε αρχικά την πόλωση. Αναλυτικά: Το εξωτερικό πεδίο \vec{E}_0 προκαλεί πόλωση στο διηλεκτρικό και επάγει δέσμιο φορτίο πόλωσης, το φορτίο αυτό δημιουργεί πρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό, το ολικό πεδίο που προκύπτει επάγει επιπρόσθετο δέσμιο φορτίο το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί επιπρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο, κλπ., μέχρι να φτάσουμε στις τελικές τιμές για το \vec{E} και το φορτίο πόλωσης. (Η διαδικασία αυτή, βέβαια, λαμβάνει χώρα σχεδόν ακαριαία.)

8.3 Μαγνητικά Μέσα

Όταν στο εσωτερικό ενός υλικού υπάρχει μαγνητικό πεδίο \vec{B} το υλικό υφίσταται μαγνητική πόλωση ή *μαγνήτιση*. Δηλαδή, εμφανίζει στο εσωτερικό του ένα μεγάλο πλήθος από μικρά μαγνητικά δίπολα προσανατολισμένα παράλληλα προς το \vec{B} , τα οποία προσδίδουν στο υλικό μαγνητική διπολική ροπή. Ορίζουμε το *διάνυσμα μαγνήτισης* \vec{M} ως τη μαγνητική διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου του υλικού:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv} \quad (8.18)$$

Σε αντίθεση με την ηλεκτρική πόλωση \vec{P} που είναι πάντα στην κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} , η μαγνήτιση \vec{M} μπορεί να είναι *ομόρροπη* ή *αντίρροπη* με το \vec{B} . Στην πρώτη περίπτωση το υλικό ονομάζεται *παραμαγνητικό* (π.χ. οξυγόνο, νάτριο, αργίλιο, κλπ.) ενώ στη δεύτερη καλείται *διαμαγνητικό* (π.χ. υδρογόνο, διοξείδιο του άνθρακα, νερό, χαλκός, κλπ.). Γενικά, το φαινόμενο της μαγνήτισης διαρκεί όσο υπάρχει μαγνητικό πεδίο μέσα στο υλικό. Μερικά υλικά όμως που ονομάζονται *σιδηρομαγνητικά* (π.χ. σίδηρος, νικέλιο, κοβάλτιο) διατηρούν σημαντικό μέρος της μαγνήτισής τους και μετά την απομάκρυνση του μαγνητικού πεδίου.

Το αν ένα υλικό μέσο είναι παραμαγνητικό ή διαμαγνητικό εξαρτάται από την έκβαση ενός ανταγωνισμού στο εσωτερικό του ανάμεσα σε παραμαγνητικά και διαμαγνητικά φαινόμενα που συμβαίνουν *ταυτόχρονα*. Αν επικρατούν τα παραμαγνητικά φαινόμενα το υλικό εμφανίζεται παραμαγνητικό, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι διαμαγνητικό.

Τα παραμαγνητικά φαινόμενα οφείλονται σε προσανατολισμό μαγνητικών διπόλων που *προϋπάρχουν*, ενώ στα διαμαγνητικά φαινόμενα τα δίπολα *επάγονται* από το μα-

γνητικό πεδίο \vec{B} . Οι επαγόμενες μαγνητικές διπολικές ροπές οφείλονται στην επίδραση του \vec{B} πάνω στην τροχιακή κίνηση των ηλεκτρονίων γύρω από τους πυρήνες των ατόμων του υλικού (φανταστείτε ότι η κίνηση ενός ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα συνιστά ένα μικρό ρευματικό βρόχο). Η επίδραση αυτή προκαλεί μια επιπρόσθετη μαγνητική διπολική ροπή σε κατεύθυνση *αντίθετη* από αυτή του \vec{B} . Οι προϋπάρχουσες (μόνιμες) μαγνητικές διπολικές ροπές μπορεί να οφείλονται σε δύο παράγοντες: (α) Στο spin των ελεύθερων ηλεκτρονίων ενός μετάλλου (τα θετικά ιόντα δεν διαθέτουν εξαρχής μαγνητική διπολική ροπή, με εξαίρεση τα στοιχεία μεταπτώσεως Fe, Ni, Co, κλπ.). (β) Σε άτομα ή ιόντα που έχουν μη-συμπληρωμένες εξωτερικές στοιβάδες κι έτσι διαθέτουν εξαρχής μαγνητική διπολική ροπή (π.χ., τα θετικά ιόντα των Fe, Ni, Co στα οποία η υποστοιβάδα $3d$, που μένει ως εξωτερική μετά την απελευθέρωση των ηλεκτρονίων της $4s$, είναι ασυμπλήρωτη). Ειδικά για τα μέταλλα, τα παραμαγνητικά φαινόμενα της περίπτωσης (β) είναι ιδιαίτερα ισχυρά, πράγμα που εξηγεί τον έντονα παραμαγνητικό χαρακτήρα των μετάλλων των στοιχείων μεταπτώσεως.

Σαν αποτέλεσμα της μαγνήτισης ενός υλικού, στο εσωτερικό καθώς και στην επιφάνειά του εμφανίζεται ένα νέο είδος ρευμάτων που καλούνται *ρεύματα μαγνήτισης*. Σε αντίθεση με τα ρεύματα ελεύθερων φορτίων που διαρρέουν τους αγωγούς, τα ρεύματα μαγνήτισης είναι *δέσμια*, με την έννοια ότι δεν συνιστούν μετακίνηση φορτίου σε μεγάλες αποστάσεις αλλά είναι αθροιστικά (μακροσκοπικά) φαινόμενα, αποτελούμενα από συνεισφορά πολλών μικροσκοπικών ρευμάτων που είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένα με άτομα του υλικού. Με εξαίρεση τους μόνιμους μαγνήτες, τα ρεύματα μαγνήτισης καταπαύουν μόλις απομακρυνθεί το μαγνητικό πεδίο που τα προκάλεσε. Η *πυκνότητα ρεύματος μαγνήτισης* μέσα στο μαγνητικό υλικό ισούται με

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (8.19)$$

όπου υποθέσαμε ότι, γενικά, το διάνυσμα μαγνήτισης \vec{M} μεταβάλλεται στο χώρο. Στην περίπτωση που η μαγνήτιση είναι *ομογενής*, το \vec{M} είναι σταθερό και $\vec{J}_b = 0$ στο εσωτερικό του υλικού. Έτσι, σ' αυτή την περίπτωση τα ρεύματα μαγνήτισης περιορίζονται στην *επιφάνεια* του μαγνητικού μέσου.

Αν στο εσωτερικό ή την επιφάνεια του μαγνητικού υλικού υπάρχουν και άλλα ρεύματα που δεν οφείλονται στη μαγνήτιση, τούτα καλούνται *ελεύθερα ρεύματα* (διότι γενικά οφείλονται σε πραγματική μετακίνηση φορτίου στο χώρο) και η πυκνότητά τους συμβολίζεται \vec{J}_f . Τα ρεύματα αυτά μπορεί, π.χ., να ρέουν μέσα σε σύρματα που διαπερνούν το υλικό (ή μέσα στο ίδιο το υλικό εφόσον αυτό είναι αγωγός), να οφείλονται σε κίνηση ιόντων μέσα σε κάποιο υγρό, κλπ.

Στην περιοχή ενός μαγνητισμένου υλικού μέσου η *ολική πυκνότητα ρεύματος* θα είναι το άθροισμα

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b \quad (8.20)$$

Αντίστοιχα, το *ολικό μαγνητικό πεδίο* \vec{B} , που οφείλεται σε όλα τα ρεύματα (ελεύθερα και δέσμια), θα υπακούει στο νόμο του Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{J}_f + \vec{J}_b = \vec{J}_f + (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f$$

Ορίζουμε το βοηθητικό πεδίο (χωρίς όνομα!)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (8.21)$$

Ο νόμος του Ampère τώρα γράφεται

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f} \quad (8.22)$$

ή, σε ολοκληρωτική μορφή,

$$\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{f,in}} \quad (8.23)$$

όπου $I_{f,in} = \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{a}$ το ολικό ελεύθερο ρεύμα που διέρχεται μέσα από μια ανοιχτή επιφάνεια S που έχει σαν όριο την κλειστή καμπύλη C .

Άσκηση: Δείξτε αναλυτικά την ισοδυναμία ανάμεσα στις (8.22) και (8.23).

Ένα μαγνητικό μέσο καλείται *γραμμικό* όταν σε κάθε σημείο του η μαγνήτιση \vec{M} είναι ανάλογη του μαγνητικού πεδίου \vec{B} στο σημείο αυτό, με την προϋπόθεση ότι το πεδίο \vec{B} δεν είναι πολύ ισχυρό. Τώρα, θα ήταν λογικό να γράψουμε μια σχέση αναλογίας ανάμεσα στα \vec{M} και \vec{B} αντίστοιχη της σχέσης (8.12) μεταξύ \vec{P} και \vec{E} στα διηλεκτρικά. Στο Μαγνητισμό, όμως, είναι παράδοση να εκφράζουμε τη σχέση μεταξύ \vec{M} και \vec{H} :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (8.24)$$

Ο *αδιάστατος* (καθαρός αριθμός) παράγων χ_m καλείται *μαγνητική επιδεκτικότητα* του υλικού, και είναι $\chi_m > 0$ για τα παραμαγνητικά και $\chi_m < 0$ για τα διαμαγνητικά μέσα. Το βοηθητικό πεδίο \vec{H} τότε γράφεται

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}} \quad (8.25)$$

όπου μ η *μαγνητική διαπερατότητα* του υλικού, ίση με

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (8.26)$$

Ο λόγος

$$\kappa_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (8.27)$$

καλείται *σχετική διαπερατότητα* του υλικού και είναι πάντα $\kappa_m > 0$. (Για όλα τα μέσα ισχύει ότι $|\chi_m| < 1$, έτσι ώστε $1 + \chi_m > 0$.) Ειδικά, $\kappa_m > 1$ για τα παραμαγνητικά και $\kappa_m < 1$ για τα διαμαγνητικά μέσα. Για το κενό, $\chi_m = 0$, $\mu = \mu_0$, $\kappa_m = 1$.

Στην περίπτωση γραμμικού και ομογενούς μαγνητικού μέσου, ο νόμος του Ampère (8.23) γράφεται (λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mu = \text{σταθερό}$ για ομογενές μέσο):

$$\oint_C \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = I_{f,in} \Rightarrow$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_{f,in} \quad (8.28)$$

Συνδυάζοντας όσα γνωρίζουμε για το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου, έχουμε:

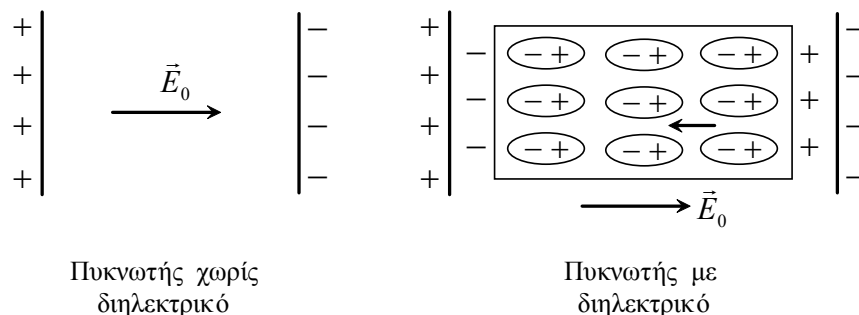
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} = \mu I_{f,in} \quad (8.29)$$

όπου $I_{f,in}$ το ελεύθερο ρεύμα και I_{in} το ολικό ρεύμα (ελεύθερο και δέσμιο ρεύμα μαγνήτισης) που διέρχεται από το εσωτερικό τής C .

8.4 Εφαρμογές

Φορτίζουμε έναν πυκνωτή με τη βοήθεια μιας πηγής και στη συνέχεια τον αποκόπτουμε από την πηγή. Το φορτίο Q_0 στις μεταλλικές πλάκες του πυκνωτή είναι τότε σταθερό και είναι *ελεύθερο* φορτίο, αφού δεν προέρχεται από πόλωση διηλεκτρικού μέσου. Το εσωτερικό του πυκνωτή είναι αρχικά κενό και στο χώρο αυτό επικρατεί ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο \vec{E}_0 . Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι V_0 , ενώ η χωρητικότητά του είναι $C_0 = Q_0/V_0$.

Γεμίζουμε τώρα το εσωτερικό του πυκνωτή με μονωτικό υλικό διηλεκτρικής σταθεράς κ :



Το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή προκαλεί πόλωση (δημιουργία προσανατολισμένων ηλεκτρικών διπόλων) στο διηλεκτρικό, στην επιφάνεια του οποίου εμφανίζονται δέσμια φορτία πόλωσης (στο εσωτερικό του υλικού τα φορτία αυτά αλληλοαναιρούνται γιατί θεωρούμε ότι η πόλωση είναι ομογενής). Τα δέσμια φορτία δημιουργούν μέσα στο διηλεκτρικό ένα πρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο *αντίθετης κατεύθυνσης* σε σχέση με το αρχικό πεδίο \vec{E}_0 του πυκνωτή. Έτσι, η τοποθέτηση του διηλεκτρικού έχει σαν αποτέλεσμα την *ελάττωση της τιμής του ηλεκτρικού πεδίου* ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή. Όπως αποδεικνύεται, η νέα τιμή του πεδίου είναι

$$E = \frac{E_0}{\kappa} \quad (8.30)$$

(θυμηθείτε ότι $\kappa > 1$). Δοθέντος ότι $E_0 = V_0 / l$ και $E = V / l$ (όπου l η απόσταση ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή), παρατηρούμε ότι το διηλεκτρικό προκαλεί και *ελάττωση της τάσης* στον πυκνωτή σε σχέση με την αρχική τάση V_0 :

$$V = \frac{V_0}{\kappa} \quad (8.31)$$

Τι αποτέλεσμα έχει η παρουσία του διηλεκτρικού στη χωρητικότητα του πυκνωτή; Λαμβάνοντας υπόψη ότι το ελεύθερο φορτίο Q_0 στις πλάκες του πυκνωτή μένει σταθερό (ίδιο πριν και μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $C_0 = Q_0 / V_0$ και $C = Q_0 / V$ σε συνδυασμό με την (8.31), βρίσκουμε ότι η νέα χωρητικότητα θα είναι

$$C = \kappa C_0 \quad (8.32)$$

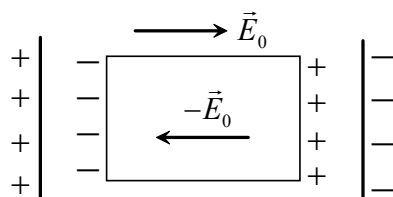
Δηλαδή, η παρουσία του διηλεκτρικού έχει σαν αποτέλεσμα την *αύξηση της χωρητικότητας* του πυκνωτή.

Ποιο θα ήταν το ελεύθερο φορτίο στον πυκνωτή μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού αν δεν είχαμε αποσυνδέσει την πηγή; Στην περίπτωση αυτή η τάση V είναι σταθερή (ίδια πριν και μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού), ίση με την τάση της πηγής. Οι σχέσεις $Q_0 = C_0 V$ και $Q = CV$, σε συνδυασμό με την (8.32), δίνουν

$$Q = \kappa Q_0 \quad (8.33)$$

Δηλαδή, με το διηλεκτρικό επιτυγχάνουμε *αύξηση του (ελεύθερου) φορτίου του πυκνωτή υπό σταθερή τάση*.

Για λόγους σύγκρισης, ας δούμε τι θα συμβεί αν στη θέση του διηλεκτρικού βάλουμε ένα μέταλλο στο εσωτερικό του πυκνωτή:



Το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή προκαλεί μετακίνηση *ελεύθερου* φορτίου στο μέταλλο. Το φορτίο αυτό κατανέμεται στην επιφάνεια του μετάλλου και δημιουργεί στο εσωτερικό του ένα πρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο $-\vec{E}_0$, έτσι ώστε το ολικό πεδίο μέσα στο μέταλλο να είναι μηδέν: $\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 + (-\vec{E}_0) = 0$. Δηλαδή,

το μέταλλο εξαλείφει πλήρως το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του, σε αντίθεση με το διηλεκτρικό που απλά ελαττώνει το πεδίο χωρίς να το μηδενίζει.

Σε αντίθεση με τα διηλεκτρικά, η πόλωση των οποίων έχει πάντα ως αποτέλεσμα την *ελάττωση* της αρχικής τιμής του ηλεκτρικού πεδίου, τα μαγνητικά υλικά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1. Τα *παραμαγνητικά* υλικά ($\chi_m > 0$) προκαλούν *αύξηση* της τιμής του μαγνητικού πεδίου \vec{B} στο εσωτερικό τους. Τούτο συνδέεται με το ότι η μαγνήτιση \vec{M} στα υλικά αυτά είναι *ομόρροπη* με το \vec{B} .
2. Τα *διαμαγνητικά* υλικά ($\chi_m < 0$) προκαλούν *ελάττωση* της τιμής του \vec{B} στο εσωτερικό τους. Στα υλικά αυτά η μαγνήτιση \vec{M} είναι *αντίρροπη* ως προς το \vec{B} .

Έτσι, ένας τρόπος για να αυξήσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς είναι να τοποθετήσουμε εκεί έναν πυρήνα από παραμαγνητικό υλικό. Σημειώνουμε πάντως ότι για τα περισσότερα υλικά ισχύει ότι $|\chi_m| \ll 1$, έτσι ώστε στις εφαρμογές συχνά θέτουμε $\kappa_m = 1 + \chi_m \approx 1$ και $\mu \approx \mu_0$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Σε τι διαφέρει η συμπεριφορά ενός διηλεκτρικού από αυτή ενός μετάλλου όταν τα υλικά αυτά βρίσκονται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο;
2. Για ποιους πρακτικούς λόγους τοποθετούμε διηλεκτρικές ουσίες στο εσωτερικό των πυκνωτών και πυρήνες από παραμαγνητικά υλικά στο εσωτερικό των σωληνοειδών;
3. Τι ονομάζουμε «μαγνητικό δίπολο»; Είναι ο όρος αυτός ακριβής; Πώς εξηγείται η χρήση του;
4. Ποια είναι η συμπεριφορά ενός ηλεκτρικού διπόλου μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο; Ενός μαγνητικού διπόλου μέσα σε μαγνητικό πεδίο;
5. Σε τι διαφέρει ο μηχανισμός πόλωσης στο CO_2 σε σύγκριση με αυτόν στο H_2O ;
6. Ναδειχθεί ότι σε ένα ομογενώς πολωμένο διηλεκτρικό το φορτίο πόλωσης περιορίζεται στην επιφάνειά του.
7. Ναδειχθεί ότι σε ένα ομογενώς μαγνητισμένο υλικό τα ρεύματα μαγνήτισης περιορίζονται στην επιφάνειά του.
8. Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα σε ελεύθερα και δέσμια φορτία; Ανάμεσα σε ελεύθερα και δέσμια ρεύματα;
9. Θεωρούμε ένα γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό μέσα στο οποίο δεν υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρικά φορτία. Δείξτε ότι το ολικό ηλεκτρικό φορτίο στο εσωτερικό του υλικού είναι μηδέν.
10. Θεωρούμε ένα γραμμικό και ομογενές μαγνητικό μέσο στο εσωτερικό του οποίου δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα. Δείξτε ότι το ολικό ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται μέσα από οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη στο εσωτερικό του υλικού είναι μηδέν.
11. Δείξτε ότι $\mu > \mu_0$ για τα παραμαγνητικά και $\mu < \mu_0$ για τα διαμαγνητικά μέσα.
12. Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ενός γραμμικού μαγνητικού μέσου είναι της μορφής $\vec{B} = B_0 \hat{u}_z$ ($B_0 > 0$). Τι κατεύθυνση θα έχει το πεδίο \vec{H} και η μαγνήτιση \vec{M} μέσα στο υλικό, αν αυτό είναι (α) παραμαγνητικό; (β) διαμαγνητικό;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ένα φορτίο $+q$ βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_+ \equiv (1, -1, 1)$ του χώρου, και ένα άλλο φορτίο $-q$ στη θέση $\vec{r}_- \equiv (1, 0, 1)$. (α) Βρείτε την ηλεκτρική διπολική ροπή του συστήματος. (β) Βρείτε τη ροπή που ασκείται στο σύστημα από ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_0 \hat{u}_x$.

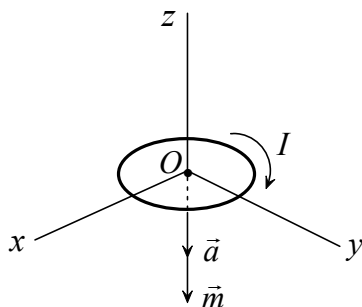
Λύση: Έχουμε:

$$\vec{p} = q\vec{s} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \equiv q(0, -1, 0) \equiv (0, -q, 0) \equiv -q\hat{u}_y, \quad \vec{E} = E_0\hat{u}_x \equiv (E_0, 0, 0)$$

$$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & -q & 0 \\ E_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = qE_0\hat{u}_z \equiv (0, 0, qE_0)$$

2. Κυκλικός ρευματικός βρόχος ακτίνας R κείται στο επίπεδο xy και διαρρέεται από ρεύμα I . Το ρεύμα έχει δεξιόστροφη φορά καθώς κοιτάζουμε το επίπεδο xy από τη μεριά του θετικού ημιάξονα z . Βρείτε τη μαγνητική διπολική ροπή του βρόχου καθώς και τη ροπή που ασκείται σ' αυτόν μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0 \hat{u}_x$.

Λύση:



Το εμβαδόν του βρόχου είναι $a = \pi R^2$. Διανυσματικά, $\vec{a} = -a\hat{u}_z = -\pi R^2\hat{u}_z$. Τότε,

$$\vec{m} = I\vec{a} = -I\pi R^2\hat{u}_z \equiv (0, 0, -I\pi R^2)$$

Επίσης,

$$\vec{B} = B_0\hat{u}_x \equiv (B_0, 0, 0)$$

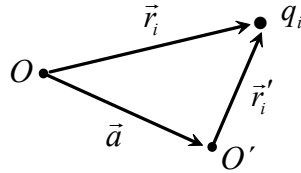
Έτσι,

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & 0 & -I\pi R^2 \\ B_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -I\pi R^2 B_0 \hat{u}_y \equiv (0, -I\pi R^2 B_0, 0)$$

Προσέξτε ότι τα αποτελέσματά μας δεν επηρεάζονται από τη θέση του κέντρου του βρόχου πάνω στο επίπεδο xy .

3. Θεωρούμε σύστημα φορτίων q_1, q_2, \dots . Έστω \vec{p} η ηλεκτρική διπολική ροπή του συστήματος ως προς σημείο αναφοράς O . Ναδειχθεί ότι η \vec{p} είναι ανεξάρτητη από την εκλογή τού O αν και μόνο αν το ολικό φορτίο του συστήματος είναι μηδέν.

Λύση: Θεωρούμε δύο σημεία αναφοράς O και O' και καλούμε \vec{p} και \vec{p}' τις αντίστοιχες ηλεκτρικές διπολικές ροπές του συστήματος ως προς αυτά:



$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i, \quad \vec{p}' = \sum_i q_i \vec{r}'_i = \sum_i q_i (\vec{r}_i - \vec{a}) \quad \text{όπου} \quad \vec{a} = \overline{OO'}$$

$$\vec{p} = \vec{p}' \Leftrightarrow \sum_i q_i \vec{r}_i = \sum_i q_i (\vec{r}_i - \vec{a}) \Leftrightarrow \sum_i q_i \vec{r}_i = \sum_i q_i \vec{r}_i - \left(\sum_i q_i \right) \vec{a} \Leftrightarrow \sum_i q_i = 0$$

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται, για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός ηλεκτρικού διπόλου.

4. Ναδειχθεί ότι στο εσωτερικό ενός γραμμικού και ομογενούς διηλεκτρικού η πυκνότητα ελεύθερου φορτίου ρ_f και η πυκνότητα φορτίου πόλωσης ρ_b συνδέονται με τη σχέση

$$\rho_b = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right) \rho_f = - \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \rho_f$$

Ποιο φυσικό συμπέρασμα συνάγεται για την περίπτωση που $\rho_f = 0$;

Λύση: Γενικά, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$. Επειδή το μέσο είναι γραμμικό και ομογενές, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ με $\epsilon = \text{σταθ}$. Έτσι, $\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \epsilon (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \rho_f \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}} \quad (1)$$

Όμως, από το νόμο του Gauss, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$, όπου $\rho = \rho_f + \rho_b$ η ολική πυκνότητα φορτίου. Συγκρίνοντας με την (1), έχουμε:

$$\frac{\rho_f}{\epsilon} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho_b = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right) \rho_f$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$, βρίσκουμε: $\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 = - \frac{\chi_e}{1 + \chi_e}$.

Παρατηρούμε ότι $\rho_b = 0$ όταν $\rho_f = 0$: όταν στο εσωτερικό του διηλεκτρικού δεν υπάρχει ελεύθερο φορτίο, το δέσμιο φορτίο κατανέμεται στην *επιφάνεια* του υλικού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΧΡΟΝΙΚΑ-ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

9.1 Εισαγωγή

Ας θυμηθούμε τους βασικούς νόμους που έχουμε αναφέρει για τα στατικά πεδία ($\partial \vec{E} / \partial t = 0$, $\partial \vec{B} / \partial t = 0$):

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho / \varepsilon_0 & \Leftrightarrow & \oint_S \vec{E} \cdot \vec{d}\vec{a} = Q_{in} / \varepsilon_0 \\(\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \Leftrightarrow & \oint_S \vec{B} \cdot \vec{d}\vec{a} = 0 \\(\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 & \Leftrightarrow & \oint_C \vec{E} \cdot \vec{d}\vec{l} = 0 \\(\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} & \Leftrightarrow & \oint_C \vec{B} \cdot \vec{d}\vec{l} = \mu_0 I_{in}\end{aligned} \tag{9.1}$$

Παρατηρούμε ότι οι (α) και (γ) αφορούν το πεδίο \vec{E} , ενώ οι (β) και (δ) το \vec{B} . Έτσι, οι στατικοί νόμοι δίνουν την εντύπωση ότι υπάρχουν στη Φύση δύο ανεξάρτητα πεδία: το ηλεκτρικό και το μαγνητικό. Αυτό σημαίνει, αντίστοιχα, ότι θα πρέπει να υπάρχουν δύο ανεξάρτητοι κλάδοι της Φυσικής, ο Ηλεκτρισμός και ο Μαγνητισμός. Ίσως και δύο ειδικότητες φυσικών, οι «ηλεκτρολόγοι» και οι «μαγνητολόγοι!» Ένα είναι σίγουρο: ούτε οι μεν, ούτε οι δε, θα μπορούσαν να σας εξηγήσουν πώς η ενέργεια που παράγεται στον Ήλιο φτάνει στη Γη σαν φως και ζέστη, ή, πώς είναι δυνατό να ενημερώνεστε για το σκορ του αγώνα της αγαπημένης σας ομάδας ενώ πίνετε τον καφέ σας σε ένα παραθαλάσσιο καφενείο κάποιου μακρινού νησιού.

Το μυστικό είναι ότι οι (9.1) στη μορφή που τις βλέπουμε δεν ισχύουν στην περίπτωση των *χρονικά μεταβαλλόμενων* πεδίων. Για να είμαστε ακριβείς, οι (α) και (β) εξακολουθούν να ισχύουν αλλά οι (γ) και (δ) παίρνουν νέες μορφές που *εμπεριέχουν ταυτόχρονα και τα δύο πεδία \vec{E} και \vec{B}* . Αποκαλύπτεται έτσι ότι

το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο δεν είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο αλλά αποτελούν δύο αναπόσπαστα συνδεδεμένες μεταξύ τους «συνιστώσες» ενός ενιαίου πεδίου, του ηλεκτρομαγνητικού (H/M) πεδίου.

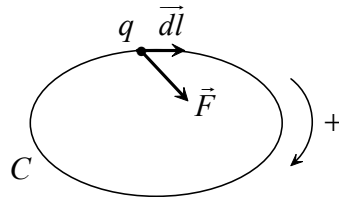
(Ο όρος «ηλεκτρομαγνητικό» θα γράφεται σύντομα «H/M».) Η γενίκευση των εξισώσεων (9.1) για χρονικά-μεταβαλλόμενα H/M πεδία αποτελεί τις *εξισώσεις του Maxwell*. Οι εξισώσεις αυτές οδήγησαν σε μια από τις σημαντικότερες προβλέψεις της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας (ίσως και της Θεωρητικής Φυσικής, γενικότερα): την ύπαρξη *ηλεκτρομαγνητικών (H/M) κυμάτων* που διαδίδονται ακόμα και σε περιοχές του χώρου κενές από ύλη.

Βέβαια, μια δεδομένη χρονική στιγμή t το H/M πεδίο παρίσταται σαν διατεταγμένο ζεύγος δύο πεδίων (\vec{E}, \vec{B}) που το ένα καλείται «ηλεκτρικό» και το άλλο «μαγνητικό». Να μην ξεχνάμε, όμως, ότι τα \vec{E} και \vec{B} δεν εξελίσσονται στο χρόνο ανεξάρτητα το

ένα από το άλλο αλλά η μεταβολή του ενός επηρεάζει την ύπαρξη του άλλου. Σημειώνουμε επίσης ότι ο διαχωρισμός του Η/Μ πεδίου σε ηλεκτρικό και μαγνητικό εξαρτάται και από την κινητική κατάσταση του παρατηρητή: κάτι που ένας παρατηρητής μπορεί να καταγράψει ως ηλεκτρικό πεδίο, ένας άλλος παρατηρητής που βρίσκεται σε σχετική κίνηση ως προς τον πρώτο μπορεί να το αντιλαμβάνεται ως μαγνητικό (βλ. Πρόβλ.3). Η ιδέα αυτή έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της Θεωρίας της Σχετικότητας.

9.2 Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

Όταν ακούτε τη λέξη *κύκλωμα* στον Ηλεκτρισμό σίγουρα φαντάζεστε κάποια διάταξη που περιλαμβάνει αντιστάσεις, πυκνωτές, πηνία, ηλεκτρικές πηγές, κλπ., συνδεδεμένα μεταξύ τους με κάποιο σύρμα. Εδώ, με τον όρο *κύκλωμα* θα εννοούμε απλά έναν κλειστό βρόχο μέσα σε Η/Μ πεδίο. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ένα μεταλλικό σύρμα σε σχήμα κλειστής καμπύλης C . Έστω \vec{dl} ένα στοιχειώδες τμήμα τής C , προσανατολισμένο κατά τη θετική φορά διαγραφής της καμπύλης. Μπορούμε να χωρίσουμε την C σε ένα τεράστιο πλήθος από τέτοια στοιχειώδη τμήματα, καθένα από τα οποία περιέχει έναν αριθμό από στοιχειώδεις ηλεκτρικούς φορείς (π.χ., ηλεκτρόνια). Έστω q το φορτίο ενός τέτοιου φορέα, και έστω \vec{F} η δύναμη που ασκείται στο q από το Η/Μ πεδίο τη χρονική στιγμή t :



Η δύναμη ανά μονάδα φορτίου στη θέση που βρίσκεται το \vec{dl} , τη χρονική στιγμή t , είναι

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (9.2)$$

Η δύναμη αυτή μετράται σε κάθε σημείο του σύρματος την ίδια χρονική στιγμή t και κατασκευάζεται το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος του κυκλώματος:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot \vec{dl} \quad (9.3)$$

Η ποσότητα $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ καλείται *ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) του κυκλώματος C τη χρονική στιγμή t* . Προσέξτε ότι το πρόσημο της \mathcal{E} εξαρτάται από την εκλογή της θετικής φοράς διαγραφής της καμπύλης C : αντιστρέφοντας τη φορά τής C αντιστρέφεται η φορά τού \vec{dl} , άρα και το πρόσημο της \mathcal{E} . Αντίθετα, το πρόσημο της \mathcal{E} δεν εξαρτάται από το πρόσημο του φορτίου q , αφού, αντιστρέφοντας το πρόσημο του q αντιστρέφεται και η φορά τής \vec{F} αφήνοντας την \vec{f} αμετάβλητη, σύμφωνα με την (9.2).

Η σχέση (9.3) αποτελεί το γενικό ορισμό της HEA . Η έκφραση της \mathcal{E} μπορεί να πάρει διάφορες ειδικές μορφές, ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα:

α) Θεωρούμε ένα κλειστό σύρμα C που κινείται μέσα σε *στατικό* μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r})$. Έστω \vec{v} η ταχύτητα κίνησης του στοιχειώδους τμήματος \vec{dl} του C ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου μας. Ένας φορέας q που βρίσκεται στο \vec{dl} κάνει σύνθετη κίνηση, λόγω της κίνησης του ίδιου του σύρματος ως προς εμάς και λόγω της κίνησης του q κατά μήκος του σύρματος. Η ολική ταχύτητα του q ως προς εμάς είναι $\vec{v}_{ολ} = \vec{v} + \vec{v}'$, όπου \vec{v}' η ταχύτητα του q κατά μήκος του \vec{dl} . Η δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο στο q είναι

$$\vec{F} = q(\vec{v}_{ολ} \times \vec{B}) = q(\vec{v} \times \vec{B}) + q(\vec{v}' \times \vec{B}) \Rightarrow$$

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{q} = (\vec{v} \times \vec{B}) + (\vec{v}' \times \vec{B})$$

Η (9.3) τότε δίνει:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot \vec{dl} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} + \oint_C (\vec{v}' \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

Όμως, το \vec{v}' είναι παράλληλο με το \vec{dl} , έτσι ώστε $(\vec{v}' \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = 0$. Άρα,

$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \quad (9.4)$$

β) Έστω τώρα ένα κλειστό σύρμα C που βρίσκεται *ακίνητο* μέσα σε *χρονικά-μεταβαλλόμενο* μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Όπως δείχνει το πείραμά μας, τη στιγμή που αρχίζει το \vec{B} να μεταβάλλεται αρχίζει να ρέει ρεύμα στο σύρμα. Αυτό μας κάνει εντύπωση, για τον εξής λόγο: Τα φορτία στο (ακίνητο) σύρμα ήταν αρχικά ακίνητα. Πώς είναι δυνατό να τα έθεσε σε κίνηση από μόνο του ένα μαγνητικό πεδίο αφού αυτό ασκεί δυνάμεις μόνο σε *κινούμενα* φορτία; Το μόνο πεδίο που μπορεί να θέσει σε κίνηση ένα αρχικά ακίνητο φορτίο και στη συνέχεια να διατηρήσει την κίνησή του είναι ένα *ηλεκτρικό* πεδίο, αλλά εμείς δεν γνωρίζουμε να υπάρχει κάτι τέτοιο στο εργαστήριό μας! Το ενδιαφέρον είναι ότι όταν το μαγνητικό πεδίο \vec{B} παύει να μεταβάλλεται χρονικά, το ρεύμα στο σύρμα εξαφανίζεται. Αναγκαζόμαστε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι

ένα χρονικά-μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο συνοδεύεται υποχρεωτικά από ηλεκτρικό πεδίο.

Συχνά θα ακούσετε να λέγεται ότι ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο *επάγει* ένα ηλεκτρικό πεδίο. Αυτό είναι ελαφρά παραπλανητικό γιατί δίνει την εντύπωση ότι η «πηγή» ενός ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να είναι ένα μαγνητικό πεδίο. Όμως, ας μην ξεχνάμε ότι πηγές κάθε H/M πεδίου είναι απλά και μόνο τα ηλεκτρικά φορτία και τα ηλεκτρικά ρεύματα!

Έστω λοιπόν $\vec{E}(\vec{r}, t)$ το ηλεκτρικό πεδίο που συνοδεύει το χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο \vec{B} , και έστω και πάλι ένα φορτίο q στο στοιχείο $d\vec{l}$ του σύρματος. Επειδή το σύρμα είναι τώρα ακίνητο (ως προς εμάς), η ταχύτητα του q θα οφείλεται μόνο στην κίνησή του κατά μήκος του σύρματος, δηλαδή κατά μήκος του $d\vec{l}$: $\vec{v}_{o\lambda} = \vec{v}'$ (αφού $\vec{v} = 0$). Η δύναμη που δέχεται το q από το Η/Μ πεδίο είναι

$$\vec{F} = q [\vec{E} + (\vec{v}_{o\lambda} \times \vec{B})] = q [\vec{E} + (\vec{v}' \times \vec{B})] \Rightarrow$$

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + (\vec{v}' \times \vec{B})$$

Η $HE\Delta$ τώρα είναι

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C (\vec{v}' \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Όμως, για λόγους που εξηγήσαμε νωρίτερα, $(\vec{v}' \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0$. Έτσι,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (9.5)$$

γ) Όταν το σύρμα C βρίσκεται ακίνητο μέσα σε στατικό Η/Μ πεδίο $[\vec{E}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})]$, η (9.5) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι αστρόβιλο δίνει

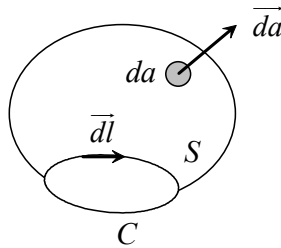
$$\mathcal{E} = 0 \quad \text{για στατικό Η/Μ πεδίο} \quad (9.6)$$

δ) Όπως θα δείξουμε αργότερα (Πρόβλ.7), όταν σε σταθερό κύκλωμα C παρεμβάλλεται πηγή (μπαταρία) τάσης V , η $HE\Delta$ του κυκλώματος ισούται με $\mathcal{E} = V$. Αυτό βέβαια σας είναι γνωστό, η απόδειξή του όμως απαιτεί μια γερή δόση φυσικής σκέψης!

Άσκηση: Από το γενικό ορισμό (9.3) δείξτε ότι η $HE\Delta$ έχει διαστάσεις ηλεκτρικού δυναμικού (ή, αν προτιμάτε, τάσης).

9.3 Νόμος Faraday-Henry

Σε ένα χώρο όπου υφίσταται χρονικά-μεταβαλλόμενο Η/Μ πεδίο (\vec{E}, \vec{B}) , θεωρούμε μια τυχαία ανοιχτή επιφάνεια S της οποίας το περίγραμμα είναι κλειστή καμπύλη C :



(η σχετική φορά των \vec{dl} και \vec{da} καθορίζεται σύμφωνα με το γνωστό κανόνα του δεξιού χεριού). Επειδή η καμπύλη C θεωρείται σταθερή, η $HE\Delta$ κατά μήκος της τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση (9.5):

$$\mathcal{E}(t) = \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} \tag{9.7}$$

Η μαγνητική ροή δια μέσου της S τη χρονική στιγμή t είναι

$$\Phi_m(t) = \int_S \vec{B} \cdot \vec{da} \tag{9.8}$$

(Προσέξτε ότι τα πρόσημα των \mathcal{E} και Φ_m εξαρτώνται από τη φορά διαγραφής της C .) Επειδή το πεδίο \vec{B} είναι *σωληνωτό*, η τιμή της Φ_m για δοσμένη C είναι ανεξάρτητη από την εκλογή της επιφάνειας S . Δηλαδή, η ίδια μαγνητική ροή θα περνάει από κάθε ανοιχτή επιφάνεια που έχει σαν όριο την κλειστή καμπύλη C . (Από φυσική άποψη, επειδή οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι κλειστές, όσες δυναμικές γραμμές περνούν μέσα από τη C τόσες και διέρχονται από οποιαδήποτε ανοιχτή επιφάνεια με περίγραμμα τη C . Αυτό συνδέεται με το ότι δεν υπάρχουν ελεύθεροι μαγνητικοί πόλοι.)

Σύμφωνα με το νόμο της *H/M επαγωγής* του Faraday,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \tag{9.9}$$

ή αναλυτικά,

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{da}} \tag{9.10}$$

Δηλαδή,

για κάθε χρονική στιγμή t , η $HE\Delta$ κατά μήκος κυκλώματος C ισούται με το αρνητικό του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής που διέρχεται μέσα από το κύκλωμα.

Η (9.10) αποτελεί το νόμο *Faraday-Henry* σε ολοκληρωτική μορφή. Το αρνητικό πρόσημο στο δεξί μέλος των (9.9) και (9.10) εκφράζει το γνωστό κανόνα του *Lenz*, ο οποίος παίζει ένα ρόλο «νόμου της αδράνειας» για τον Ηλεκτρομαγνητισμό.

Θέλουμε τώρα να μετατρέψουμε την ολοκληρωτική εξίσωση (9.10) σε διαφορική. Από το θεώρημα του Stokes,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a}$$

Επίσης, το Φ_m μετά την ολοκλήρωση στην (9.8) είναι συνάρτηση μόνο του t , έτσι ώστε

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Η (9.10) τώρα γράφεται:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Για να ισχύει η ισότητα αυτή για *αυθαίρετη* επιφάνεια S , θα πρέπει

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (9.11)$$

Η (9.11) εκφράζει το νόμο Faraday-Henry σε διαφορική μορφή.

Παρατηρούμε ότι αν $\partial \vec{B} / \partial t \neq 0$, τότε $\vec{E} \neq 0$. Έτσι, όπως ήδη αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο συνοδεύεται υποχρεωτικά από ηλεκτρικό πεδίο (ή, όπως λέγεται συχνά, επάγει ένα ηλεκτρικό πεδίο). Αν όμως το \vec{B} είναι στατικό ($\partial \vec{B} / \partial t = 0$), τότε $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, πράγμα που επιτρέπει και την περίπτωση να είναι $\vec{E} = 0$. Παρατηρούμε ιδιαίτερα ότι

όταν το μαγνητικό πεδίο είναι στατικό, το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο.

Επίσης, το ηλεκτρικό πεδίο που «επάγεται» από ένα χρονικά-μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο είναι δυνατό να έχει κλειστές δυναμικές γραμμές, αφού δεν είναι αστρόβιλο.

Στην περίπτωση που η κλειστή καμπύλη C είναι ένα πραγματικό σύρμα ολικής αντίστασης R , κατά τη διάρκεια της χρονικής μεταβολής της μαγνητικής ροής (και εφόσον το κύκλωμα δεν περιλαμβάνει πηγές) το σύρμα θα διαρρέεται από ρεύμα

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (9.12)$$

όπου Φ_m η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από το κύκλωμα. Το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής του I προσδιορίζει τη φορά του ρεύματος σε σχέση με τη φορά διαγραφής του κυκλώματος C . Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η εκλεγμένη φορά διαγραφής της C είναι *δεξιόστροφη* όπως κοιτάζουμε τη σελίδα. Το $d\vec{a}$ τότε κατευθύ-

νεται προς το εσωτερικό της σελίδας, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Αν όλο και περισσότερη ροή Φ_m ανά μονάδα χρόνου εισέρχεται στη σελίδα, τότε $d\Phi_m/dt > 0$ και $I < 0$, που σημαίνει ότι το επαγόμενο ρεύμα ρέει *αριστερόστροφα*. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας *αντίρροπης* μαγνητικής ροής που *αντιτίθεται* στην αύξηση της εξωτερικής ροής που διαπερνά το κύκλωμα. Αυτό είναι και το νόημα του κανόνα του Lenz.

Αλλά, καμιά φορά και το ίδιο το κύκλωμα είναι υπεύθυνο για τη μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται μέσα από αυτό. Ας υποθέσουμε ότι το κύκλωμα περιλαμβάνει μια μπαταρία μεταβλητής τάσης $V(t)$ και διαρρέεται από μεταβλητό ρεύμα $I=I(t)$. Το ρεύμα αυτό δημιουργεί μεταβλητό μαγνητικό πεδίο γύρω από το κύκλωμα. Όπως προκύπτει από το νόμο Biot-Savart, η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από το κύκλωμα είναι ανάλογη του ρεύματος I :

$$\Phi_m = LI \tag{9.13}$$

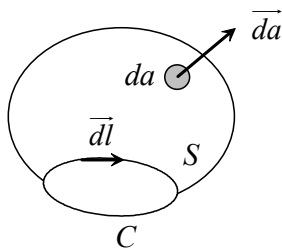
Ο συντελεστής L καλείται *αυτεπαγωγή* του κυκλώματος και εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σύρματος. Για να βρούμε την *HEΔ* του κυκλώματος αντικαθιστούμε την (9.13) στην (9.9):

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \frac{d}{dt} (LI) = -L \frac{dI}{dt} \tag{9.14}$$

όπου θεωρήσαμε ότι το σχήμα του σύρματος μένει σταθερό, έτσι ώστε $L = \text{σταθ}$. Όπως ήδη μαντέψατε, η *HEΔ* αυτή *αντιτίθεται* στη χρονική μεταβολή του ρεύματος I .

9.4 Νόμος Ampère-Maxwell

Σε ένα χώρο όπου υφίσταται χρονικά-μεταβαλλόμενο Η/Μ πεδίο (\vec{E}, \vec{B}) θεωρούμε και πάλι μια τυχαία ανοιχτή επιφάνεια S της οποίας το περίγραμμα είναι κλειστή καμπύλη C :



Η ηλεκτρική ροή δια μέσου της S τη χρονική στιγμή t ισούται με $\int_S \vec{E} \cdot \vec{da}$. Αν $\vec{J}(\vec{r}, t)$ είναι η πυκνότητα ρεύματος πάνω στην S , το ολικό ρεύμα που διέρχεται μέσα από την καμπύλη C είναι (βλ. Παρ.7.3)

$$I_{in} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{da} \tag{9.15}$$

Ο νόμος *Ampère-Maxwell*, που αποτελεί γενίκευση του γνωστού μας νόμου του Ampère (ο οποίος ισχύει μόνο για στατικά πεδία), διατυπώνεται σε ολοκληρωτική μορφή ως εξής:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \quad (9.16)$$

Από το θεώρημα του Stokes,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a}$$

Επίσης, το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (9.16) είναι συνάρτηση μόνο του t , έτσι ώστε

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη και την (9.15), γράφουμε την (9.16) στη μορφή

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \int_S \left(\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a}$$

Για να ισχύει η ισότητα αυτή για *αυθαίρετη* επιφάνεια S , θα πρέπει

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.17)$$

Η (9.17) εκφράζει το νόμο Ampère-Maxwell σε διαφορική μορφή.

Σε περιοχή του χώρου όπου δεν υπάρχουν ηλεκτρικά ρεύματα ($\vec{J} = 0$),

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\vec{J} = 0) \quad (9.18)$$

Παρατηρούμε ότι αν $\partial \vec{E} / \partial t \neq 0$, τότε $\vec{B} \neq 0$. Έτσι, ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο συνοδεύεται υποχρεωτικά από μαγνητικό πεδίο (ή, όπως λέγεται, επάγει ένα μαγνητικό πεδίο). Για ιστορικούς λόγους, ο όρος

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.19)$$

καλείται *ρεύμα μετατόπισης*. Η ονομασία είναι παραπλανητική, αφού το \vec{J}_d δεν παριστάνει πραγματική κίνηση φορτίων! (Να μην το συγχέετε, επίσης, με τα ρεύματα μαγνήτισης του περασμένου κεφαλαίου: εκείνα είναι μακροσκοπικά φαινόμενα που συντίθενται από πολλά μικρά τοπικά ρεύματα, καθένα εκ των οποίων αντιστοιχεί σε κάποιας μορφής *πραγματική* κίνηση φορτίων.)

9.5 Εξισώσεις του Maxwell

Ας συνοψίσουμε τώρα όλους τους νόμους που σχετίζονται με το Η/Μ πεδίο:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 (\beta) & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\
 (\gamma) & \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 (\delta) & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{array} \tag{9.20}$$

Οι (α) και (β) εκφράζουν το νόμο του Gauss για τον Ηλεκτρισμό και το Μαγνητισμό, αντίστοιχα: η (α) αντιστοιχεί στο νόμο του Coulomb, ενώ η φυσική ερμηνεία της (β) είναι η απουσία ελεύθερων μαγνητικών πόλων. Η (γ) αποτελεί το νόμο των Faraday-Henry (νόμος της Η/Μ επαγωγής) και η (δ) το νόμο των Ampère-Maxwell. Το σύνολο των σχέσεων (9.20) ονομάζονται *εξισώσεις του Maxwell* και είναι για τον Ηλεκτρομαγνητισμό ό,τι ο νόμος του Νεύτωνα για τη Μηχανική. Τονίζουμε ιδιαίτερα ότι οι πυκνότητες $\rho(\vec{r}, t)$ και $\vec{J}(\vec{r}, t)$ περιλαμβάνουν όλα τα φορτία και όλα τα ρεύματα αδιακρίτως (π.χ., ελεύθερα φορτία και ρεύματα, δέσμια φορτία πόλωσης, δέσμια ρεύματα μαγνήτισης, κλπ.).

Οι σχέσεις (9.20) είναι η πλέον γενική μορφή των εξισώσεων του Maxwell. Υπάρχει όμως μια πιο βολική μορφή τους, κατάλληλη για τη μελέτη Η/Μ πεδίων μέσα σε υλικά που υφίστανται ηλεκτρική πόλωση ή μαγνήτιση. Έστω υλικό μέσο, στο εσωτερικό του οποίου το Η/Μ πεδίο είναι (\vec{E}, \vec{B}) . Υποθέτοντας, γενικά, ότι το υλικό έχει διηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες, καλούμε \vec{P} και \vec{M} τα διανύσματα πόλωσης και μαγνήτισης, αντίστοιχα. Εισάγουμε τα βοηθητικά πεδία (βλ. Κεφ.8)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \tag{9.21}$$

Αν το μέσο είναι γραμμικό,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{9.22}$$

έτσι ώστε

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \tag{9.23}$$

όπου

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e), \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \tag{9.24}$$

Αν τώρα $\rho_f(\vec{r}, t)$ και $\vec{J}_f(\vec{r}, t)$ είναι οι πυκνότητες *ελεύθερου* φορτίου και ρεύματος, αντίστοιχα, μέσα στο υλικό, οι εξισώσεις του Maxwell παίρνουν τη μορφή

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \\
 (\beta) & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\
 (\gamma) & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 (\delta) & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}
 \end{array} \quad (9.25)$$

Προσέξτε ότι τώρα το «ρεύμα μετατόπισης» αντιπροσωπεύεται από τον όρο $\partial \vec{D} / \partial t$ στην εξίσωση (δ). Η παρουσία της ηλεκτρικής μετατόπισης \vec{D} εξηγεί την ατυχή επιλογή ονομασίας του όρου αυτού.

Από τις εξισώσεις του Maxwell προκύπτει ένα σύνολο *οριακών συνθηκών* που πρέπει να ικανοποιούνται από το Η/Μ πεδίο πάνω στην επιφάνεια που διαχωρίζει δύο υλικά μέσα. Στη γενική τους μορφή οι συνθήκες αυτές εκφράζονται ως εξής:

1. Οι συνιστώσες του \vec{E} που είναι *παράλληλες* στην επιφάνεια διαχωρισμού, καθώς και η συνιστώσα του \vec{B} που είναι *κάθετη* στην επιφάνεια αυτή, είναι *πάντα συνεχείς*.
2. Η συνιστώσα του \vec{D} που είναι *κάθετη* στην επιφάνεια διαχωρισμού είναι *ασυνεχής* όταν υπάρχει *ελεύθερο* φορτίο στην επιφάνεια, και η ασυνέχεια είναι ανάλογη με την επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου αυτού.
3. Οι συνιστώσες του \vec{H} που είναι *παράλληλες* στην επιφάνεια διαχωρισμού είναι *ασυνεχείς* όταν υπάρχει *ελεύθερο* ρεύμα στην επιφάνεια, και η ασυνέχεια είναι ανάλογη με την επιφανειακή πυκνότητα του ρεύματος αυτού.

Στην περίπτωση δύο *γραμμικών* μέσων 1 και 2, στην επιφάνεια διαχωρισμού των οποίων δεν υπάρχουν *ελεύθερα* φορτία ή ρεύματα, οι οριακές συνθήκες που συνδέουν τις τιμές του Η/Μ πεδίου στις δύο όψεις της επιφάνειας γράφονται:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) & \vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel} \\
 (\beta) & \vec{B}_1^{\perp} = \vec{B}_2^{\perp} \\
 (\gamma) & \vec{D}_1^{\perp} = \vec{D}_2^{\perp} \Rightarrow \varepsilon_1 \vec{E}_1^{\perp} = \varepsilon_2 \vec{E}_2^{\perp} \\
 (\delta) & \vec{H}_1^{\parallel} = \vec{H}_2^{\parallel} \Rightarrow \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^{\parallel}
 \end{array} \quad (9.26)$$

(Το σύμβολο \parallel στον εκθέτη υποδηλώνει μια συνιστώσα παράλληλη στη διαχωριστική επιφάνεια, ενώ το σύμβολο \perp μια συνιστώσα κάθετη στην επιφάνεια. Οι δείκτες 1 και 2 δηλώνουν τις τιμές των πεδίων στα δύο μέσα.)

9.6 Διατήρηση του Φορτίου

Θα θυμόμαστε ότι ο νόμος του Νεύτωνα, θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής, προβλέπει μια σειρά νόμων διατήρησης όπως, π.χ., διατήρηση της μηχανικής ενέργειας σε συντηρητικά πεδία δυνάμεων, διατήρηση της ορμής για απομονωμένα συστήματα σωματιδίων, κλπ. Οι εξισώσεις του Maxwell οδηγούν κι αυτές με τη σειρά τους σε νόμους διατήρησης όπως, π.χ., διατήρηση του φορτίου και διατήρηση της ενέργειας (θεώρημα του Poynting). Την πρώτη από τις δύο αυτές αρχές θα δείξουμε τώρα.

Θεωρούμε τις δύο μη-ομογενείς εξισώσεις του Maxwell (αυτές που εκτός από τα Η/Μ πεδία καθαυτά περιέχουν και τις «πηγές» τους ρ, \vec{J}):

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ (\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{9.27}$$

Παίρνουμε το *div* της (δ):

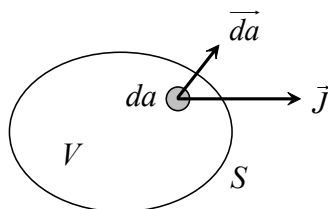
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) + \epsilon_0 \mu_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{9.28}$$

Αλλά, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$, εκ ταυτότητος. Επίσης, $\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$, από την αντιμεταθετική ιδιότητα των μεικτών παραγώγων. Κάνοντας αυτές τις αντικαταστάσεις στην (9.28), απαλείφοντας το μ_0 , και αντικαθιστώντας το $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ από την (9.27)(α), οδηγούμαστε στην *εξίσωση συνέχειας*

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \tag{9.29}$$

που είναι ακριβώς η σχέση (6.9) που βρήκαμε στο Κεφ.6.

Για να δούμε το φυσικό νόημα της (9.29), την ολοκληρώνουμε σε έναν όγκο V που οριοθετείται από κλειστή επιφάνεια S :



$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv \tag{9.30}$$

Αλλά, $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = \frac{d}{dt} \int_V \rho dv$, γιατί μετά την ολοκλήρωση το $\int_V \rho dv$ είναι συνάρτηση μόνο του t . Επίσης, από το θεώρημα του Gauss, $\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv = \oint_S \vec{J} \cdot \vec{da}$. Έτσι, η (9.30) γράφεται:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = - \oint_S \vec{J} \cdot \vec{da}} \quad (9.31)$$

Αναγνωρίζουμε τώρα ότι

$$\int_V \rho dv = Q_{in}(t), \quad \oint_S \vec{J} \cdot \vec{da} = I_{out}(t) \quad (9.32)$$

όπου $Q_{in}(t)$ το ολικό φορτίο μέσα στον όγκο V τη χρονική στιγμή t και $I_{out}(t)$ το ολικό ρεύμα που εξέρχεται από την επιφάνεια S τη στιγμή αυτή. Η (9.31) γράφεται έτσι στην πιο απλή μορφή

$$\frac{d}{dt} Q_{in}(t) = -I_{out}(t) \quad (9.33)$$

Παρατηρούμε τα εξής:

1. Αν το Q_{in} ελαττώνεται χρονικά ($dQ_{in}/dt < 0$) τότε θα πρέπει $I_{out} > 0$, δηλαδή η ροή φορτίου μέσα από την S θα είναι συνολικά προς τα έξω.
2. Αν το Q_{in} αυξάνει χρονικά ($dQ_{in}/dt > 0$) τότε θα πρέπει $I_{out} < 0$, δηλαδή η συνολική ροή φορτίου μέσα από την S θα είναι ουσιαστικά προς τα μέσα.
3. Αν δεν διέρχεται, συνολικά, φορτίο μέσα από την S , τότε $I_{out} = 0$ και $dQ_{in}/dt = 0$. Δηλαδή, το φορτίο στο εσωτερικό της S μένει σταθερό.

Η τελευταία παρατήρηση εκφράζει την αρχή διατήρησης του φορτίου. Όπως βλέπουμε, η αρχή αυτή είναι άμεση συνέπεια των εξισώσεων του Maxwell. Βέβαια, για να πούμε την αλήθεια, οι εξισώσεις αυτές κατασκευάστηκαν έτσι ώστε να ικανοποιείται η αρχή διατήρησης του φορτίου! Αυτός ήταν ουσιαστικά ο λόγος που ο Maxwell εισήγαγε το «ρεύμα μετατόπισης» διορθώνοντας το νόμο του Ampère.

9.7 Ηλεκτρομαγνητικά Δυναμικά

Θεωρούμε τις δύο ομογενείς εξισώσεις του Maxwell, αυτές δηλαδή που δεν περιέχουν «πηγές» (φορτία ή ρεύματα):

$$\begin{aligned} (\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ (\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (9.34)$$

Η (β) επαληθεύεται αυτόματα αν κάνουμε την υπόθεση ότι το $\vec{B}(\vec{r}, t)$ είναι το *rot* ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (9.35)$$

[Πράγματι, τότε $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$, εκ ταυτότητας.] Η (γ) τώρα γράφεται:

$$0 = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Η τελευταία εξίσωση στα δεξιά επαληθεύεται αυτόματα αν υποθέσουμε ότι το άθροισμα $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ είναι το *grad* (ή, για λόγους ομοιομορφίας με την Ηλεκτροστατική, το

αρνητικό grad) ενός βαθμωτού πεδίου $\Phi(\vec{r}, t)$: $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi \Rightarrow$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9.36)$$

Οι (9.35) και (9.36) αποτελούν μια μερική λύση των εξισώσεων του Maxwell αφού επαληθεύουν δύο από αυτές, τις ομογενείς εξισώσεις (9.34). Οι συναρτήσεις $\vec{A}(\vec{r}, t)$ και $\Phi(\vec{r}, t)$ ονομάζονται *ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά*.

Παρατηρούμε ότι οι (9.35) και (9.36) δεν προσδιορίζουν μονοσήμαντα τα δυναμικά \vec{A} και Φ για δοσμένα \vec{E} και \vec{B} . Πράγματι, έστω \vec{A} και Φ δύο συναρτήσεις που επαληθεύουν τις (9.35) και (9.36). Θεωρούμε δύο νέες συναρτήσεις

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (9.37)$$

όπου $\chi(\vec{r}, t)$ μια *αυθαίρετη* συνάρτηση. Σας το αφήνω σαν άσκηση να δείξετε ότι

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{B}, \quad -\vec{\nabla} \Phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \vec{E}$$

Δηλαδή, αν τα δυναμικά \vec{A} και Φ επαληθεύουν τις (9.35) και (9.36) για δοσμένα \vec{E} και \vec{B} , τότε και τα \vec{A}' και Φ' επαληθεύουν τις ίδιες εξισώσεις για τα ίδια \vec{E} και \vec{B} .

9.8 Ενέργεια του Η/Μ Πεδίου και Διάνυσμα Poynting

Όπως γνωρίζουμε, για να δημιουργήσουμε ένα Η/Μ πεδίο χρειαζόμαστε μια κατανομή φορτίου $\rho(\vec{r}, t)$ ή ρεύματος $\vec{J}(\vec{r}, t)$ σε μια περιοχή του χώρου.¹ Το «χτίσιμο» μιας τέτοιας κατανομής απαιτεί τη δαπάνη έργου, για διάφορους λόγους. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο χώρο όπου υπάρχει το Η/Μ πεδίο και αποτελεί την *ενέργεια του Η/Μ πεδίου*.

Για παράδειγμα, ένα ηλεκτροστατικό πεδίο $\vec{E}(\vec{r})$ οφείλει την ύπαρξή του σε μια στατική κατανομή φορτίου $\rho(\vec{r})$. Για τη δημιουργία μιας τέτοιας κατανομής χρειάζεται να δαπανήσουμε έργο ώστε να υπερνικήσουμε τις απωστικές δυνάμεις Coulomb μεταξύ ομόσημων φορτίων. Από την άλλη μεριά, ένα στατικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r})$ οφείλει την ύπαρξή του σε μια στατική κατανομή ρεύματος $\vec{J}(\vec{r})$. Η δημιουργία μιας τέτοιας κατανομής απαιτεί δαπάνη έργου, για τους εξής λόγους: (α) Ρεύμα σημαίνει κινούμενα φορτία. Για να τεθεί ένα σωματίδιο σε κίνηση απαιτείται έργο ίσο με την κινητική ενέργεια που αποκτά. (β) Η δημιουργία ρεύματος I σε ένα ρευματοφόρο αγωγό απαιτεί ενέργεια για την υπερνίκηση της αντίδρασης του κυκλώματος λόγω του φαινομένου της αυτεπαγωγής, η οποία αντιστέκεται σε κάθε μεταβολή του ρεύματος στο κύκλωμα.

Έστω $U=U(t)$ η ολική ενέργεια ενός Η/Μ πεδίου τη χρονική στιγμή t . Υποθέτουμε ότι η ενέργεια αυτή κατανέμεται σε όλο το χώρο όπου υπάρχει το Η/Μ πεδίο. Έστω dv ένας στοιχειώδης όγκος στο σημείο \vec{r} του πεδίου και έστω dU το ποσό της Η/Μ ενέργειας που περικλείεται στον dv . Ορίζουμε την *πυκνότητα ενέργειας* του Η/Μ πεδίου ως τη συνάρτηση

$$u(\vec{r}, t) = \frac{dU}{dv} \quad (9.38)$$

έτσι ώστε

$$U(t) = \int u(\vec{r}, t) dv \quad (9.39)$$

όπου η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα σε όλο το χώρο όπου υφίσταται το Η/Μ πεδίο. Θεωρούμε ότι ένα τμήμα της ολικής ενέργειας οφείλεται στο ηλεκτρικό πεδίο και ένα άλλο τμήμα στο μαγνητικό πεδίο, και γράφουμε $U=U_e+U_m$, όπου

$$U_e(t) = \int u_e(\vec{r}, t) dv, \quad U_m(t) = \int u_m(\vec{r}, t) dv \quad (9.40)$$

και

$$u(\vec{r}, t) = u_e(\vec{r}, t) + u_m(\vec{r}, t) \quad (9.41)$$

¹ Από την έννοια της κατανομής θα εξαιρέσουμε την περίπτωση ενός μεμονωμένου σημειακού φορτίου, το οποίο καταλαμβάνει μηδενικό όγκο και αντιστοιχεί σε άπειρη πυκνότητα φορτίου ρ .

Όπως αποδεικνύεται, οι γενικές εκφράσεις για τις πυκνότητες ενέργειας είναι

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}, & u_m &= \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \\ u &= u_e + u_m = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \end{aligned} \quad (9.42)$$

Μέσα σε ένα γραμμικό μέσο, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$, και

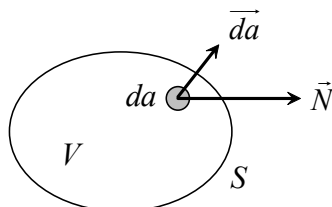
$$\begin{aligned} u_e &= \frac{1}{2} \varepsilon E^2, & u_m &= \frac{1}{2\mu} B^2 \\ u &= \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \end{aligned} \quad (9.43)$$

όπου θέσαμε $E = |\vec{E}|$, $B = |\vec{B}|$. Για το κενό θέτουμε $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

Ορίζουμε τώρα το διάνυσμα *Poynting* με τη σχέση

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (9.44)$$

όπου η τελευταία έκφραση στα δεξιά ισχύει για γραμμικό μέσο (για το κενό θέτουμε $\mu = \mu_0$). Για να δούμε τη φυσική σημασία του διανύσματος αυτού, θεωρούμε έναν όγκο V που οριοθετείται από μια κλειστή επιφάνεια S :



Υποθέτουμε ότι μέσα σε χρονικό διάστημα dt παρατηρούμε ελάττωση της ολικής Η/Μ ενέργειας U μέσα στον όγκο V κατά dU . Υποθέτουμε επίσης ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία μέσα στον V . Έτσι, δεν υπάρχει απώλεια Η/Μ ενέργειας λόγω έργου του ηλεκτρικού πεδίου πάνω σε κινούμενα φορτία (θυμίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο πάνω σε κινούμενα φορτία αφού η μαγνητική δύναμη είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητά τους). Επειδή η ενέργεια δεν χάνεται, θα πρέπει το ποσό ενέργειας dU που αφαιρέθηκε από τον V να εμφανιστεί έξω από την επιφάνεια S μέσα στο χρονικό διάστημα dt . Δηλαδή, ένα ποσό ενέργειας dU διαπερνά την S μέσα σε χρόνο dt . Ένα μέρος από αυτή την ενέργεια διέρχεται μέσα από τη στοιχειώδη επιφάνεια da . Όπως αποδεικνύεται,

το εσωτερικό γινόμενο $\vec{N} \cdot \vec{da}$ ισούται με την ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που διέρχεται από τη στοιχειώδη επιφάνεια da .

Παρατηρούμε ότι το \vec{N} έχει διαστάσεις ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας. Αν σας θυμίζει την πυκνότητα ρεύματος \vec{J} , δεν κάνετε λάθος! Θα θυμόμαστε (Παρ.6.1) ότι το γινόμενο $\vec{J} \cdot \vec{da}$ ισούται με το φορτίο ανά μονάδα χρόνου που διέρχεται από το στοιχείο επιφάνειας da . Η ομοιότητα αυτή μας προτρέπει να αναζητήσουμε κάποια «εξίσωση συνεχείας» για την Η/Μ ενέργεια, ανάλογη με τη σχέση (6.9) για το ηλεκτρικό φορτίο.

Σκεφτόμαστε ως εξής: Η ολική ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που εξέρχεται από την S ισούται με το ολοκλήρωμα $\oint_S \vec{N} \cdot \vec{da}$. (Αν το ολοκλήρωμα έχει θετική τιμή η συνολική μεταφορά ενέργειας είναι προς τα έξω, ενώ αν είναι αρνητικό η ολική ροή ενέργειας είναι στην πραγματικότητα προς τα μέσα.) Η ενέργεια όμως που εξέρχεται από την S σε χρόνο dt θα πρέπει να αφαιρείται από το ποσό της ολικής ενέργειας μέσα στον όγκο V . Τη χρονική στιγμή t η ολική ενέργεια $U(t)$ μέσα στον V είναι

$$U(t) = \int_V u(\vec{r}, t) dv$$

Η διατήρηση της ενέργειας απαιτεί ότι

$$\frac{dU}{dt} = - \oint_S \vec{N} \cdot \vec{da} \quad (9.45)$$

(θεώρημα του Poynting). Έχουμε ότι

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V u(\vec{r}, t) dv = \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dv \quad \text{και} \quad \oint_S \vec{N} \cdot \vec{da} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{N}) dv$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην (9.45) και απαιτώντας η ολοκληρωτική ισότητα που προκύπτει να ισχύει για κάθε όγκο V , καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση (διαφορική μορφή του θεωρήματος Poynting)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{N} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (9.46)$$

Από τον τρόπο που την εξάγαμε είναι φανερό ότι η (9.46) εκφράζει διατήρηση της ενέργειας. Συγκρίνοντας την (9.46) με την εξίσωση συνεχείας (6.9) για το ηλεκτρικό φορτίο, προσέξτε τις αντιστοιχίες φυσικών μεγεθών:

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}, t) &\leftrightarrow \vec{N}(\vec{r}, t) \\ \rho(\vec{r}, t) &\leftrightarrow u(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. (α) Να δειχθεί ότι σε ένα χώρο όπου υπάρχουν μόνο στατικά φορτία και σταθερά ρεύματα το ηλεκτρικό πεδίο είναι το $grad$ κάποιας χρονικά-ανεξάρτητης συνάρτησης δυναμικού. (β) Σε μια περιοχή του χώρου υπάρχει κύκλωμα που αποτελείται από αντίσταση R και πηγή εναλλασσόμενης τάσης. Είναι δυνατόν το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή αυτή να εκφράζεται σαν το $grad$ κάποιας συνάρτησης;
2. Ένα αρχικά ακίνητο φορτίο q βρίσκεται κοντά σε ηλεκτρική αντίσταση R συνδεδεμένη με τάση V . Τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $V=V_0$. Ποια θα είναι η κινητική κατάσταση του q για $t > 0$ αν (α) η V παραμένει σταθερή, ίση με V_0 ; (β) η V μεταβάλλεται για $t \geq 0$; [Υπόδειξη: Για σύρμα που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I , θεωρούμε ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο που είναι αναγκαίο για τη διατήρηση του ρεύματος περιορίζεται στο εσωτερικό του σύρματος.]
3. Σε μια περιοχή του χώρου υπάρχει χρονικά μεταβαλλόμενο Η/Μ πεδίο. Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό φορτίο που μεταφέρεται από το «ρεύμα μετατόπισης» ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στο ρεύμα αυτό. [Υπόδειξη: Προσοχή στους κακοήθεις Φυσικούς που σκαρώνουν φάρσες!]
4. Η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή είναι V . Στο εσωτερικό του πυκνωτή υπάρχει μια πυξίδα. Ποια θα είναι η συμπεριφορά της πυξίδας αν (α) η V μένει σταθερή; (β) η V μεταβάλλεται συνεχώς;
5. Να δειχθεί ότι βάσει των εξισώσεων του Maxwell το ολικό ηλεκτρικό φορτίο στη Φύση διατηρείται σταθερό. [Υπόδειξη: Φανταστείτε ότι περικλείετε ολόκληρη τη Φύση σε μια νοητή κλειστή επιφάνεια S . Ποια θα είναι η πυκνότητα ρεύματος πάνω στην S ; Το ολικό ρεύμα που θα εξέρχεται από την S ;]
6. Έστω ότι με κάποιο πείραμα προσδιορίσαμε τις τιμές του Η/Μ πεδίου (\vec{E}, \vec{B}) σε κάθε σημείο μιας περιοχής και για κάθε χρονική στιγμή. Είναι δυνατό να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα και τα Η/Μ δυναμικά $\Phi(\vec{r}, t)$ και $\vec{A}(\vec{r}, t)$ στην περιοχή αυτή; Μπορούν λοιπόν τα Φ και \vec{A} να θεωρηθούν ως απόλυτα φυσικά μεγέθη με την έννοια που θεωρούνται τα \vec{E} και \vec{B} ;
7. Θεωρούμε ένα απομονωμένο φορτίο q που βρίσκεται ακίνητο στο κέντρο μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R . Βρείτε την ολική Η/Μ ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που εξέρχεται από την επιφάνεια.
8. Είναι δυνατό να ορίσουμε την ολική ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου που παράγεται από ένα σημειακό φορτίο q ; [Υπόδειξη: Ποια είναι η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο του χώρου όπου βρίσκεται το q ; Η πυκνότητα ενέργειας;]

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ναδειχθεί ότι στο εσωτερικό ενός «τέλειου» αγωγού ($\sigma \approx \infty$) το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν και το μαγνητικό πεδίο είναι χρονικά αμετάβλητο. Τι μπορείτε να πείτε για το Η/Μ πεδίο λίγο έξω από τον αγωγό;

Λύση: Από το νόμο του Ohm, $\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \approx 0$ όταν $\sigma \approx \infty$.

Τότε, από το νόμο Faraday-Henry, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$.

Θεωρούμε την επιφάνεια του αγωγού σαν διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα σ' αυτόν και το περιβάλλον. Από τις οριακές συνθήκες (9.26) της Παρ.9.5 γνωρίζουμε ότι η συνιστώσα \vec{E}^{\parallel} , παράλληλη προς την επιφάνεια διαχωρισμού, είναι πάντα συνεχής έχοντας την ίδια τιμή και από τις δύο πλευρές της επιφάνειας. Έτσι, αφού $\vec{E}_{in}^{\parallel} = 0$ έπεται ότι και $\vec{E}_{out}^{\parallel} = 0$. Δηλαδή, το ηλεκτρικό πεδίο λίγο έξω από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού. Επίσης, η συνιστώσα \vec{B}^{\perp} , κάθετη στην επιφάνεια διαχωρισμού, είναι κι αυτή πάντα συνεχής καθώς περνούμε την επιφάνεια. Αφού λοιπόν $\partial \vec{B}_{in}^{\perp} / \partial t = 0$, έπεται ότι και $\partial \vec{B}_{out}^{\perp} / \partial t = 0$. Δηλαδή, λίγο έξω από τον αγωγό η συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου που είναι κάθετη στην επιφάνεια του αγωγού είναι χρονικά αμετάβλητη.

2. Ναδειχθεί ότι ένας αγωγός δεν μπορεί να συγκρατήσει ελεύθερο φορτίο συνολικά διάφορο του μηδενός στο εσωτερικό του αλλά το διαχέει γρήγορα προς την επιφάνειά του. Έτσι, μη-μηδενικό ελεύθερο φορτίο μπορεί να υπάρχει μόνο στην επιφάνεια του αγωγού ενώ στο εσωτερικό του ο αγωγός είναι ηλεκτρικά ουδέτερος.

Λύση: Οι βασικές εξισώσεις που θα χρειαστούμε είναι οι εξής:

$$\text{Νόμος Ohm:} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1)$$

$$\text{Νόμος Gauss:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\text{Εξίσωση συνέχειας:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

Το ρ παριστά την ολική πυκνότητα ελεύθερου φορτίου στο εσωτερικό του αγωγού, η οποία οφείλεται στα (κινούμενα) ηλεκτρόνια και στα (ακίνητα) θετικά ιόντα του μετάλλου, ενώ η πυκνότητα ρεύματος \vec{J} οφείλεται, φυσικά, μόνο στην κίνηση των ηλεκτρονίων. Έχουμε:

$$(3) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 0 = \vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{(2)}{=} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho$$

Ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση στα δεξιά ως προς t , βρίσκουμε:

$$\rho(t) = \rho(0) e^{-(\sigma/\epsilon_0)t} = \rho(0) e^{-t/\tau} \quad \text{όπου θέσαμε} \quad \tau = \epsilon_0 / \sigma$$

Παρατηρούμε ότι $\tau \rightarrow 0$ όταν $\sigma \rightarrow \infty$ (γενικά, για καλό αγωγό το τ είναι μικρό). Παρατηρούμε επίσης ότι $\rho(t) \rightarrow 0$ καθώς το t αυξάνει. Έτσι, αν κάποια στιγμή υπάρχει ελεύθερο φορτίο συνολικά διάφορο του μηδενός στο εσωτερικό του αγωγού, το πλεόνασμα φορτίου διαχέεται γρήγορα προς την επιφάνεια του μετάλλου έτσι ώστε στο εσωτερικό του ο αγωγός να παραμείνει ηλεκτρικά ουδέτερος.

3. Ένας αδρανειακός παρατηρητής O αντιλαμβάνεται την ύπαρξη ενός ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} και ενός μαγνητικού πεδίου \vec{B} στο χώρο. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}' που αντιλαμβάνεται ένας άλλος αδρανειακός παρατηρητής O' που κινείται με ταχύτητα \vec{v} ως προς τον O . Σαν εφαρμογή, θεωρήστε ότι ο παρατηρητής O βρίσκεται μέσα σε ένα καθαρά μαγνητικό πεδίο ($\vec{E} = 0$). Δείξτε ότι ο παρατηρητής O' θα αντιληφθεί την ύπαρξη και ηλεκτρικού πεδίου ($\vec{E}' \neq 0$). (Θεωρούμε ότι $v \ll c$ ή $v/c \ll 1$, έτσι ώστε να ισχύουν οι παραδοχές της μη-σχετικιστικής Μηχανικής.)

Λύση: Θεωρούμε ένα φορτίο q που είναι στιγμιαία ακίνητο ως προς τον O' , άρα κινείται με ταχύτητα \vec{v} ως προς τον O . Σύμφωνα με τον O , το φορτίο αυτό δέχεται δύναμη $\vec{F} = q[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})]$ από το Η/Μ πεδίο. Σύμφωνα με τον O' , όμως, το (ακίνητο ως προς αυτόν) φορτίο δέχεται δύναμη $\vec{F}' = q\vec{E}'$ από το ηλεκτρικό πεδίο μόνο. Τώρα, επειδή η σχετική ταχύτητα v των δύο παρατηρητών είναι μικρή, είναι επιτρεπτό να κάνουμε τη μη-σχετικιστική προσέγγιση $\vec{F} = \vec{F}'$ (ακριβής σχέση στα πλαίσια της κλασικής Μηχανικής αλλά όχι αληθής για τη Θεωρία τη Σχετικότητας). Έτσι, απαλείφοντας το q βρίσκουμε ότι

$$\vec{E}' = \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

Τονίζουμε και πάλι ότι η (1) ισχύει προσεγγιστικά για $v \ll c$ και χρειάζεται διόρθωση στα πλαίσια της Θεωρίας τη Σχετικότητας. Στην ειδική περίπτωση που $\vec{E} = 0$ η (1) δίνει $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}$. Δηλαδή, ενώ ο παρατηρητής O αντιλαμβάνεται μόνο μαγνητικό πεδίο, ο παρατηρητής O' αντιλαμβάνεται και ηλεκτρικό πεδίο. Βλέπουμε έτσι ότι ο διαχωρισμός του Η/Μ πεδίου σε «ηλεκτρικό» και «μαγνητικό» δεν είναι απόλυτος αλλά εξαρτάται από τον παρατηρητή.

4. Δείξτε ότι αν σε μια περιοχή R του χώρου το Η/Μ πεδίο (\vec{E}, \vec{B}) είναι στατικό, η περιοχή αυτή δεν μπορεί να περιέχει χρονικά-μεταβαλλόμενες πηγές (ρ, \vec{J}) . Ισχύει γενικά το αντίστροφο;

Λύση: Στατικό Η/Μ πεδίο $\Rightarrow \partial \vec{E} / \partial t = 0, \partial \vec{B} / \partial t = 0, \forall \vec{r} \in R$.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} &\Rightarrow \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

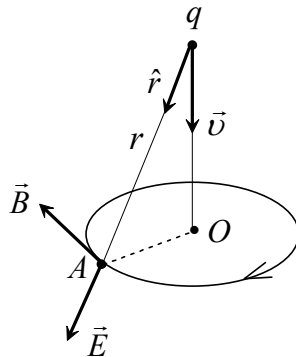
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, μπορεί η περιοχή R να μην περιέχει καθόλου πηγές αλλά έξω από την R να υπάρχουν χρονικά-μεταβαλλόμενες πηγές. Το Η/Μ πεδίο μέσα στην R , όμως, οφείλεται σε όλες τις πηγές, μέσα και έξω από την R . Έτσι, το Η/Μ πεδίο μέσα στην R θα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο έστω κι αν η περιοχή αυτή δεν περιέχει χρονικά-μεταβαλλόμενες πηγές.

5. Ένα φορτίο q κινείται με σταθερή ταχύτητα \vec{v} ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή. Δείξτε ότι ως προς αυτό τον παρατηρητή το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που παράγονται από το φορτίο συνδέονται σε κάθε σημείο του χώρου με τη σχέση

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}) \quad (1)$$

όπου $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ η ταχύτητα του φωτός στο κενό. [Αν και η (1) έχει γενική ισχύ, θεωρήστε χάριν απλότητας ότι η ταχύτητα v του φορτίου είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός: $v \ll c$. Αυτό μας επιτρέπει να αγνοήσουμε τον πεπερασμένο χρόνο που απαιτείται ώστε ο παρατηρητής να αντιληφθεί ότι το φορτίο διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου μια δεδομένη χρονική στιγμή (στην πραγματικότητα αυτή η πληροφορία, όπως και όλα τα Η/Μ σήματα γενικά, «ταξιδεύει» με πεπερασμένη ταχύτητα c και δεν φτάνει ακαριαία στον παρατηρητή).]

Λύση: Θεωρούμε ότι $q > 0$. Έστω A η θέση στην οποία βρίσκεται ο παρατηρητής:



Επειδή $v \ll c$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο A είναι ίδιο με το πεδίο Coulomb που θα δημιουργούσε ένα ακίνητο φορτίο q σε απόσταση r από το A :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (v \ll c) \quad (2)$$

(Προσέξτε ότι αυτό είναι σωστό για φορτίο που κινείται με *σταθερή* ταχύτητα. Το ηλεκτρικό πεδίο *επιταχυνόμενου* φορτίου δεν έχει ακτινική διεύθυνση ως προς το φορτίο.) Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι κυκλικές. Το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στον άξονα κίνησης του q ενώ το επίπεδο του κύκλου είναι κάθετο στον άξονα αυτό. Η φορά διαγραφής του κύκλου καθορίζεται με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού, λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα κινούμενο θετικό φορτίο αντιστοιχεί σε ηλεκτρικό ρεύμα ομόρροπο με τη φορά κίνησής του. Στην περίπτωση αυτή ο νόμος Biot-Savart γράφεται:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q(\vec{v} \times \hat{r})}{r^2} \quad (v \ll c) \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις (2) και (3) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε την (1).

6. Συγκρίνετε τη μαγνητική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο φορτίων με την ηλεκτρική τους αλληλεπίδραση. Δείξτε ότι αν οι ταχύτητες των φορτίων είναι μικρές σε σχέση με την ταχύτητα c του φωτός, η μαγνητική δύναμη μεταξύ των φορτίων είναι αμελητέα σε σύγκριση με την ηλεκτρική, ενώ στο όριο των υψηλών ταχυτήτων οι δύο δυνάμεις γίνονται συγκρίσιμες μεταξύ τους σε ισχύ.

Λύση: Θεωρούμε δύο φορτία q και q' που κινούνται με αντίστοιχες ταχύτητες \vec{v} και \vec{v}' ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή. Θεωρούμε το q' σαν «πηγή» ενός Η/Μ πεδίου και το q σαν «δοκιμαστικό φορτίο» μέσα στο πεδίο αυτό. Μας ενδιαφέρει λοιπόν η δύναμη που ασκείται στο q λόγω του Η/Μ πεδίου που παράγεται από το q' . Έστω (\vec{E}', \vec{B}') η τιμή αυτού του πεδίου στη θέση που βρίσκεται το q . Η ηλεκτρική δύναμη στο q είναι $\vec{F}_e = q\vec{E}'$ ή, κατά μέτρο, $F_e = qE'$, ενώ η μαγνητική δύναμη είναι $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}')$. Όμως, σύμφωνα με το Πρόβλ.5,

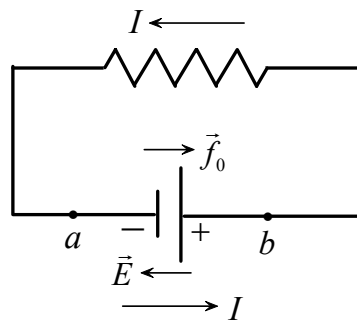
$$\vec{B}' = \frac{1}{c^2} (\vec{v}' \times \vec{E}')$$

Άρα, $\vec{F}_m = \frac{q}{c^2} [\vec{v} \times (\vec{v}' \times \vec{E}')] \Rightarrow F_m \approx \frac{q}{c^2} v v' E' = \frac{v v'}{c^2} F_e$ και $\frac{F_m}{F_e} \approx \frac{v v'}{c^2}$.

Παρατηρούμε ότι $F_m \ll F_e$ όταν $v \ll c$ και $v' \ll c$, ενώ $F_m \sim F_e$ όταν $v \sim c$ και $v' \sim c$. Έτσι, ενώ στον κόσμο των χαμηλών ενεργειών (ή μικρών ταχυτήτων) στον οποίο ζούμε καθημερινά η ηλεκτρική αλληλεπίδραση μεταξύ φορτισμένων σωματίων μοιάζει να είναι πιο ισχυρή από τη μαγνητική, στις υψηλές ενέργειες αποκαλύπτεται ότι οι δύο αλληλεπιδράσεις είναι συγκρίσιμες ως προς την ισχύ τους. Κάτι τέτοιο είναι φυσικό αφού οι αλληλεπιδράσεις αυτές είναι στην ουσία τα δύο «πρόσωπα» μιας ενιαίας αλληλεπίδρασης, της ηλεκτρομαγνητικής.

7. Θεωρούμε ένα κύκλωμα που αποτελείται από ιδανική μπαταρία (που δεν έχει δηλαδή εσωτερική αντίσταση) συνδεδεμένη με μια εξωτερική αντίσταση. (α) Δείξτε ότι η ηλεκτρεγερτική δύναμη (HEΔ) του κυκλώματος στη φορά του ρεύματος ισούται με την τάση V της μπαταρίας. (β) Δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή η HEΔ παριστά το έργο της πηγής ανά μονάδα φορτίου.

Λύση:



Γενικά, η HEΔ ενός κυκλώματος C τη χρονική στιγμή t ισούται με το ολοκλήρωμα

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

όπου $\vec{f} = \vec{F}/q$ η δύναμη ανά μονάδα φορτίου στο στοιχείο $d\vec{l}$ του κυκλώματος τη στιγμή t . Ουσιαστικά, θεωρούμε ότι σε κάθε στοιχείο $d\vec{l}$ έχουμε τοποθετήσει ένα δο-

κιμαστικό φορτίο q . Η δύναμη \vec{F} σε κάθε q μετριέται τότε *ταυτόχρονα* για όλα τα φορτία τη χρονική στιγμή t . Επειδή όμως εδώ έχουμε μια *στατική* (χρονικά αμετάβλητη) κατάσταση (σταθερή τάση, σταθερό ρεύμα I , κλπ.), μπορούμε να δουλέψουμε λίγο διαφορετικά: Οι μετρήσεις των δυνάμεων \vec{F} στα φορτία q δεν είναι πλέον απαραίτητο να γίνουν την ίδια χρονική στιγμή, αφού ούτως ή άλλως τίποτα δεν αλλάζει με το χρόνο. Αντί λοιπόν να βάλουμε πολλά φορτία q γύρω-γύρω στο κύκλωμα και να μετρήσουμε τις δυνάμεις \vec{F} σε αυτά μια ορισμένη χρονική στιγμή, φανταζόμαστε ένα *μοναδικό* φορτίο q που κάνει το γύρο του κυκλώματος. Θεωρούμε, π.χ., ότι το *συμβατικά θετικό* αυτό φορτίο είναι ένας από τους ηλεκτρικούς φορείς στους οποίους οφείλεται το ρεύμα I στο κύκλωμα (ελεύθερα ηλεκτρόνια των μεταλλικών αγωγών, θεωρούμενα συμβατικά ως θετικά). Μετράμε τότε τη δύναμη \vec{F} που ασκείται στο q σε κάθε σημείο του κυκλώματος.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι το q είναι ένα *θετικό* φορτίο που κινείται στην κατεύθυνση του ρεύματος I . Θεωρούμε επίσης ότι η φορά διαγραφής του κυκλώματος C ταυτίζεται με τη φορά του ρεύματος (αριστερόστροφη στο σχήμα). Κατά την κίνησή του το q υπόκειται σε δύο δυνάμεις: (α) τη δύναμη \vec{F}_0 από την πηγή (μπαταρία) η οποία μεταφέρει το q από τον αρνητικό πόλο a στο θετικό πόλο b *δια μέσου* της πηγής, και (β) την ηλεκτροστατική δύναμη $\vec{F}_e = q\vec{E}$ λόγω του ηλεκτροστατικού πεδίου \vec{E} στο κύκλωμα C σε *κάθε* σημείο του (μέσα και έξω από την πηγή). Η ολική δύναμη στο q είναι

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_e = \vec{F}_0 + q\vec{E} \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_0}{q} + \vec{E} \equiv \vec{f}_0 + \vec{E}$$

Τότε,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{f}_0 \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{f}_0 \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

αφού $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ για ένα ηλεκτροστατικό πεδίο. Όμως, η δράση της πηγής πάνω στο q περιορίζεται στην περιοχή ανάμεσα στους πόλους της, δηλαδή στο τμήμα του κυκλώματος από το a ως το b . Έτσι, $\vec{f}_0 = 0$ έξω από την πηγή, οπότε η (1) γράφεται

$$\mathcal{E} = \int_a^b \vec{f}_0 \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

Τώρα, επειδή το ρεύμα I είναι σταθερό, το q κινείται ομαλά (με σταθερό μέτρο ταχύτητας) κατά μήκος του κυκλώματος. Έτσι, η *ολική* δύναμη στο q (ηλεκτρομαγνητική και μηχανική) στη διεύθυνση του κυκλώματος είναι μηδέν. Στο εσωτερικό της αντίστασης η ηλεκτροστατική δύναμη $\vec{F}_e = q\vec{E}$ αντισταθμίζεται από τη δύναμη που ασκείται στο q λόγω συγκρούσεών του με τα θετικά ιόντα του μετάλλου (η δύναμη αυτή, φυσικά, δεν περιλαμβάνεται στον ορισμό της HEA και δεν συνεισφέρει σ' αυτήν!). Μέσα στην πηγή όμως, όπου δεν υπάρχει αντίσταση, η ηλεκτροστατική δύναμη \vec{F}_e θα πρέπει να αντισταθμίζεται από την *αντίθετη* δύναμη \vec{F}_0 που ασκεί η πηγή. Έτσι, στο τμήμα του κυκλώματος μεταξύ a και b ,

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{f}_0 + \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{f}_0 = -\vec{E}$$

Η (2) λοιπόν τελικά γράφεται [βλ. σχέση (5.17)]:

$$\mathcal{E} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_b - V_a = V \quad (3)$$

Να γιατί στο σχολείο μάθατε ότι η τάση της μπαταρίας είναι η HEA του κυκλώματος!

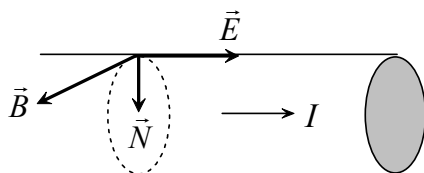
Το έργο της πηγής πάνω στο q κατά τη μεταφορά του από το a στο b είναι

$$W = \int_a^b \vec{F}_0 \cdot d\vec{l} = q \int_a^b \vec{f}_0 \cdot d\vec{l} = q \mathcal{E}$$

Έτσι, το έργο της πηγής ανά μονάδα φορτίου είναι $W/q = \mathcal{E}$. Το έργο αυτό, βέβαια, μετατρέπεται σε θερμότητα Joule μέσα στην αντίσταση, οπότε η πηγή πρέπει να ξοδέψει και πάλι ενέργεια ώστε να περάσει τα φορτία από το a στο b . Κάτι σαν το μαρτύριο του Σίσυφου, δηλαδή! [Σίσυφος: Μυθικός βασιλιάς της Κορίνθου. Επειδή αντέγραφε στα διαγωνίσματα της Φυσικής, καταδικάστηκε να μεταφέρει αιώνια ένα βράχο στην κορυφή ενός βουνού, ο οποίος όμως κάθε φορά κυλούσε πάλι κάτω στην πεδιάδα.]

8. Δείξτε την ισχύ του θεωρήματος του Poynting στην περίπτωση ενός μεταλλικού σύρματος αντίστασης R που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I : Υποθέστε ότι η ισχύς που καταναλώνεται σαν θερμότητα Joule στο σύρμα μεταφέρεται σ' αυτό από την πηγή (μπαταρία) μέσω του Η/Μ πεδίου που περιβάλλει το κύκλωμα και δείξτε ότι αυτή η ισχύς είναι ακριβώς ίση με $dU/dt = I^2 R$.

Λύση: Θεωρούμε ένα μακρύ, ευθύγραμμο, κυλινδρικό σύρμα ακτίνας ρ το οποίο διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I :



Θέλουμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα Poynting $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = (1/\mu_0) \vec{E} \times \vec{B}$ στην επιφάνεια του σύρματος κι έτσι να βρούμε την ισχύ που εισέρχεται στο σύρμα από το εξωτερικό του δια μέσου της επιφάνειάς του. Για να είμαστε συγκεκριμένοι, θεωρούμε ένα τμήμα του σύρματος μήκους l . Η αντίσταση R αναφέρεται σε αυτό ακριβώς το τμήμα. Έστω ΔV η διαφορά δυναμικού στα άκρα του τμήματος. Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο σύρμα είναι ομογενές και έχει την κατεύθυνση του ρεύματος I , και το μέτρο του είναι $E = \Delta V/l$. Επειδή η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που είναι παράλληλη με τη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων είναι συνεχής όταν περνάμε από το ένα μέσο στο άλλο, θεωρούμε ότι η παράλληλη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου λίγο έξω από το σύρμα έχει κι αυτή την κατεύθυνση του I και μέτρο $E = \Delta V/l$. Από την άλλη μεριά, το I παράγει μαγνητικό πεδίο του οποίου η διεύθυνση λίγο έξω από το σύρμα είναι εφαπτόμενη στην περιφέρεια της διατομής του σύρματος, ενώ η φορά του καθορίζεται από τη φορά του ρεύματος και σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού (βλ. σχήμα). Σύμφωνα με το Πρόβλ. 7.3, το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι $B = \mu_0 I/2\pi\rho$, όπου ρ η ακτίνα της διατομής του σύρματος.

Το διάνυσμα Poynting $\vec{N} = (1/\mu_0)\vec{E} \times \vec{B}$ λίγο έξω από το σύρμα είναι κάθετο στην επιφάνεια του σύρματος με κατεύθυνση προς το εσωτερικό του. Το \vec{N} , δηλαδή, είναι κάθετο στον άξονα του σύρματος και κατευθύνεται προς αυτόν. (Δεν λαμβάνουμε υπόψη τη συνιστώσα του διανύσματος Poynting που είναι παράλληλη με το σύρμα και οφείλεται στην κάθετη συνιστώσα του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, αφού δεν συνεισφέρει στη ροή ενέργειας προς το εσωτερικό του σύρματος.) Το μέτρο του \vec{N} είναι

$$N = \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta V}{l} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} = \frac{I\Delta V}{2\pi\rho l} \quad (1)$$

Έστω τώρα \vec{da} ένα στοιχείο της επιφάνειας του σύρματος, κάθετο στην επιφάνεια και με φορά, όπως πάντα, προς τα έξω. Η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που εξέρχεται από το θεωρούμενο τμήμα του σύρματος ισούται με $\int_S \vec{N} \cdot \vec{da}$, όπου S η επιφάνεια του τμήματος. Άρα, η ισχύς που εισέρχεται στο τμήμα αυτό είναι

$$\frac{dU}{dt} = - \int_S \vec{N} \cdot \vec{da} = \int_S N da = N \int_S da = N(2\pi\rho l) \quad (2)$$

(το N είναι σταθερό πάνω στην S). Αντικαθιστώντας την (1) στη (2) και λαμβάνοντας υπόψη το νόμο του Ohm ($\Delta V = IR$), βρίσκουμε τελικά:

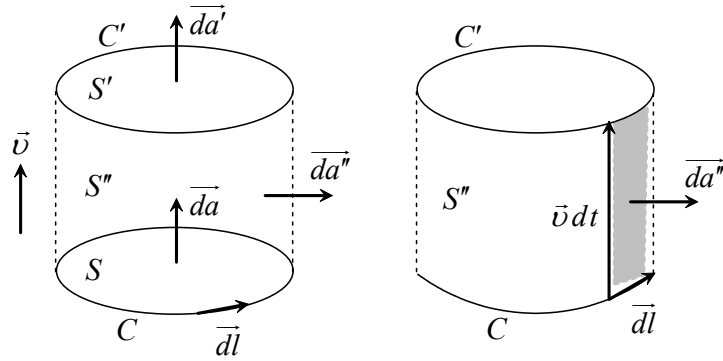
$$\frac{dU}{dt} = I\Delta V = I^2 R$$

9. Δείξτε την ισχύ του νόμου του Faraday:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

στην περίπτωση ενός επίπεδου, κλειστού σύρματος που κινείται μέσα σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r})$ (όπου \mathcal{E} η ΗΕΔ κατά μήκος του σύρματος και Φ_m η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από το σύρμα τη χρονική στιγμή t).

Λύση: Τη χρονική στιγμή t το σύρμα αντιστοιχεί σε μια επίπεδη καμπύλη C του χώρου η οποία περικλείει επίπεδη επιφάνεια S . Τη στιγμή $t' = t + dt$ το σύρμα, το οποίο έχει εν τω μεταξύ μετακινηθεί, περιγράφεται από μια άλλη καμπύλη C' του χώρου η οποία περικλείει επιφάνεια S' . Έστω \vec{dl} ένα στοιχείο της C στη φορά διαγραφής της καμπύλης, και έστω \vec{v} η ταχύτητα του στοιχείου αυτού ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή (η ταχύτητα κίνησης των στοιχείων της C μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος της καμπύλης αν το σύρμα περιστρέφεται):



Η φορά των στοιχείων επιφανείας \vec{da} και \vec{da}' καθορίζεται με βάση την εκλεγμένη φορά του \vec{dl} και τον κανόνα του δεξιού χεριού. Το στοιχείο της πλευρικής (κυλινδρικού) επιφάνειας S'' ισούται με $\vec{da}'' = \vec{dl} \times (\vec{v} dt) = (\vec{dl} \times \vec{v}) dt$.

Επειδή το μαγνητικό πεδίο είναι στατικό (χρονικά αμετάβλητο) μπορούμε να δούμε το πρόβλημα με ένα λίγο διαφορετικό τρόπο: Αντί να υποθέσουμε ότι η καμπύλη C μετακινείται μέσα στο χρονικό διάστημα dt έτσι ώστε τα σημεία της να συμπίπτουν με τα σημεία της καμπύλης C' τη χρονική στιγμή t' , θεωρούμε δύο σταθερές καμπύλες C και C' την ίδια χρονική στιγμή t . Προσέξτε ότι, στην περίπτωση στατικού πεδίου \vec{B} , η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από τη C' τη χρονική στιγμή $t' = t + dt$ (σύμφωνα με την αρχική μας υπόθεση) είναι ίδια με τη ροή που διέρχεται από την ίδια καμπύλη τη χρονική στιγμή t , αφού ούτως ή άλλως το μαγνητικό πεδίο δεν μεταβάλλεται μέσα στο χρονικό διάστημα dt . Τώρα, παρατηρούμε ότι οι ανοιχτές επιφάνειες $S_1 = S$ και $S_2 = S' \cup S''$ έχουν κοινό όριο την καμπύλη C . Επειδή το μαγνητικό πεδίο είναι σωληνωτό, η ίδια μαγνητική ροή Φ_m περνάει μέσα από τις S_1 και S_2 τη χρονική στιγμή t . Δηλαδή,

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{da}_1 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{da}_2 \Rightarrow \int_S \vec{B} \cdot \vec{da} = \int_{S'} \vec{B} \cdot \vec{da}' + \int_{S''} \vec{B} \cdot \vec{da}''$$

Αλλά, ξαναγυρίζοντας στην αρχική μας υπόθεση,

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{da} = \Phi_m(t) = \text{μαγνητική ροή μέσα από το σύρμα τη χρονική στιγμή } t$$

$$\int_{S'} \vec{B} \cdot \vec{da}' = \Phi_m(t + dt) = \text{μαγνητική ροή μέσα από το σύρμα τη χρονική στιγμή } t + dt$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \Phi_m(t) &= \Phi_m(t + dt) + \int_{S''} \vec{B} \cdot \vec{da}'' \Rightarrow \\ d\Phi_m &= \Phi_m(t + dt) - \Phi_m(t) = - \int_{S''} \vec{B} \cdot \vec{da}'' = - dt \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{dl} \times \vec{v}) \Rightarrow \\ - \frac{d\Phi_m}{dt} &= \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{dl} \times \vec{v}) = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \mathcal{E} \end{aligned}$$

σύμφωνα με τη σχέση (9.4) της Παρ.9.2.

10. (α) Ένας αγωγός χωρητικότητας C φέρει συνολικό φορτίο Q . Δείξτε ότι η ηλεκτροστατική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον αγωγό ισούται με

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

(β) Υπολογίστε την ενέργεια U στην ειδική περίπτωση ενός σφαιρικού αγωγού ακτίνας R . Χρησιμοποιώντας αυτό το παράδειγμα, επαληθεύστε ότι η πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου ισούται με

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (E = |\vec{E}|)$$

Λύση: (α) Ας παρακολουθήσουμε τη διαδικασία φόρτισης του αγωγού από αρχικό φορτίο 0 μέχρι τελικό φορτίο Q . Υποθέτουμε ότι η φόρτιση επιτυγχάνεται μεταφέροντας μικρές ποσότητες φορτίου dq από το άπειρο. Έστω q το ολικό φορτίο στον αγωγό κάποια χρονική στιγμή και έστω V το ηλεκτροστατικό δυναμικό του αγωγού τη στιγμή αυτή. (Θυμόμαστε ότι το φορτίο συγκεντρώνεται στην επιφάνεια του αγωγού. Θυμόμαστε επίσης ότι ο χώρος που καταλαμβάνει ένας αγωγός είναι χώρος σταθερού δυναμικού. Έτσι, το δυναμικό σε κάθε σημείο του αγωγού είναι V .) Έχουμε ότι

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C} \quad (1)$$

Έστω ότι μεταφέρουμε ένα πρόσθετο φορτίο dq από το άπειρο στον αγωγό (θεωρούμε ότι το dq είναι ομόσημο με το q). Κάτι τέτοιο απαιτεί να καταναλώσουμε έργο dW ώστε να υπερνικήσουμε την απωστική δύναμη που ασκεί στο dq το φορτίο q που ήδη υπάρχει στον αγωγό. Το έργο αυτό συντελεί στην αύξηση της ηλεκτροστατικής ενέργειας που είναι «αποθηκευμένη» στον αγωγό, και είναι αντίθετο του έργου dW_e που εν τω μεταξύ κάνει το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στο dq (θεωρούμε ότι η κίνηση του dq γίνεται χωρίς επιτάχυνση, έτσι ώστε η δύναμη που ασκούμε εμείς είναι κάθε στιγμή αντίθετη και ίσου μέτρου με αυτή που ασκεί το ηλεκτρικό πεδίο στο dq):

$$dW = -dW_e = -dq(V_\infty - V) = dq(V - V_\infty)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (5.26). Υποθέτοντας αυθαίρετα ότι $V_\infty=0$, έχουμε ότι η αύξηση dU της ηλεκτροστατικής ενέργειας στον αγωγό είναι

$$dU = dW = Vdq$$

Χρησιμοποιώντας την (1) και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε την τελική τιμή της ενέργειας U στον αγωγό όταν το φορτίο σ' αυτόν είναι Q :

$$dU = \frac{q}{C}dq \Rightarrow \int_0^U dU = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq \Rightarrow U = \frac{Q^2}{2C}$$

(β) Στην περίπτωση του σφαιρικού αγωγού (βλ. Κεφ.5, Πρόβλ.6),

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Έτσι,

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Τώρα, το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου είναι

$$E = 0, \quad r < R$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r \geq R$$

Ορίζουμε την ποσότητα $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, έτσι ώστε

$$u_e = 0, \quad r < R$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}, \quad r \geq R$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int u_e dv$ σε όλο το χώρο. Αρκεί βέβαια να το υπολογίσουμε στο εξωτερικό της σφαίρας ($r \geq R$), αφού μέσα στη σφαίρα $u_e = 0$. Το στοιχείο όγκου είναι $dv = 4\pi R^2 dr$. Έτσι,

$$\int u_e dv = \int_R^\infty \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} (4\pi r^2 dr) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = U$$

Το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα $\int u_e dv$ σε όλο το χώρο ισούται με την ολική ηλεκτροστατική ενέργεια U σημαίνει ακριβώς ότι η συνάρτηση $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ παριστά πυκνότητα ενέργειας. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ενέργεια U του αγωγού (ίση με το έργο που ξοδέψαμε για να τον φορτίσουμε) είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται γύρω του. Αν δεχθούμε αυτή την ερμηνεία, η συνάρτηση u_e παριστά πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου.

11. Ένα κύκλωμα με αυτεπαγωγή L διαρρέεται από ρεύμα I . Δείξτε ότι η μαγνητική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο κύκλωμα ισούται με

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Λύση: Έστω R η αντίσταση του κυκλώματος και έστω V η τάση της μπαταρίας που τροφοδοτεί το κύκλωμα. Τη στιγμή που συνδέουμε τη μπαταρία εφαρμόζουμε στο κύκλωμα μια ΗΕΔ V . Το κύκλωμα τότε αντιδρά και εμφανίζει μια ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής ίση με V_L , η οποία τείνει να εμποδίσει την αύξηση του ρεύματος. Μόλις όμως το ρεύμα σταθεροποιηθεί στην τελική του τιμή V/R , η V_L μηδενίζεται. Τη χρονική στιγμή t η ολική ΗΕΔ του κυκλώματος στη φορά του I είναι [βλ. σχέση (9.14)]

$$\mathcal{E} = V + V_L = V - L \frac{dI}{dt}$$

Από τη σχέση (9.12), $\mathcal{E} = IR \Rightarrow V - L \frac{dI}{dt} = IR \Rightarrow V = IR + L \frac{dI}{dt}$.

Η ισχύς (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου) που προσφέρει η μπαταρία στο κύκλωμα τη χρονική στιγμή t όταν το ρεύμα είναι I , ισούται με

$$P = IV = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

Ο όρος $I^2 R$ παριστά την ισχύ που χάνεται σαν θερμότητα Joule στην αντίσταση R , άρα την ισχύ που πρέπει να δαπανήσει η μπαταρία για να διατηρήσει σταθερό το ρεύμα ενάντια στις ωμικές απώλειες. Ο όρος $LI (dI/dt)$ παριστά την απαιτούμενη ισχύ για να αυξηθεί το ρεύμα ενάντια στην ΗΕΔ V_L λόγω αυτεπαγωγής. Η προσφερόμενη ενέργεια για το σκοπό αυτό αποθηκεύεται σαν μαγνητική ενέργεια στο κύκλωμα, ή εναλλακτικά, σαν ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που περιβάλλει το κύκλωμα. Ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ενέργειας λοιπόν είναι

$$P_m = \frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt} \quad \text{έτσι ώστε} \quad dU_m = LI dI \Rightarrow \int_0^{U_m} dU_m = L \int_0^I I dI \Rightarrow$$

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2$$

12. Ένα μακρύ σωληνοειδές μήκους l αποτελείται από N σπείρες. Το εμβαδόν κάθε σπείρας είναι S . Όπως αποδεικνύεται, το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς (όπου υπάρχει αέρας) είναι περίπου ομογενές, διευθύνεται παράλληλα προς τον άξονα του σωληνοειδούς, και το μέτρο του είναι

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I \quad \text{όπου} \quad n = \frac{N}{l} = \text{αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους}$$

Στο εξωτερικό του σωληνοειδούς το μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν. (α) Βρείτε την αυτεπαγωγή L του σωληνοειδούς. (β) Επαληθεύστε ότι η πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας μέσα στο σωληνοειδές ισούται με $u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$.

Λύση: (α) Η μαγνητική ροή μέσα από κάθε σπείρα είναι

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{da} = \int_S B da = B \int_S da = BS$$

ενώ η ολική ροή μέσα από τις N σπείρες είναι $\Phi_m = NBS$. Η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο κύκλωμα λόγω του σωληνοειδούς είναι, σύμφωνα με το νόμο της επαγωγής,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = -NS \frac{dB}{dt} = -n l S (\mu_0 n \frac{dI}{dt}) = -\mu_0 n^2 (Sl) \frac{dI}{dt} = -\mu_0 n^2 V \frac{dI}{dt}$$

όπου $V = Sl$ ο όγκος που καταλαμβάνει το σωληνοειδές. Όμως, γενικά, $\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$.

Έτσι, $L = \mu_0 n^2 (Sl) = \mu_0 n^2 V$.

(β) Σύμφωνα με το Πρόβλημα 11, η μαγνητική ενέργεια που είναι «αποθηκευμένη» στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 V) \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V$$

Η πυκνότητα ενέργειας στο χώρο αυτό τότε είναι $u_m = \frac{U_m}{V} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$.

(Εξω από το σωληνοειδές, $B=0$ και $u_m=0$.)

13. Στην Παράγραφο 9.6 δείξαμε ότι οι εξισώσεις του Maxwell σε διαφορική μορφή οδηγούν στη σχέση (9.31), η οποία αποτελεί τη μαθηματική έκφραση της αρχής διατήρησης του φορτίου. Δείξτε ότι στην ίδια σχέση θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε την ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων του Maxwell [βλ. εξισώσεις (5.5) και (9.16)].

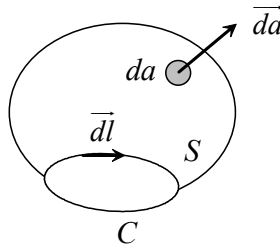
Λύση: Η σχέση (5.5) (νόμος του Gauss), σε συνδυασμό με την (5.7), γράφεται

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \quad (1)$$

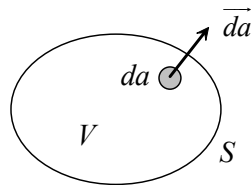
ενώ η σχέση (9.16) (νόμος Ampère-Maxwell), σε συνδυασμό με την (9.15), παίρνει τη μορφή

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{da} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{da} \quad (2)$$

Προσέξτε ότι η S στην (1) είναι κλειστή επιφάνεια, ενώ στην (2) η S είναι ανοιχτή:



Μπορούμε όμως να την κλείσουμε κι αυτή αν αφήσουμε την καμπύλη C (που αποτελεί το περίγραμμα της S) να συρρικνωθεί σιγά-σιγά ώσπου να εκφυλιστεί σε σημείο, φροντίζοντας εξαρχής να ορίσουμε τη φορά του \vec{da} έτσι ώστε να δείχνει προς το εξωτερικό της κλειστής επιφάνειας S που προκύπτει με τον τρόπο αυτό:



Καθώς εκφυλίζεται η C σε σημείο, το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (2) μηδενίζεται, και η σχέση αυτή παίρνει τη νέα μορφή (απαλείφοντας το μ_0)

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{da} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = 0 \quad (3)$$

Θεωρώντας τώρα ότι οι κλειστές επιφάνειες S στις (1) και (3) ταυτίζονται, αντικαθιστούμε την πρώτη από αυτές τις σχέσεις στη δεύτερη και βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = - \oint_S \vec{J} \cdot \vec{da} ,$$

που δεν είναι άλλη από τη σχέση (9.31).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

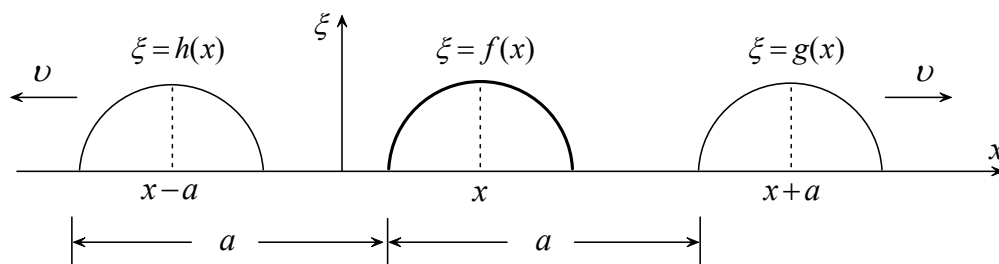
10.1 Κυματική Εξίσωση

Όπως γνωρίζουμε, *πεδίο* είναι μια περιοχή του χώρου σε κάθε σημείο της οποίας ένα φυσικό μέγεθος παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή. Ένα πεδίο μπορεί να περιγραφεί με μια μαθηματική συνάρτηση της μορφής $f(\vec{r})$ (*βαθμωτό πεδίο*) ή $\vec{F}(\vec{r})$ (*διανυσματικό πεδίο*), όπου f ή \vec{F} το φυσικό μέγεθος και \vec{r} το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της θεωρούμενης περιοχής. Ένα πεδίο καλείται *στατικό* όταν είναι χρονικά αμετάβλητο: $\partial f / \partial t = 0$, $\partial \vec{F} / \partial t = 0$.

Σε ένα στατικό πεδίο τίποτα δεν αλλάζει με το χρόνο: μοιάζει με μια ήρεμη λίμνη όπου το νερό μένει αδιατάρακτο. Μπορεί η μορφολογία του τοπίου να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, αλλά *σε κάθε σημείο* μένει χρονικά σταθερή. Τώρα, θα έχετε παρατηρήσει τι συμβαίνει όταν ρίχνουμε μια πέτρα στο νερό μιας λίμνης: η *διαταραχή* που προκαλεί τοπικά η πέτρα απλώνεται προς όλες τις κατευθύνσεις με μια σειρά κυματισμών, καταστρέφοντας τη γαλήνη του νερού ακόμα και σε σημεία απομακρυσμένα από τη θέση πρόσπτωσης της πέτρας. Η διαταραχή αυτή συνιστά ακριβώς μια *χρονική μεταβολή* μιας φυσικής συνθήκης (ηρεμία του νερού). Και, όπως είπαμε, η διαταραχή δεν περιορίζεται στο σημείο όπου αρχικά εκδηλώθηκε αλλά διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα και σε άλλα σημεία του χώρου (εδώ, του νερού) δημιουργώντας και εκεί συνθήκες χρονικής μεταβολής. Το φαινόμενο αυτό αποτελεί ίσως το πιο απλό παράδειγμα αυτού που ονομάζουμε κύμα.

Γενικά μιλώντας, *κύμα* ονομάζεται κάθε φυσική κατάσταση που, παραγόμενη σε ένα σημείο του χώρου, διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα και γίνεται αργότερα αντιληπτή σε άλλα σημεία του χώρου (έχοντας ενδεχομένως υποστεί στο μεταξύ και κάποια αλλοίωση). Αυτό που βασικά διαδίδεται είναι η *διαταραχή* (μεταβολή) σε ένα υπάρχον πεδίο το οποίο εκφράζει μια φυσική ιδιότητα, όπως π.χ. ένα Η/Μ πεδίο, η παραμόρφωση ενός ελατηρίου, η πίεση σε ένα αέριο, η κάθετη απομάκρυνση σε μια χορδή, η συμπίεση σε ένα στερεό, κλπ.

Αναζητούμε τώρα μια μαθηματική περιγραφή του φαινομένου της διάδοσης κύματος. Για ευκολία, θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου η διαταραχή δεν υφίσταται αλλοίωση κατά τη διάδοσή της. Η πιο απλή περίπτωση πεδίου είναι μια συνάρτηση της μορφής $\xi = f(x)$. Το πεδίο αυτό παρίσταται με μια καμπύλη στο επίπεδο $x\xi$:



Αν μετατοπίσουμε την αρχική καμπύλη $\zeta=f(x)$ (μεσαία στο σχήμα) κατά μια απόσταση a προς τα δεξιά, θα πάρουμε μια νέα συνάρτηση $\zeta=g(x)$, ενώ μετατοπίζοντας την αρχική καμπύλη κατά a προς τα αριστερά παίρνουμε μια συνάρτηση $\zeta=h(x)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε x , $f(x)=g(x+a)=h(x-a)$, έτσι ώστε

$$g(x)=f(x-a), \quad h(x)=f(x+a) \quad (10.1)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η απόσταση a δεν μένει σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $a=vt$, όπου v μια θετική σταθερά. Τότε γράφουμε:

$$\zeta = g(x, t) = f(x - vt), \quad \zeta = h(x, t) = f(x + vt) \quad (10.2)$$

Η συνάρτηση $g(x, t)$ παριστά μια καμπύλη κινούμενη προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου v , ενώ η συνάρτηση $h(x, t)$ παριστά μια καμπύλη κινούμενη προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου v . Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι δύο καμπύλες συμπίπτουν με τη σταθερή καμπύλη $f(x)$, αφού $g(x, 0) = h(x, 0) = f(x)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μια έκφραση της μορφής

$$\zeta = \zeta(x, t) = f(x \pm vt) \quad (10.3)$$

περιγράφει μια φυσική κατάσταση που διαδίδεται χωρίς παραμόρφωση κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα (μέτρου) v . Ένα τέτοιο φαινόμενο συνιστά *κυματική κίνηση*.

Παρατηρήσεις:

1. Στην έκφραση (10.3) το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί σε κύμα που διαδίδεται στην κατεύθυνση $-x$, ενώ το αρνητικό πρόσημο σε κύμα που διαδίδεται στην κατεύθυνση $+x$.

2. Εναλλακτική και ισοδύναμη της (10.3) είναι η έκφραση

$$\zeta = \zeta(x, t) = F(t \pm x/v) \quad (10.4)$$

αν παρατηρήσουμε ότι $f(x \pm vt) = f[\pm v(t \pm x/v)] \equiv F(t \pm x/v)$.

3. Θεωρούμε έναν παρατηρητή που βρίσκεται σε ένα δοσμένο σημείο $x=x_0$. Ο παρατηρητής αυτός καταγράφει τις τιμές του πεδίου ζ και βρίσκει ότι μεταβάλλονται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $\zeta=\zeta(x_0, t)=f(x_0 \pm vt)$, όπου v η ταχύτητα μετατόπισης της καμπύλης που παριστά το πεδίο. Αν τώρα η καμπύλη έμενε ακίνητη ($v=0$) ο παρατηρητής στο σημείο x_0 θα αντιλαμβανόταν μια χρονικά σταθερή τιμή $\zeta=f(x_0)$, ενώ το σύνολο των παρατηρητών πάνω στον άξονα x θα κατέγραφαν ένα στατικό πεδίο $\zeta=f(x)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

δεν υπάρχει φαινόμενο κυματικής κίνησης στην περίπτωση των στατικών πεδίων.

Πράγματι, κύμα είναι η διάδοση μιας διαταραχής \equiv χρονικής μεταβολής. Άρα, αν κατ'αρχήν δεν υπάρχει διαταραχή, δεν υπάρχει και τίποτα να διαδοθεί!

Πρόταση: Οι συναρτήσεις (10.2): $\xi=f(x \pm v t)$, καθώς και το άθροισμά τους, ικανοποιούν την κυματική εξίσωση

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0} \quad (10.5)$$

Απόδειξη: Έστω $\xi=f(x \pm v t)$. Θέτουμε $w=x \pm v t$, έτσι ώστε $\xi=f(w)$. Έχουμε:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df(w)}{dw} \frac{\partial w}{\partial x} = f'(w) \cdot 1 = f'(w) \quad \text{και όμοια} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = f''(w)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{df(w)}{dw} \frac{\partial w}{\partial t} = \pm v f'(w) \quad \text{και όμοια} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\pm v)^2 f''(w) = v^2 f''(w)$$

Έτσι,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = f''(w) - \frac{1}{v^2} v^2 f''(w) = 0$$

Άρα, οι συναρτήσεις $\xi=f_1(x-vt)$ και $\xi=f_2(x+vt)$ είναι λύσεις της (10.5). Επειδή η (10.5) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση, το άθροισμα δύο λύσεών της είναι επίσης λύση. Η γενική λύση της (10.5) τότε είναι

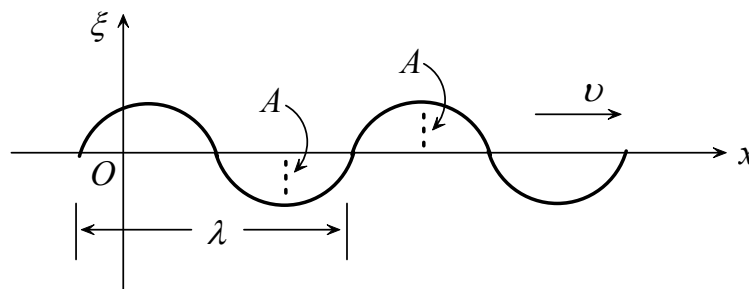
$$\xi = \xi(x, t) = f_1(x - v t) + f_2(x + v t) \quad (10.6)$$

για αυθαίρετες επιλογές των συναρτήσεων f_1 και f_2 .

10.2 Αρμονικό Κύμα

Θεωρούμε κύμα $\xi(x, t)$ που διαδίδεται στη θετική κατεύθυνση x με ταχύτητα v . Τη χρονική στιγμή $t=0$ το πεδίο ξ έχει τη μορφή

$$\xi(x, 0) = f(x) = A \cos(kx + \alpha) \quad (A > 0, -\infty < x < \infty) \quad (10.7)$$



(στο σχήμα δείχνουμε μόνο ένα τμήμα της καμπύλης $\xi(x,0)$, η οποία στην πραγματικότητα εκτείνεται σε ολόκληρο τον άξονα x). Για $t > 0$ το κύμα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\xi(x, t) = f(x - v t) = A \cos[k(x - v t) + \alpha] \quad (10.8)$$

Θέτοντας

$$\omega = kv \quad (10.9)$$

η (10.8) γράφεται

$$\zeta(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha) \quad (10.10)$$

Η θετική σταθερά A ονομάζεται *πλάτος* του κύματος, ενώ η σταθερά α μπορεί να πάρει αυθαίρετες τιμές. Για παράδειγμα, για $\alpha=0$ η (10.10) γράφεται $\zeta=A\cos(kx-\omega t)$, ενώ για $\alpha=\pi/2$, $\zeta=A\cos(kx-\omega t+\pi/2)=-A\sin(kx-\omega t)$, κλπ. Θέτουμε, επίσης,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (10.11)$$

έτσι ώστε

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (10.12)$$

Το k ονομάζεται *κυματαριθμός*, το λ *μήκος κύματος*, το T *περίοδος*, το $f=1/T$ *συχνότητα*, και το ω *κυκλική συχνότητα*. Παρατηρούμε ότι

$$\zeta(x+\lambda, t) = \zeta(x, t), \quad \zeta(x, t+T) = \zeta(x, t) \quad (10.13)$$

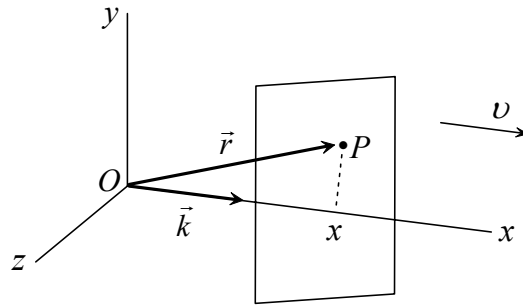
Δηλαδή, η συνάρτηση $\zeta(x, t)$ είναι περιοδική ως προς x και ως προς t με αντίστοιχες περιόδους¹ $\lambda=2\pi/k$ και $T=2\pi/\omega$. Επιπλέον, από τη σχέση $\lambda=vT$ προκύπτει ότι το κύμα διανύει απόσταση ενός μήκους κύματος λ μέσα σε χρόνο μιας περιόδου T .

Για σταθερό x , π.χ. στο σημείο $x=0$, έχουμε: $\zeta(0, t)=A \cos(-\omega t+\alpha)=A \cos(\omega t-\alpha)$. Δηλαδή, σε κάθε σημείο x , η τιμή ζ του πεδίου μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο με περίοδο $T=2\pi/\omega$. Για το λόγο αυτό, το κύμα της εξίσωσης (10.10) ονομάζεται *αρμονικό κύμα*. Έτσι, π.χ., αν θέσουμε σε αρμονική ταλάντωση τα μόρια ενός ελαστικού μέσου στο σημείο $x=0$, η διαταραχή θα διαδοθεί με πεπερασμένη ταχύτητα v σε άλλα σημεία του μέσου, θέτοντας κι εκεί τα μόρια σε ταλάντωση με την ίδια συχνότητα f .

10.3 Επίπεδο Κύμα στο Χώρο

Θεωρούμε ένα κύμα $\zeta(x, t)=A \cos(kx-\omega t+\alpha)$ που διαδίδεται στη θετική κατεύθυνση x με ταχύτητα $v=\omega/k$. Το όρισμα $\varphi=kx-\omega t+\alpha$ ονομάζεται *φάση* του κύματος. Μια δεδομένη χρονική στιγμή t η φάση φ είναι κοινή για όλα τα σημεία του χώρου που αντιστοιχούν σε δοσμένη τιμή $x=c$ της μεταβλητής x . Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων αυτών για δοσμένο c είναι ένα *επίπεδο* που τέμνει κάθετα τον άξονα x (διάφορες τιμές τού c αντιστοιχούν σε διάφορα επίπεδα παράλληλα μεταξύ τους):

¹ Γενικά, η συνάρτηση $\cos(\omega t+\beta)$ έχει περίοδο $T=2\pi/\omega$. Ισοδύναμα, η συνάρτηση $\cos[(2\pi t/T)+\beta]$ έχει περίοδο T . Τα ανάλογα ισχύουν για τη συνάρτηση $\cos(kx+\gamma)$ με περίοδο $\lambda=2\pi/k$.



Γενικά,

ένα κύμα του οποίου οι επιφάνειες σταθερής φάσης είναι επίπεδες καλείται επίπεδο κύμα.

Έστω P ένα σημείο του χώρου, με διάνυσμα θέσης $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ ως προς την αρχή O του συστήματος συντεταγμένων μας. Πρέπει να τονίσουμε ότι, αν και διαδίδεται στη διεύθυνση του άξονα x , το κύμα γίνεται αισθητό σε όλα τα σημεία του χώρου (όχι μόνο στα σημεία του άξονα x !). Ειδικά, στο σημείο P η τιμή του πεδίου ξ είναι $\xi(\vec{r}, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha)$. Έστω \vec{k} ένα διάνυσμα στην κατεύθυνση διαδόσεως του κύματος (εδώ, $+x$), μέτρου $k = \omega/v$. Τότε,

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = (k\hat{u}_x) \cdot (x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z) = kx$$

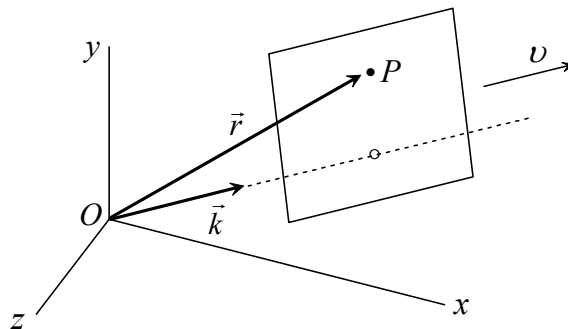
οπότε $\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)$. Η έκφραση αυτή δεν περιορίζεται στην περίπτωση κύματος που διαδίδεται στην κατεύθυνση $+x$ αλλά ισχύει γενικά για οποιαδήποτε κατεύθυνση διαδόσεως. Έτσι, η έκφραση

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \tag{10.14}$$

παριστά ένα επίπεδο αρμονικό κύμα που διαδίδεται στην κατεύθυνση του \vec{k} με ταχύτητα μέτρου $v = \omega/k$, όπου $k = |\vec{k}|$. Το \vec{k} καλείται *κυματοδιάνυσμα*. Για δοσμένη χρονική στιγμή t τα επίπεδα σταθερών φάσεων είναι κάθετα στο \vec{k} :

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha = \text{σταθ.} \Leftrightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{σταθ.} \Leftrightarrow k_x x + k_y y + k_z z = \text{σταθ.}$$

(εξίσωση επιπέδου κάθετου στο \vec{k}).



Παραδείγματα:

1) Για αρμονικό κύμα που διαδίδεται στην κατεύθυνση $-x$, έχουμε ότι $\vec{k} = -k\hat{u}_x$, $\vec{k} \cdot \vec{r} = -kx$, και $\xi(\vec{r}, t) = A \cos(-kx - \omega t + \alpha) = A \cos(kx + \omega t + \beta)$ ($\beta = -\alpha$).

2) Για αρμονικό κύμα στην κατεύθυνση $+z$, έχουμε: $\vec{k} = k\hat{u}_z$, $\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$, και $\xi(\vec{r}, t) = A \cos(kz - \omega t + \alpha)$. (Βρείτε την αντίστοιχη έκφραση για κύμα στην κατεύθυνση $-z$.)

Γενικότερα τώρα, η έκφραση

$$\xi(\vec{r}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (10.15)$$

όπου f μια αυθαίρετη συνάρτηση, παριστά επίπεδο κύμα που διαδίδεται στην κατεύθυνση του \vec{k} με ταχύτητα μέτρου

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (10.16)$$

όπου $k = |\vec{k}|$. Η συνάρτηση $\xi(\vec{r}, t) \equiv \xi(x, y, z, t)$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (10.17)$$

Απόδειξη: Θέτουμε $s = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t$, έτσι ώστε $\xi = f(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{df(s)}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = k_x f'(s), & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= k_x^2 f''(s), & \text{κλπ.} \\ \nabla^2 \xi &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) f''(s) = k^2 f''(s) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{df(s)}{ds} \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega f'(s), & \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= (-\omega)^2 f''(s) = \omega^2 f''(s) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = k^2 f''(s) - \frac{\omega^2}{v^2} f''(s) = (k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}) f''(s) = 0$$

αφού $k = \omega/v$ λόγω της (10.16).

Μιγαδική μορφή επίπεδου κύματος:

Ελπίζω να τα πηγαίνετε καλά με τους μιγαδικούς αριθμούς γιατί θα τους χρησιμοποιήσουμε αρκετά στη συνέχεια! Ο λόγος είναι απλός: αντί να δουλεύουμε με ημίτονα και συνημίτονα είναι ευκολότερο να εργαζόμαστε με εκθετικές συναρτήσεις, έστω και μιγαδικές. Έτσι, ένα επίπεδο αρμονικό κύμα γράφεται σε μιγαδική μορφή ως εξής:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} \equiv A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (10.18)$$

όπου A ένα μιγαδικό πλάτος. Όπως κάθε μιγαδικός αριθμός, το A μπορεί να τεθεί στη μορφή

$$A = |A| e^{i\alpha} \quad (10.19)$$

όπου $|A|$ το μέτρο του A και $\alpha \in \mathbb{R}$. Έτσι, η (10.18) γράφεται

$$\xi(\vec{r}, t) = |A| e^{i\alpha} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = |A| e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)} \quad (10.20)$$

Ως γνωστόν, γενικά, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Έτσι,

$$\xi(\vec{r}, t) = |A| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) + i |A| \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)$$

Παρατηρούμε ότι το πραγματικό μέρος του ξ ισούται με

$$\text{Re} [\xi(\vec{r}, t)] = |A| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \quad (10.21)$$

που είναι η γνωστή μας πραγματική μορφή (10.14) του επίπεδου αρμονικού κύματος.

Σαν γενική παρατήρηση, πρέπει να τονιστεί ότι

τα ίδια τα μιγαδικά μεγέθη στερούνται φυσικής σημασίας, άρα δεν μπορούν να παριστούν φυσικές ποσότητες. Σε κάθε περίπτωση, το φυσικό μέγεθος είναι απλά το πραγματικό μέρος της αντίστοιχης μιγαδικής ποσότητας.

10.4 Ηλεκτρομαγνητικό Κύμα

Η πρόβλεψη από τον Maxwell ότι οι ηλεκτρομαγνητικές (H/M) διαταραχές (ή, αν προτιμάτε, τα H/M σήματα) διαδίδονται στο χώρο με τη μορφή κυμάτων που «τρέχουν» με ταχύτητα ίση με αυτή του φωτός, αποτελεί ιστορικά έναν από τους μεγαλύτερους θριάμβους της Θεωρητικής Φυσικής. Θα ισχυριζόμουν χωρίς καμία δυσκολία ότι η ανακάλυψη αυτή δεν υστερεί σε σπουδαιότητα από τη Θεωρία της Σχετικότητας! (Κάθε φορά που απολαμβάνετε την αγαπημένη σας μουσική στο ραδιόφωνο ή τον τελικό του Champions League στην τηλεόραση, ή στέλνετε μηνύματα στα αγαπημένα σας πρόσωπα με το κινητό σας τηλέφωνο, να σκέφτεστε ότι όλα ξεκίνησαν από το θείο Maxwell. Το λιγότερο λοιπόν που του χρωστάμε είναι να ξέρουμε να γράφουμε σωστά τις εξισώσεις του στις εξετάσεις Φυσικής, χωρίς τη χρήση «υποβοηθημάτων»!)

Ξεκινάμε με κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις πάνω στις εξισώσεις του Maxwell:

α) Στον κενό χώρο δεν υπάρχουν φορτία ή ρεύματα, είτε ελεύθερα είτε δέσμια (βλ. Κεφ.8). Έτσι, οι ολικές πυκνότητες φορτίου και ρεύματος είναι μηδέν: $\rho=0$, $\vec{J}=0$. Οι γενικές εξισώσεις Maxwell (9.20) γράφονται:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & (\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{(κενό)} \quad (10.22)$$

β) Μέσα στην ύλη δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (10.22), ακόμα και στους μονωτές όπου δεν υπάρχουν *ελεύθερα* φορτία ή ρεύματα. Ο λόγος είναι πως μέσα στην ύλη μπορεί να υπάρχουν *δέσμια* φορτία και ρεύματα, έτσι ώστε οι ολικές πυκνότητες ρ και \vec{J} δεν είναι μηδέν, ακόμα κι αν οι *ελεύθερες* πυκνότητες ρ_f και \vec{J}_f είναι μηδέν. Στην περίπτωση των *μονωτών*, λοιπόν, θα χρησιμοποιούμε την εναλλακτική μορφή (9.25) των εξισώσεων Maxwell, θέτοντας $\rho_f=0$ και $\vec{J}_f=0$:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 & (\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{(μονωτής)} \quad (10.23)$$

γ) Αν το μονωτικό μέσο είναι *γραμμικό και ομογενές*, τότε $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B} / \mu$, με σταθερά ε και μ . Όπως είναι εύκολο να δείξετε, οι σχέσεις (10.23) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & (\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{(γραμμικός μονωτής)} \quad (10.24)$$

Συγκρίνοντας τις (10.22) και (10.24) παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις Maxwell για γραμμικό μονωτή προκύπτουν από εκείνες για το κενό αν στη θέση των ϵ_0 και μ_0 βάλουμε τα ϵ και μ , αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι

κάθε φυσικό ή μαθηματικό συμπέρασμα που εξάγεται από τις εξισώσεις Maxwell για το κενό ισχύει και για ένα γραμμικό μονωτή αν αντικαταστήσουμε τα ϵ_0 και μ_0 με τα ϵ και μ , αντίστοιχα.

Μετά τις εισαγωγικές αυτές παρατηρήσεις παραθέτουμε μια χρήσιμη διανυσματική ταυτότητα που θα τη χρειαστούμε παρακάτω:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (10.25)$$

όπου $\vec{A} = A_x \hat{u}_x + A_y \hat{u}_y + A_z \hat{u}_z$ ένα διανυσματικό πεδίο. Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, όπου τα μοναδιαία διανύσματα είναι σταθερά,

$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x) \hat{u}_x + (\nabla^2 A_y) \hat{u}_y + (\nabla^2 A_z) \hat{u}_z \quad (10.26)$$

[Σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, π.χ. σφαιρικές ή κυλινδρικές, μια σχέση της μορφής (10.26) δεν είναι σωστή. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε την (10.25) για να ορίσουμε το $\nabla^2 \vec{A}$. Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε τον τελεστή ∇^2 απευθείας στο \vec{A} παραγωγίζοντας τόσο τις συνιστώσες του όσο και τα μοναδιαία διανύσματα που αντιστοιχούν στο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων.]

α) Κυματική εξίσωση για το κενό ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$)

Παίρνοντας το *rot* της (10.22)(γ) και χρησιμοποιώντας τις (10.22)(α),(δ), έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad (\text{κενό}) \quad (10.27)$$

Όμοια, παίρνοντας το *rot* της (10.22)(δ) και χρησιμοποιώντας τις (10.22)(β),(γ), βρίσκουμε:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0} \quad (\text{κενό}) \quad (10.28)$$

Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων Maxwell (10.22) από το οποίο ξεκινήσαμε είναι πρώτης τάξεως και πεπλεγμένο ως προς τα πεδία \vec{E} και \vec{B} (δύο από τις εξισώσεις περιέχουν και τα δύο πεδία μαζί). Αυτό που πετύχαμε είναι να αποσυμπλέξουμε το σύστημα παίρνοντας χωριστές εξισώσεις για τα \vec{E} και \vec{B} , οι οποίες όμως τώρα είναι δευτέρας τάξεως (τίποτα δεν είναι δωρεάν, ακόμα και στα Μαθηματικά!).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να προσέξετε ιδιαίτερα το εξής:

Ενώ κάθε λύση (\vec{E}, \vec{B}) των εξισώσεων Maxwell (10.22) ικανοποιεί τις (10.27) και (10.28), το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα!

Πράγματι, οι (10.27) και (10.28) προέκυψαν από τις (10.22) με χρήση παραγωγισής και απαλοιφής. Όπως γνωρίζουμε, σημαντικό μέρος της αρχικής «πληροφορίας» χάνεται μέσα από τέτοιας μορφής διαδικασίες. (Θυμηθείτε, για παράδειγμα, ότι από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στη μιγαδική ανάλυση προκύπτει με παραγωγή η εξίσωση του Laplace χωριστά για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης, ενώ δεν ισχύει αντίστροφα ότι κάθε ζεύγος λύσεων της εξίσωσης Laplace ικανοποιεί τις συνθήκες Cauchy-Riemann.)

Σίγουρα τώρα θα προσέξατε ότι οι (10.27) και (10.28) είναι στην ουσία η ίδια εξίσωση γραμμένη δύο φορές, μία για κάθε πεδίο \vec{E} και \vec{B} . Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{όπου} \quad \vec{A} = \vec{E} \text{ ή } \vec{B} \quad (10.29)$$

Θέτουμε

$$\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 \equiv \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}} \quad (\text{κενό}) \quad (10.30)$$

και γράφουμε την (10.29) στη μορφή

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0} \quad (\text{κενό}) \quad (10.31)$$

όπου $\vec{A} = \vec{E}$ ή \vec{B} . Αναλυτικά, η (10.31) ισχύει αν στη θέση του \vec{A} θέσουμε οποιαδήποτε συνιστώσα του \vec{E} ή του \vec{B} (συνολικά 6 πεδία). Παρατηρούμε τα εξής:

1. Η (10.31) είναι εξίσωση κύματος το οποίο διαδίδεται με ταχύτητα c . (Τα επίπεδα κύματα της Παρ.10.3 ικανοποιούν την εξίσωση αυτή για $v=c$, αποτελούν όμως μόνο μια ειδική κατηγορία λύσεων της (10.31). Άλλες λύσεις είναι τα σφαιρικά κύματα, στα οποία θα αναφερθούμε αργότερα.)
2. Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των ε_0 και μ_0 στην (10.30) βρίσκουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Αυτό κάτι σας θυμίζει: είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό!

Οι λύσεις (\vec{E}, \vec{B}) της κυματικής εξίσωσης (10.31), όταν είναι ταυτόχρονα και λύσεις των εξισώσεων του Maxwell, ονομάζονται ηλεκτρομαγνητικά (H/M) κύματα.

Φυσική σημασία:

Μια μεταβολή (διαταραχή) του Η/Μ πεδίου σε μια περιοχή του χώρου, μια δεδομένη χρονική στιγμή, δεν γίνεται ταυτόχρονα αντιληπτή και στα άλλα σημεία του χώρου αλλά διαδίδεται στο χώρο με τη μορφή κύματος που «ταξιδεύει» με την ταχύτητα του φωτός. Ειδικά, το ίδιο το φως είναι μια Η/Μ διαταραχή που διαδίδεται σαν Η/Μ κύμα.

Όπως είναι προφανές,

στην περίπτωση ενός στατικού Η/Μ πεδίου δεν υφίσταται ποθενά διαταραχή (χρονική μεταβολή), άρα ούτε και φαινόμενο διάδοσης Η/Μ κύματος.

β) Κυματική εξίσωση για γραμμικό, μη-αγώγιμο μέσο

Από τις εξισώσεις Maxwell (10.24) για γραμμικό, μη-αγώγιμο μέσο, ή ισοδύναμα, από τις σχέσεις (10.27) και (10.28) με τις αντικαταστάσεις $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ και $\mu_0 \rightarrow \mu$, βρίσκουμε τις κυματικές εξισώσεις

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0} \quad (10.32)$$

Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν Η/Μ κύμα που διαδίδεται μέσα στο μη-αγώγιμο μέσο με ταχύτητα

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}} \quad (\text{γραμμικός μονωτής}) \quad (10.33)$$

Το ορατό φως είναι μια μορφή Η/Μ κύματος. Για τα περισσότερα διαφανή μέσα ισχύει ότι $\mu \approx \mu_0$. Δεδομένου ότι, γενικά, $\epsilon > \epsilon_0$, συγκρίνοντας τις (10.30) και (10.33) παρατηρούμε ότι $\epsilon\mu > \epsilon_0\mu_0 \Rightarrow v < c$. Δηλαδή, το φως διαδίδεται με μικρότερη ταχύτητα στην ύλη απ' ό,τι στο κενό. Ο δείκτης διαθλάσεως ενός διαφανούς μέσου ορίζεται

$$n = \frac{c}{v} = \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \right)^{1/2} \approx \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} = \sqrt{\kappa_e} \quad (10.34)$$

όπου $\kappa_e = 1 + \chi_e$ η διηλεκτρική σταθερά του υλικού. Παρατηρούμε ότι οι οπτικές ιδιότητες ενός μέσου σχετίζονται άμεσα με τις ηλεκτρικές (κυρίως) ιδιότητές του.

10.5 Μονοχρωματικό Επίπεδο Η/Μ Κύμα στο Κενό

Θεωρούμε και πάλι τις εξισώσεις του Maxwell στο κενό:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & (\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.35)$$

Όπως είδαμε, τα πεδία \vec{E} και \vec{B} ικανοποιούν την κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{όπου} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (10.36)$$

Στην Παρ.10.3 δείξαμε ότι η εξίσωση αυτή δέχεται λύσεις της μορφής

$$\vec{A} = \vec{F}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \omega/k = c \quad (k = |\vec{k}|) \quad (10.37)$$

Η απλούστερη λύση είναι ένα *μονοχρωματικό επίπεδο κύμα* κυκλικής² συχνότητας ω που διαδίδεται στην κατεύθυνση του \vec{k} :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} & (\alpha) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} & (\beta) \end{aligned}} \quad (10.38)$$

όπου τα \vec{E}_0, \vec{B}_0 παριστούν σταθερά *μιγαδικά* πλάτη, και $\omega/k=c$. (Ο όρος *μονοχρωματικό* δηλώνει ότι το Η/Μ κύμα είναι ένα *αρμονικό* κύμα που, εξ ορισμού, περιέχει μόνο μία συχνότητα ω .) Οι λύσεις (10.38) φαίνονται πολύ ειδικές και, ως εκ τούτου, περιορισμένης χρησιμότητας. Εν τούτοις, *κάθε* λύση της κυματικής εξίσωσης (10.36) μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός μονοχρωματικών λύσεων με διάφορα ω και \vec{k} τέτοια ώστε $\omega/k=c$ (όπου k το μέτρο τού \vec{k}). Για παράδειγμα, η γενική λύση για το $\vec{E}(\vec{r}, t)$ μπορεί να παρασταθεί σαν (τριπλό) ολοκλήρωμα

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} \quad \text{όπου} \quad d\vec{k} \equiv dk_x dk_y dk_z \quad (10.39)$$

Για Η/Μ κύμα που διαδίδεται στην κατεύθυνση $+x$, έχουμε ότι $\vec{k} = k \hat{u}_x$, $\vec{k} \cdot \vec{r} = kx$, και

$$\vec{E}(x, t) = \int \vec{E}_0(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = \int \vec{E}_0(k) e^{ik(x-ct)} dk \equiv \vec{F}(x-ct) \quad (10.40)$$

² Στο εξής, και όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με την f , η κυκλική συχνότητα ω θα καλείται απλά «συχνότητα».

Όπως έχουμε ήδη τονίσει, αν και κάθε λύση (\vec{E}, \vec{B}) των εξισώσεων Maxwell (10.35) είναι και λύση της κυματικής εξίσωσης (10.36), το αντίστροφο δεν ισχύει. Έτσι, οι λύσεις (10.38) της κυματικής εξίσωσης δεν είναι αυτόματα και λύσεις των εξισώσεων Maxwell, δεν παριστούν δηλαδή *εξαρχής* H/M κύματα. Θα πρέπει λοιπόν να αντικαταστήσουμε τις γενικές λύσεις (10.38) στις εξισώσεις Maxwell (10.35) για να βρούμε τις επιπλέον συνθήκες που οι εξισώσεις αυτές επιβάλλουν. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε δύο ταυτότητες: Αν Φ είναι ένα βαθμωτό και \vec{A} ένα διανυσματικό πεδίο, τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{A}) &= (\vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\ \vec{\nabla} \times (\Phi \vec{A}) &= (\vec{\nabla} \Phi) \times \vec{A} + \Phi (\vec{\nabla} \times \vec{A})\end{aligned}\quad (10.41)$$

Στη δική μας περίπτωση θέτουμε $\Phi = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t}$ και $\vec{A} = \vec{E}_0$ ή \vec{B}_0 . Επίσης έχουμε:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = 0 \quad (\text{διότι } \vec{E}_0, \vec{B}_0 \text{ σταθερά})$$

$$\vec{\nabla} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = (\hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = i(k_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y + k_z \hat{u}_z) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = i\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} = -i\omega e^{-i\omega t}$$

Αντικαθιστώντας τις (10.38)(α) και (β) στις (10.35)(α) και (β), αντίστοιχα, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\vec{E}_0 e^{-i\omega t}) \cdot \vec{\nabla} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0 &\Rightarrow (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 \\ (\vec{B}_0 e^{-i\omega t}) \cdot \vec{\nabla} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0 &\Rightarrow (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0\end{aligned}\quad \Rightarrow$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (10.42)$$

Πολλαπλασιάζοντας με το $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ και χρησιμοποιώντας τις (10.38), βρίσκουμε:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.43)$$

Αυτό σημαίνει ότι, σε ένα μονοχρωματικό επίπεδο H/M κύμα τα πεδία \vec{E} και \vec{B} είναι κάθετα στο κυματοδιάνυσμα \vec{k} , δηλαδή κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος. Άρα,

το μονοχρωματικό επίπεδο H/M κύμα είναι εγκάρσιο κύμα

(τα πεδία \vec{E} και \vec{B} «ταλαντώνονται» κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως).

Αντικαθιστώντας τώρα τις (10.38)(α) και (β) στις (10.35)(γ) και (δ), αντίστοιχα, έχουμε:

$$e^{-i\omega t} (\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \times \vec{E}_0 = i\omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Rightarrow (\vec{k} \times \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$e^{-i\omega t} (\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \times \vec{B}_0 = -i\omega \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Rightarrow (\vec{k} \times \vec{B}_0) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Rightarrow$$

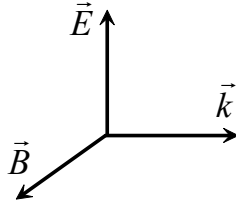
$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0, \quad \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 \quad (10.44)$$

Πολλαπλασιάζοντας με το $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ και χρησιμοποιώντας τις (10.38), βρίσκουμε:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}, \quad \vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \quad (10.45)$$

Παρατηρούμε ότι

τα πεδία \vec{E} και \vec{B} είναι κάθετα μεταξύ τους όπως και κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως \vec{k} του κύματος. Συγκεκριμένα, τα $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ αποτελούν δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα:



Προσέξτε ότι η κατεύθυνση διαδόσεως \vec{k} συμπίπτει με την κατεύθυνση του $\vec{E} \times \vec{B}$. Από φυσική άποψη αυτό ερμηνεύεται ως εξής: Το Η/Μ κύμα μεταφέρει ενέργεια (την ενέργεια του Η/Μ πεδίου) στην κατεύθυνση διαδόσεώς του (αυτό ισχύει γενικά για κάθε είδος κυματικής κίνησης). Η Η/Μ ενέργεια όμως διαδίδεται στην κατεύθυνση του διανύσματος Poynting $\vec{N} = (1/\mu_0) \vec{E} \times \vec{B}$. Άρα, το κυματοδιάνυσμα \vec{k} θα πρέπει να είναι στην κατεύθυνση του $\vec{E} \times \vec{B}$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα μιγαδικά πλάτη \vec{E}_0, \vec{B}_0 μπορούν να γραφούν

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0,R} e^{i\alpha}, \quad \vec{B}_0 = \vec{B}_{0,R} e^{i\beta}$$

όπου $\vec{E}_{0,R}, \vec{B}_{0,R}$ πραγματικά διανύσματα και α, β πραγματικοί αριθμοί. Όπως μπορούμε να δείξουμε, οι σχέσεις (10.44) τότε απαιτούν ότι $\alpha = \beta$ και

$$\vec{k} \times \vec{E}_{0,R} = \omega \vec{B}_{0,R}, \quad \vec{k} \times \vec{B}_{0,R} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_{0,R} \quad (10.46)$$

Τα μονοχρωματικά κύματα (10.38) τώρα γράφονται

$$\vec{E} = \vec{E}_{0,R} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_{0,R} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha)} \quad (10.47)$$

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος των (10.47), βρίσκουμε τις εκφράσεις για τα πραγματικά πεδία \vec{E} και \vec{B} :

$$\vec{E} = \vec{E}_{0,R} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha), \quad \vec{B} = \vec{B}_{0,R} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha) \quad (10.48)$$

Παρατηρούμε ότι

τα πεδία \vec{E} και \vec{B} «ταλαντώνονται» σε φάση, αποκτώντας ταυτόχρονα τις μέγιστες, τις ελάχιστες, και τις μηδενικές τιμές τους.

Παίρνοντας τώρα τα μέτρα των διανυσματικών σχέσεων (10.46) και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα $\vec{E}_{0,R}$ και $\vec{B}_{0,R}$ είναι κάθετα στο κυματοδιάνυσμα \vec{k} , καθώς και ότι $\omega/k=c$, βρίσκουμε μια σχέση ανάμεσα στα μέτρα των πραγματικών πλατών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου:

$$E_{0,R} = c B_{0,R} \quad (10.49)$$

όπου $E_{0,R}=|\vec{E}_{0,R}|$ και $B_{0,R}=|\vec{B}_{0,R}|$. Αν τώρα πάρουμε τα μέτρα των (10.48) και λάβουμε υπόψη την (10.49), βρίσκουμε τη σχέση ανάμεσα στις στιγμιαίες τιμές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου:

$$\boxed{E = c B} \quad (10.50)$$

όπου $E=|\vec{E}|$ και $B=|\vec{B}|$.

Συμπέρασμα:

Σε ένα μονοχρωματικό επίπεδο Η/Μ κύμα τα πεδία \vec{E} και \vec{B} είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος, ταλαντώνονται σε φάση, και οι στιγμιαίες τιμές τους συνδέονται με τη σχέση $E=cB$.

Σημείωση: Οι εκφράσεις (10.48) παριστούν ένα γραμμικά πολωμένο Η/Μ κύμα. Θα εξηγήσουμε τον όρο αυτό στο Πρόβλημα 8, όπου θα αναφερθούμε στην έννοια της πόλωσης ενός Η/Μ κύματος και θα μελετήσουμε λύσεις που είναι γενικότερες της (10.48).

10.6 Επίπεδα Η/Μ Κύματα, Γενικά

Ένα επίπεδο Η/Μ κύμα που διαδίδεται στο κενό στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\tau}$ έχει τη γενική μορφή

$$\vec{A} = \vec{F}(\hat{\tau} \cdot \vec{r} - ct) \quad \text{όπου} \quad \vec{A} = \vec{E} \quad \text{ή} \quad \vec{B} \quad (10.51)$$

Για κύμα στην κατεύθυνση $+x$ έχουμε ότι $\hat{\tau} = \hat{u}_x$, $\hat{\tau} \cdot \vec{r} = \hat{u}_x \cdot \vec{r} = x$, και

$$\vec{A} = \vec{F}(x - ct) \quad \text{όπου} \quad \vec{A} = \vec{E} \quad \text{ή} \quad \vec{B} \quad (10.52)$$

Ένα τέτοιο κύμα εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός μονοχρωματικών επίπεδων κυμάτων με διάφορα ω και k , όπως φαίνεται στη σχέση (10.40).

Ένα επίπεδο Η/Μ κύμα της μορφής (10.51) έχει τα εξής φυσικά χαρακτηριστικά (βλ. Πρόβλημα 5):

1. Τα πεδία \vec{E} και \vec{B} είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως $\hat{\tau}$, έτσι ώστε τα $(\vec{E}, \vec{B}, \hat{\tau})$ να αποτελούν δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα.
2. Τα μέτρα των στιγμιαίων τιμών των \vec{E} και \vec{B} συνδέονται με τη σχέση $E = cB$.
3. Αν στη θέση του κενού έχουμε ένα οποιοδήποτε μη-αγώγιμο γραμμικό μέσο, η σχέση ανάμεσα στα E και B γίνεται $E = vB$, όπου v η ταχύτητα διαδόσεως Η/Μ κυμάτων στο μέσο αυτό.

Όπως γνωρίζουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο, η πυκνότητα ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα όγκου) ενός Η/Μ πεδίου στο κενό δίνεται από την έκφραση

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = u_e + u_m \quad (10.53)$$

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2, \quad u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Στην περίπτωση ενός επίπεδου Η/Μ κύματος ισχύει ότι $u_e = u_m$. Πράγματι, δοθέντων ότι, στο κενό, $E = cB$ και $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$, έχουμε:

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 B^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = u_m$$

Έτσι,

$$u = 2u_e = 2u_m = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 \quad (\text{κενό}) \quad (10.54)$$

Σε ένα μη-αγώγιμο μέσο οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν αν θέσουμε ε και μ στη θέση των ε_0 και μ_0 , αντίστοιχα, και v στη θέση τού c . Παρατηρούμε ότι

το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνεισφέρουν εξίσου στην ενέργεια ενός επίπεδου Η/Μ κύματος.

Η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας που μεταφέρεται από ένα επίπεδο Η/Μ κύμα στο κενό δίνεται από το διάνυσμα Poynting $\vec{N} = (1/\mu_0)\vec{E} \times \vec{B}$ το οποίο είναι στην κατεύθυνση διαδόσεως $\hat{\tau}$ του κύματος. Λόγω της καθετότητας ανάμεσα στα \vec{E} και \vec{B} , το μέτρο του διανύσματος Poynting είναι $N=(1/\mu_0)EB$. Χρησιμοποιώντας την (10.54) για να εκφράσουμε τα E και B σαν συναρτήσεις της πυκνότητας ενέργειας u και λαμβάνοντας υπόψη ότι $c^2=1/\epsilon_0\mu_0$, βρίσκουμε ότι $N=uc$, έτσι ώστε

$$\vec{N} = uc\hat{\tau} \quad (\text{κενό}) \quad (10.55)$$

Στην περίπτωση ενός *μη-αγώγιμου* μέσου η ανάλογη έκφραση είναι

$$\vec{N} = uv\hat{\tau} = u\vec{v} \quad (\text{μονωτής}) \quad (10.56)$$

όπου v η ταχύτητα διαδόσεως Η/Μ κυμάτων στο μέσο αυτό. [Συγκρίνετε την (10.56) με την (6.2), $\vec{J} = \rho_c\vec{v}$. Παρατηρήστε και πάλι την αντιστοιχία φυσικών μεγεθών που αναφέρθηκε στο τέλος της Παρ.9.8.]

10.7 Εξάρτηση της Ταχύτητας Διαδόσεως από τη Συχνότητα

Όπως έχουμε δείξει, ένα Η/Μ κύμα διαδίδεται μέσα σε ένα γραμμικό και ομογενές *μη-αγώγιμο* μέσο με ταχύτητα μέτρου $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. Επιπλέον, ο δείκτης διαθλάσεως ενός διαφανούς μέσου είναι $n = c/v \approx \sqrt{\kappa_e}$, όπου $\kappa_e = 1 + \chi_e$ η διηλεκτρική σταθερά του μέσου. Έτσι,

$$v = \frac{c}{n} \approx \frac{c}{\sqrt{\kappa_e}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_e}} \quad (10.57)$$

Θεωρούμε τώρα ένα μονοχρωματικό Η/Μ κύμα συχνότητας $\omega = 2\pi f$ που εισέρχεται στο μέσο από το κενό. Όπως προκύπτει από τις εξισώσεις του Maxwell,

η συχνότητα ω ενός κύματος παραμένει αναλλοίωτη όταν το κύμα περνάει από ένα μέσο σε ένα άλλο.

Σκεφτείτε το ως εξής: Όταν ένα Η/Μ κύμα συχνότητας ω στο κενό εισέρχεται σε ένα μέσο, το ηλεκτρικό πεδίο επάγει εξαναγκασμένες ταλαντώσεις στα ηλεκτρόνια των ατόμων του μέσου, συχνότητας ω ίσης με αυτήν του κύματος. Τα ταλαντούμενα ηλεκτρόνια, με τη σειρά τους, εκπέμπουν δευτερογενές Η/Μ κύμα της ίδιας συχνότητας ω (αυτό θα το εξηγήσουμε στην Παρ.10.16). Έτσι, το ολικό κύμα στο μέσο είναι επαλληλία δύο κυμάτων, πρωτογενούς και δευτερογενούς, με την ίδια συχνότητα ω . Αντίθετα με τη συχνότητα, η ταχύτητα διαδόσεως v και το μήκος κύματος λ μεταβάλλονται όταν το κύμα περνάει από ένα μέσο σε ένα άλλο.

Στο κενό όλα τα μονοχρωματικά κύματα διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα c , ανεξάρτητα από τη συχνότητά τους. Σε ένα υλικό μέσο, όμως, η ταχύτητα διαδόσεως v εξαρτάται από τη συχνότητα ω του κύματος. Αν λάβουμε υπόψη την (10.57), αυτό σημαίνει ότι η διηλεκτρική «σταθερά» κ_e ενός μέσου δεν είναι και τόσο σταθερή όσο ακούγεται αλλά εξαρτάται σε κάποιο βαθμό από το ω . Επιπλέον, και ο δείκτης διαθλάσεως n του μέσου εξαρτάται από τη συχνότητα του κύματος.

Το φως είναι ένα σύνθετο Η/Μ κύμα που περιέχει ένα μεγάλο αριθμό μονοχρωματικών κυμάτων διαφόρων συχνοτήτων. Όταν το φως διέρχεται, π.χ., μέσα από ένα πρίσμα υφίσταται διασπορά, με την έννοια ότι οι διάφορες συνιστώσες του διαδίδονται με διάφορες ταχύτητες που εξαρτώνται από τις αντίστοιχες συχνότητες. Επειδή ο δείκτης διαθλάσεως είναι διαφορετικός για κάθε συχνότητα, το πρίσμα εκτρέπει σε διαφορετικό βαθμό τις διάφορες συνιστώσες του φωτός προκαλώντας το γνωστό φαινόμενο της *ανάλυσης του φωτός*. (Ο δείκτης διαθλάσεως αυξάνει με τη συχνότητα του κύματος. Για το λόγο αυτό και η εκτροπή αυξάνει με τη συχνότητα, έτσι ώστε το κόκκινο εκτρέπεται λιγότερο από το ιώδες.)

Στην περίπτωση που η συχνότητα ω του διερχόμενου Η/Μ κύματος είναι αρκετά μικρή, το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$ μεταβάλλεται αργά. Τα ηλεκτρόνια τότε του υλικού, καθώς και τα μόρια ή ιόντα που διαθέτουν ηλεκτρική διπολική ροπή, παρακολουθούν με ευκολία τις μεταβολές του πεδίου και προσαρμόζονται αμέσως σε αυτές. Έτσι, το διάνυσμα πόλωσης \vec{P} «ταλαντώνεται» σε φάση με το ηλεκτρικό πεδίο με την ίδια συχνότητα ω : $\vec{P} = \vec{P}_0 \cos(kx - \omega t)$. (Για μεγαλύτερες τιμές του ω οι φάσεις των \vec{P} και \vec{E} γενικά διαφέρουν.) Από τη σχέση (8.12), $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$. Έτσι,

$$\vec{P}_0 \cos(kx - \omega t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t) \Rightarrow \vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0$$

απ' όπου προκύπτει ότι η ηλεκτρική επιδεκτικότητα χ_e του υλικού είναι *σταθερή*, ανεξάρτητη της συχνότητας ω του κύματος. Άρα, η διηλεκτρική σταθερά $\kappa_e = 1 + \chi_e$ του μέσου είναι σταθερή (ανεξάρτητη της συχνότητας) για μικρές τιμές του ω και η τιμή της είναι περίπου ίση με αυτή που εμφανίζει το μέσο όταν στο εσωτερικό του υπάρχει *στατικό* ηλεκτρικό πεδίο. Για το λόγο αυτό, το φαινόμενο της διασποράς δεν είναι ιδιαίτερα εμφανές στις πολύ χαμηλές συχνότητες (πολύ μικρότερες από τις ορατές).

10.8 Τρέχον και Στάσιμο Κύμα

Ένα κύμα της μορφής $\zeta(x, t) = f(x \pm vt)$, ή ισοδύναμα, $\zeta(x, t) = f(kx \pm \omega t)$ όπου $\omega/k = v$, ονομάζεται *τρέχον κύμα* και χαρακτηρίζεται από την παρουσία όρων της μορφής $x \pm vt$ ή $kx \pm \omega t$ (το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί σε κυματική κίνηση στη θετική κατεύθυνση του άξονα x , ενώ το θετικό πρόσημο σε κύμα στην αρνητική κατεύθυνση). Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x, t) = kx \pm \omega t \quad (10.58)$$

έτσι ώστε $\zeta(x, t) = f(\varphi)$. Η συνάρτηση φ καλείται *φάση* του κύματος και η τιμή της για δοσμένα x και t καθορίζει την τιμή του ζ . Σε δοσμένη χρονική στιγμή t , σε δύο γειτονικά σημεία x και $x+dx$ το κύμα έχει διαφορετικές φάσεις $\varphi(x, t)$ και $\varphi(x+dx, t)$. Μετά

από παρέλευση χρόνου dt , ίσου με αυτόν που χρειάζεται το κύμα για να προχωρήσει κατά dx , η φάση του κύματος στο σημείο $x+dx$ τη χρονική στιγμή $t+dt$ είναι ίδια με τη φάση που είχε το κύμα στο σημείο x τη χρονική στιγμή t . Προφανώς, το πηλίκο dx/dt ισούται κατ' απόλυτη τιμή με την ταχύτητα διαδόσεως v του κύματος, η οποία είναι ουσιαστικά η ταχύτητα διαδόσεως των φάσεων. Για το λόγο αυτό, η $v=\omega/k$ ονομάζεται φασική ταχύτητα. Αναλυτικά,

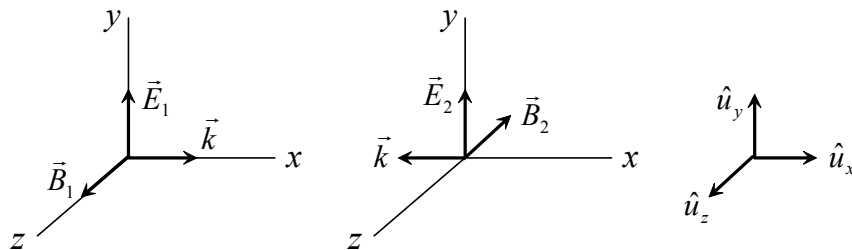
$$\begin{aligned} \varphi(x+dx, t+dt) = \varphi(x, t) &\Rightarrow \varphi(x+dx, t+dt) - \varphi(x, t) \simeq d\varphi = 0 \Rightarrow \\ (\partial\varphi/\partial x)dx + (\partial\varphi/\partial t)dt = 0 &\Rightarrow kdx \pm \omega dt = 0 \Rightarrow \\ \frac{dx}{dt} = \mp \frac{\omega}{k} = \mp v &\end{aligned} \tag{10.59}$$

(προσοχή στην αντιστοιχία των προσήμων!).

Όπως γνωρίζουμε, η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης για επίπεδο κύμα που διαδίδεται στη διεύθυνση του άξονα x είναι

$$\xi(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) = F_1(kx - \omega t) + F_2(kx + \omega t) \quad (\omega/k = v)$$

Στην ουσία, η παραπάνω έκφραση παριστά τη συμβολή δύο κυμάτων που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις κατά μήκος του άξονα x . Σαν εφαρμογή, θεωρούμε δύο μονοχρωματικά αρμονικά Η/Μ κύματα της ίδιας συχνότητας ω που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις παράλληλα στον άξονα x . Τα ηλεκτρικά πεδία των κυμάτων έχουν ίσα πλάτη E_0 και «ταλαντώνονται» στη διεύθυνση του άξονα y :



Το κύμα 1 διαδίδεται στην κατεύθυνση $+x$, άρα θα έχει τη μορφή $F_1(kx-\omega t)$. Το κύμα 2 είναι στην κατεύθυνση $-x$, άρα είναι της μορφής $F_2(kx+\omega t)$. Σε κάθε περίπτωση, το κυματοδιάνυσμα \vec{k} (που προσδιορίζει την κατεύθυνση διαδόσεως) είναι στην κατεύθυνση του $\vec{E} \times \vec{B}$. Επίσης, τα \vec{E} και \vec{B} ταλαντώνονται σε φάση και τα πλάτη τους συνδέονται με τη σχέση $E_0 = cB_0$, όπου $c = \omega/k$ (υποθέτουμε ότι τα κύματα διαδίδονται στο κενό). Αναλυτικά,

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{u}_y, \quad \vec{B}_1 = B_0 \cos(kx - \omega t) \hat{u}_z = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \hat{u}_z \\ \vec{E}_2 = E_0 \cos(kx + \omega t) \hat{u}_y, \quad \vec{B}_2 = B_0 \cos(kx + \omega t) (-\hat{u}_z) = -\frac{E_0}{c} \cos(kx + \omega t) \hat{u}_z \end{aligned}$$

Ας εξετάσουμε τώρα τη *συμβολή* των κυμάτων 1 και 2 :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)] \hat{u}_y \\ \vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)] \hat{u}_z\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos [(\alpha + \beta)/2] \cos [(\alpha - \beta)/2]$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin [(\alpha + \beta)/2] \sin [(\beta - \alpha)/2]$$

βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, t) &= (2E_0 \cos kx \cos \omega t) \hat{u}_y \\ \vec{B}(x, t) &= \left(\frac{2E_0}{c} \sin kx \sin \omega t\right) \hat{u}_z\end{aligned} \quad (10.60)$$

Παρατηρούμε τα εξής:

1) Τα \vec{E} και \vec{B} είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (10.61)$$

(δείξτε το!). Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού καθένα εκ των \vec{E} και \vec{B} είναι άθροισμα δύο λύσεων της γραμμικής εξίσωσης (10.61) με τα ίδια ω , k και $c = \omega/k$. Εν τούτοις, τα \vec{E} και \vec{B} δεν παριστούν τρέχοντα κύματα αφού δεν περιέχουν τον χαρακτηριστικό παράγοντα $kx \pm \omega t$.

2) Γράφουμε την (10.60) στη μορφή

$$\vec{E}(x, t) = [A(x) \cos \omega t] \hat{u}_y \quad \text{όπου} \quad A(x) = 2E_0 \cos kx$$

(και όμοια για το \vec{B}). Σε κάθε σημείο x η έκφραση αυτή παριστά αρμονική ταλάντωση με πλάτος την απόλυτη τιμή τού $A(x)$. Καθώς το x μεταβάλλεται, το πλάτος $A(x)$ της ταλάντωσης μεταβάλλεται αρμονικά σύμφωνα με τον παράγοντα $\cos kx$. Στα σημεία όπου $\cos kx = 0$ το πλάτος $A(x)$, άρα και το \vec{E} , είναι πάντα μηδέν (*δεσμοί*), ενώ στα σημεία όπου $\cos kx = \pm 1$ το πεδίο \vec{E} έχει σταθερά μέγιστο πλάτος (*κοιλίες*) (ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν και για το \vec{B}). Αντίθετα, σε ένα τρέχον κύμα της μορφής $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx \pm \omega t)$ το πλάτος E_0 είναι σταθερό, ίδιο για όλα τα x .

3) Για δοσμένη χρονική στιγμή t η φάση ωt της ταλάντωσης έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία x . Αντίθετα, σε ένα τρέχον κύμα η φάση $kx \pm \omega t$ για δοσμένο t μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο.

Κύματα όπως αυτό στην (10.60), με τα χαρακτηριστικά που περιγράφηκαν παραπάνω, ονομάζονται *στάσιμα κύματα*. Ο όρος αυτός εξηγείται ως εξής: Σε ένα *τρέχον* H/M κύμα η φάση διαδίδεται από σημείο σε σημείο με ταχύτητα c (στο κενό). Αντίθετα, σε ένα *στάσιμο* κύμα οι φάσεις για μια δοσμένη χρονική στιγμή είναι παντού οι ίδιες. Έτσι, στη δεύτερη περίπτωση δεν έχει νόημα να μιλάμε για διάδοση φάσεων. Επιπλέον, σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει για ένα *τρέχον* κύμα, *στο στάσιμο κύμα δεν έχουμε μεταφορά ενέργειας του H/M πεδίου*. (Για την ακρίβεια, σε κάθε σημείο, η μέση αλγεβρική τιμή του διανύσματος Poynting για το χρονικό διάστημα μιας περιόδου $T=2\pi/\omega$ είναι μηδέν.)

Στην πράξη, το στάσιμο H/M κύμα που περιγράψαμε παράγεται όταν ένα *τρέχον* H/M κύμα (π.χ., το κύμα 1) προσπίπτει στην επιφάνεια ενός «τέλειου» αγωγού και ανακλάται (κύμα 2). Η συμβολή προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος δημιουργεί το στάσιμο κύμα.

10.9 Διάδοση H/M Κύματος σε Αγώγιμο Μέσο

Μέχρι τώρα μελετήσαμε τη διάδοση H/M κυμάτων σε μη-αγώγιμα μέσα. Για τα μέσα αυτά είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι οι πυκνότητες *ελεύθερου* φορτίου και ρεύματος είναι μηδέν: $\rho_f = 0$, $\vec{J}_f = 0$. Αυτό όμως δεν ισχύει, γενικά, στην περίπτωση ενός *αγώγιμου* μέσου αφού εκεί υπάρχουν ελεύθερα φορτία που μπορούν να κινηθούν, όπως, π.χ., ελεύθερα ηλεκτρόνια σε ένα μέταλλο, ιόντα σε ένα διάλυμα, ή ηλεκτρόνια και ιόντα σε ένα πλάσμα. (Σημειώνουμε ότι σε ένα μέταλλο η πυκνότητα ελεύθερου φορτίου ρ_f οφείλεται στα ελεύθερα ηλεκτρόνια και στα θετικά ιόντα, ενώ η πυκνότητα ελεύθερου ρεύματος \vec{J}_f οφείλεται μόνο στα κινούμενα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Τα θετικά ιόντα λογίζονται σαν *ελεύθερα* φορτία αφού δεν οφείλουν την ύπαρξή τους σε ηλεκτρική πόλωση.)

Θεωρούμε ένα γραμμικό και ομογενές μέσο με σταθερές τιμές των ϵ , μ , και επιπλέον με ειδική αγωγιμότητα σ . Το γεγονός ότι, γενικά, $\epsilon \neq \epsilon_0$ υποδηλώνει ότι ακόμα και μέσα σε ένα αγώγιμο μέσο μπορεί να υφίσταται ηλεκτρική πόλωση. (Θυμηθείτε ότι, αντίστοιχα, *κάθε* μέσο, αγωγός ή μονωτής, μπορεί να υποστεί μαγνήτιση μέσα σε μαγνητικό πεδίο.) Η πόλωση μπορεί να οφείλεται, π.χ., στα *δέσμια* ηλεκτρόνια των ιόντων ενός μετάλλου, στα μόρια του H₂O σε ένα διάλυμα NaCl σε H₂O, κλπ. Στην περίπτωση ενός μετάλλου η πόλωση λόγω των δέσμιων ηλεκτρονίων είναι αμελητέα, και για το λόγο αυτό θέτουμε $\epsilon = \epsilon_0$.

Επειδή το θεωρούμενο μέσο είναι γραμμικό, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ και $\vec{H} = (1/\mu) \vec{B}$. Οι εξισώσεις Maxwell γράφονται:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_f \Rightarrow \epsilon (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \rho_f \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{J}_f + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Θεωρώντας ότι το μέσο είναι παντού στο εσωτερικό του ηλεκτρικά ουδέτερο (βλ. Κεφ.9, Πρόβλ.2), θέτουμε $\rho_f \approx 0$. Επίσης, από το νόμο του Ohm, $\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$. Οι εξισώσεις Maxwell τώρα γράφονται:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & (\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \sigma \vec{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.62)$$

(Προσέξτε ότι για $\sigma=0$ οι εξισώσεις αυτές ανάγονται στις (10.24) για ένα γραμμικό μονωτή.)

Παίρνοντας τα *rot* των (γ) και (δ), βρίσκουμε ότι τα \vec{E} και \vec{B} υπακούουν στις *τροποποιημένες κυματικές εξισώσεις*

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (10.63)$$

Το σύστημα (10.63) δέχεται επίπεδες κυματικές λύσεις οι οποίες, για διάδοση στην κατεύθυνση $+x$, έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,t) &= \vec{E}_0 e^{-sx} e^{i(kx-\omega t)} \\ \vec{B}(x,t) &= \vec{B}_0 e^{-sx} e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (10.64)$$

όπου

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} \\ s &= \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (10.65)$$

Η *ταχύτητα διαδόσεως* του Η/Μ κύματος στο αγωγίμο μέσο είναι

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \left[\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} + 1} \right]^{1/2} \quad (10.66)$$

Παρατηρούμε τα εξής:

1) Για *μη-αγώγιμο* μέσο, $\sigma=0 \Rightarrow s=0$ και $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$. Έτσι, $v = \omega/k = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, σε συμφωνία με την (10.33).

2) Συγκρίνοντας τις (10.33) και (10.66) δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι, για δοσμένη τιμή της συχνότητας ω , η ταχύτητα διαδόσεως σε ένα αγώγιμο μέσο ($\sigma \neq 0$) είναι μικρότερη από την ταχύτητα σε ένα μη-αγώγιμο μέσο ($\sigma=0$) όταν τα δύο μέσα έχουν τις ίδιες τιμές των ϵ και μ .

3) Η ταχύτητα διαδόσεως σε ένα αγώγιμο μέσο εξαρτάται από τη συχνότητα ω του διερχόμενου κύματος. Έχουμε και εδώ, δηλαδή, ένα φαινόμενο *διασποράς* ανάλογο με αυτό που υφίσταται το φως όταν διέρχεται μέσα από ένα διηλεκτρικό μέσο (βλ. Παρ.10.7).

4) Η παρουσία του όρου e^{-sx} στις εκφράσεις (10.64) δηλώνει ότι τα πλάτη του Η/Μ κύματος μειώνονται εκθετικά καθώς το κύμα προχωρεί μέσα στο αγώγιμο υλικό. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

ένα Η/Μ κύμα υφίσταται εξασθένιση (απόσβεση) όταν διέρχεται μέσα από αγώγιμο υλικό. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια που μεταφέρεται από το κύμα απορροφάται από το υλικό.

Το φαινόμενο αυτό οφείλεται σε μετατροπή της ενέργειας του Η/Μ κύματος σε θερμότητα: το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος επάγει ηλεκτρικά ρεύματα στο εσωτερικό του αγώγιμου μέσου, τα οποία θερμαίνουν το υλικό σύμφωνα με το νόμο του Joule. (Το φαινόμενο της απορρόφησης Η/Μ κυμάτων παρατηρείται και σε μη-αγώγιμα μέσα αλλά για διαφορετικούς λόγους τους οποίους θα μελετήσουμε αργότερα.)

Ορίζουμε το *επιδερμικό βάθος*

$$\Delta = \frac{1}{s} \quad (10.67)$$

Δοθέντος ότι ο όρος e^{-sx} είναι καθαρός αριθμός, το s θα πρέπει να έχει διαστάσεις αντίστροφου μήκους, άρα το Δ να έχει διαστάσεις μήκους. Παρατηρούμε ότι, όταν το Η/Μ κύμα προχωρήσει κατά απόσταση Δ από τη θέση x στη θέση $x+\Delta$, ο παραπάνω εκθετικός όρος γίνεται $e^{-s(x+\Delta)} = e^{-sx} e^{-s\Delta} = \frac{1}{e} e^{-sx}$. Δηλαδή, το *επιδερμικό βάθος* Δ

είναι η απόσταση κατά την οποία προχωρεί το κύμα ώστε το πλάτος του να ελαττωθεί στο $1/e$ (περίπου στο $1/3$) της αρχικής του τιμής. Για πρακτικούς λόγους,

θεωρούμε ότι το Η/Μ κύμα προχωρεί μέσα στο αγώγιμο υλικό μέχρι βάθος ίσο με το επιδερμικό βάθος Δ πριν υποστεί ολική απορρόφηση

(δηλαδή, το κύμα πρακτικά δεν υπάρχει για $x > \Delta$). Από την (10.65), τώρα, βλέπουμε ότι το s αυξάνει με την ειδική αγωγιμότητα σ . Λαμβάνοντας υπόψη και την (10.67), συμπεραίνουμε ότι

το επιδερμικό βάθος Δ ελαττώνεται με την αύξηση της αγωγιμότητας του υλικού.

Οριακά, για έναν «τέλειο» αγωγό έχουμε $\sigma \approx \infty$, $s \approx \infty$ και $\Delta=0$. Ένας τέτοιος αγωγός δεν επιτρέπει τη διάδοση Η/Μ κυμάτων στο εσωτερικό του. Στο άλλο άκρο, για έναν τέλειο μονωτή, $\sigma=0$, $s=0$ και $\Delta=\infty$. Δηλαδή, θεωρητικά, το Η/Μ κύμα προχωρεί απεριόριστα μέσα στο μονωτή χωρίς να απορροφάται. Αυτό όμως στην πραγματικότητα δεν ισχύει, αφού και τα μη-αγώγιμα υλικά απορροφούν τα Η/Μ κύματα για λόγους που θα εξηγήσουμε αργότερα (Παρ.10.16).

Τα διανύσματα \vec{E}_0 και \vec{B}_0 στις (10.64) είναι εξ' υποθέσεως μιγαδικά. Έστω ότι

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0,R} e^{i\alpha}, \quad \vec{B}_0 = \vec{B}_{0,R} e^{i\beta} \quad (10.68)$$

όπου $\vec{E}_{0,R}$, $\vec{B}_{0,R}$ πραγματικά διανύσματα. Οι (10.64) τότε παίρνουν τη μορφή

$$\vec{E} = \vec{E}_{0,R} e^{-sx} e^{i(kx-\omega t+\alpha)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_{0,R} e^{-sx} e^{i(kx-\omega t+\beta)} \quad (10.69)$$

Σε αντίθεση με τα μη-αγώγιμα μέσα, εδώ $\alpha \neq \beta$, και μάλιστα $\alpha < \beta$. Δηλαδή,

τα πεδία \vec{E} και \vec{B} δεν ταλαντώνονται σε φάση μέσα στον αγωγό αλλά η φάση του \vec{B} υστερεί έναντι αυτής του \vec{E}

(η διαφορά φάσης τείνει στο μηδέν στο όριο που $\sigma=0$). Γιατί «υστερεί» ενώ $\alpha < \beta$; Για να το καταλάβουμε αυτό, γράφουμε $\varphi_E(x,t)=kx-\omega t+\alpha$, $\varphi_B(x,t)=kx-\omega t+\beta$. Θεωρούμε σταθερό σημείο $x=x_0$. Έστω ότι στο σημείο αυτό η φ_E τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίδια με την φ_B τη στιγμή t_2 . Δηλαδή, $\varphi_E(x_0, t_1) = \varphi_B(x_0, t_2) \Rightarrow \omega(t_2 - t_1) = \beta - \alpha > 0 \Rightarrow t_1 < t_2$. Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο αποκτά μια δεδομένη φάση προτού το μαγνητικό πεδίο αποκτήσει την ίδια φάση. Ο όρος «υστερεί», λοιπόν, έχει χρονική σημασία και δεν αναφέρεται στα μεγέθη των φάσεων!

Και στην περίπτωση των αγώγιμων μέσων ισχύει ότι

τα πεδία \vec{E} και \vec{B} ενός επίπεδου Η/Μ κύματος είναι κάθετα μεταξύ τους καθώς και κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος.

Εν τούτοις,

δεν ισχύει η σχέση $E=vB$ ανάμεσα στις στιγμιαίες τιμές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, παρά μόνο στο όριο που $\sigma=0$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες ως προς τις αποδείξεις όλων των παραπάνω, βλ. Πρόβλημα 7.

H/M κύμα χαμηλής συχνότητας μέσα σε «καλό» αγωγό:

Η περίπτωση αυτή εκφράζεται με τη συνθήκη

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1 \quad (10.70)$$

Μπορούμε τότε να κάνουμε την προσέγγιση $\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} \approx 1 + \frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$, οπότε από την (10.65) βρίσκουμε ότι $s \approx \sqrt{\omega\mu\sigma/2} \Rightarrow$

$$\Delta = \frac{1}{s} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (10.71)$$

Παρατηρούμε ότι το επιδερμικό βάθος Δ ελαττώνεται όταν αυξάνει η συχνότητα ω του κύματος. Αυτό σημαίνει ότι

όταν H/M κύματα χαμηλών συχνοτήτων εισέρχονται σε καλό αγωγό, τα πιο χαμηλόσυχνα κύματα είναι και περισσότερο διεισδυτικά.

Η σχέση (10.71) μας χρησιμεύει για να προσδιορίσουμε τη συχνότητα f του κύματος η οποία απαιτείται για να πετύχουμε διείσδυση σε δοσμένο βάθος Δ μέσα στο υλικό:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{1}{\pi\mu\sigma\Delta^2} \quad (10.72)$$

Προσοχή όμως: Όταν χρησιμοποιούμε την (10.72) θα πρέπει να ελέγχουμε αν η τιμή της f που βρίσκουμε (ακριβέστερα, το $\omega=2\pi f$) υπακούει στη συνθήκη (10.70)!

Εφαρμογή: Ένα υποβρύχιο βρίσκεται σε κατάδυση σε βάθος $h=10\text{ m}$. Είναι πρακτικά εφικτό να επικοινωνήσουμε μαζί του στέλνοντάς του ένα H/M σήμα στην περιοχή των ραδιοσυχνοτήτων; Δίνονται, για το θαλάσσιο νερό:

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2, \quad \varepsilon \approx 70\varepsilon_0 \approx 6 \times 10^{-10} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2, \quad \sigma \approx 5(\Omega\cdot\text{m})^{-1}.$$

Λύση: Η αγωγιμότητα στο θαλάσσιο νερό οφείλεται σε *ιόντα* (κυρίως Na^+ και Cl^-). Από τα δεδομένα, $\sigma/\varepsilon \approx 10^{10} \text{ Hz}$, που είναι συχνότητα πολύ μεγαλύτερη από αυτή των ραδιοκυμάτων. Για να λάβει το υποβρύχιο ένα H/M σήμα θα πρέπει το βάθος στο οποίο βρίσκεται να μην ξεπερνάει το επιδερμικό βάθος Δ που αντιστοιχεί στη συχνότητα του σήματος: $h \leq \Delta$. Από την (10.72),

$$\Delta^2 = \frac{1}{\pi\mu\sigma f} \geq h^2 \Rightarrow f \leq \frac{1}{\pi\mu\sigma h^2} \approx 500 \text{ Hz}$$

που είναι πράγματι στην περιοχή των ραδιοσυχνοτήτων. Το αποτέλεσμα είναι αποδεκτό αφού ικανοποιείται η συνθήκη (10.70). Θυμίζουμε τώρα ότι η συχνότητα ενός κύματος δεν μεταβάλλεται όταν αυτό περνάει από ένα μέσο σε ένα άλλο, σε αντίθεση

με το μήκος κύματος και την ταχύτητα διαδόσεως. Έτσι, η συχνότητα του σήματος που θα πρέπει να εκπέμπουμε από τον αέρα είναι ίδια με αυτή που θέλουμε να λάβει το υποβρύχιο, δηλαδή ίση με 500 Hz . Το μήκος κύματος του σήματός μας στον αέρα, αντίστοιχο με τη συχνότητα αυτή, είναι $\lambda = c/f = 600 \text{ km}$! (Θεωρούμε προσεγγιστικά ότι η ταχύτητα διαδόσεως Η/Μ κυμάτων στον αέρα είναι $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, ίση με αυτή στο κενό.) Η εκπομπή ενός τέτοιου σήματος θα απαιτούσε μια κεραία εδάφους γιγαντιαίων διαστάσεων, αφού μια συμβατική κεραία δεν θα είχε την επιθυμητή απόδοση (η μέση ακτινοβολούμενη ισχύς θα ήταν πολύ μικρή). Συμπέρασμα:

Η αγωγιμότητα του θαλάσσιου νερού καθιστά πρακτικά αδύνατη την επικοινωνία μας με υποβρύχια σε κατάδυση μέσω Η/Μ σημάτων.

Αυτό εξηγεί γιατί η χρήση του *radar* είναι πρακτικά αδύνατη για την ανίχνευση υποβρυχίων σε κατάδυση.

10.10 Ανάκλαση Η/Μ Κύματος στην Επιφάνεια Αγωγού

Όταν ένα Η/Μ κύμα προσπίπτει στην επιφάνεια ενός αγωγού, ένα μέρος της ενέργειάς του διαπερνά την επιφάνεια και εισέρχεται στο εσωτερικό του αγωγού όπου και απορροφάται, ενώ ένα άλλο μέρος ανακλάται και επιστρέφει στο μέσο (π.χ., αέρα) απ' όπου ξεκίνησε. Ένας καλός αγωγός είναι και καλός ανακλαστήρας, με την έννοια ότι όσο μεγαλύτερη είναι η αγωγιμότητα του υλικού, τόσο μεγαλύτερο είναι και το ποσοστό της προσπίπτουσας ενέργειας που ανακλάται. Οριακά, ένας «τέλειος» αγωγός ($\sigma = \infty$) προκαλεί ολική ανάκλαση σε ένα προσπίπτον Η/Μ κύμα. Για το λόγο αυτό, εξαιρετικοί αγωγοί όπως το ασήμι χρησιμοποιούνται για την κατασκευή κατόπτρων υψηλής ποιότητας.

Όπως είδαμε προηγουμένως, ένας καλός αγωγός είναι και καλός απορροφητής Η/Μ κυμάτων, με την έννοια ότι όσο μεγαλύτερη είναι η αγωγιμότητα του μέσου, τόσο γρηγορότερα εξασθενεί το κύμα στο εσωτερικό του (δηλαδή, τόσο μικρότερο είναι το επιδερμικό βάθος Δ για δεδομένη συχνότητα ω του κύματος).

Συμπερασματικά, ένας καλός αγωγός έχει τις εξής ιδιότητες:

- Το μεγαλύτερο μέρος της ισχύος που μεταφέρεται από ένα προσπίπτον Η/Μ κύμα ανακλάται στην επιφάνεια του αγωγού.
- Το μικρό μέρος του κύματος που διαπερνά την επιφάνεια του αγωγού εξασθενεί πολύ γρήγορα και απορροφάται από το υλικό.

Παρατηρούμε ότι

ένας καλός ανακλαστήρας Η/Μ κυμάτων είναι ταυτόχρονα και καλός απορροφητής.

Και οι δύο αυτές ιδιότητες αυξάνουν με την αγωγιμότητα του μέσου. Σημειώνουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι η συχνότητα ω του προσπίπτοντος Η/Μ κύματος είναι σχετικά μικρή, και συγκεκριμένα μικρότερη από μια οριακή συχνότητα που καλείται *συχνότητα πλάσματος* ω_p , χαρακτηριστική για το υλικό. Τα συμπεράσματά μας διαφοροποιούνται για κύματα με $\omega > \omega_p$, όπως θα δούμε αργότερα.

10.11 Ηλεκτρομαγνητική Ακτινοβολία

Ως ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία εννοούμε τη διάδοση της ενέργειας του H/M πεδίου υπό μορφή H/M κυμάτων. Ένα φυσικό σύστημα, λοιπόν, που εκπέμπει ενέργεια μέσω H/M κυμάτων (π.χ., ένα άτομο, ένα μόριο, ένας πυρήνας, ένα θερμό σώμα, μια κεραία ραδιοφωνικού σταθμού, κλπ.) λέμε ότι εκπέμπει H/M ακτινοβολία ή απλά ότι ακτινοβολεί.

Όπως γνωρίζουμε, πηγή του ηλεκτρικού πεδίου είναι, γενικά, τα ηλεκτρικά φορτία, ενώ πηγή του μαγνητικού πεδίου είναι τα κινούμενα φορτία (δηλαδή, τα ηλεκτρικά ρεύματα). Ποιες είναι όμως οι πηγές της H/M ακτινοβολίας; Ας δούμε πόσο μακριά μπορεί να μας πάει η λογική μας: Μια στατική κατανομή φορτίου και ρεύματος ($\partial\rho/\partial t = 0$, $\partial\vec{J}/\partial t = 0$), π.χ., ένα σύστημα ακίνητων φορτίων και χρονικά σταθερών ρευμάτων, δεν μπορεί να παράγει H/M ακτινοβολία, για τον εξής λόγο: Μια τέτοια κατανομή δημιουργεί στατικό H/M πεδίο ($\partial\vec{E}/\partial t = 0$, $\partial\vec{B}/\partial t = 0$) και, όπως γνωρίζουμε, ένα πεδίο που δεν διαταράσσεται μέσα στο χρόνο δεν οδηγεί σε κυματικά φαινόμενα. Είναι απαραίτητο, λοιπόν, να έχουμε χρονικά-μεταβαλλόμενες πυκνότητες $\rho(\vec{r}, t)$ και $\vec{J}(\vec{r}, t)$, έτσι ώστε το παραγόμενο H/M πεδίο να είναι κι αυτό χρονικά μεταβαλλόμενο. Η διαταραχή (χρονική μεταβολή) του πεδίου τότε διαδίδεται στο χώρο με τη μορφή H/M κύματος. Μια πιο προσεκτική εξέταση του θέματος με χρήση των εξισώσεων του Maxwell μας αποκαλύπτει ότι

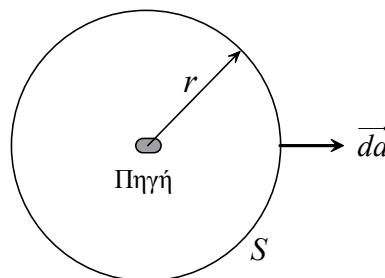
η H/M ακτινοβολία παράγεται από

- επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία, ή
- χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά ρεύματα.

Από τη στιγμή που παράγονται και μετά, τα H/M κύματα διαδίδονται προς το «άπειρο» με ταχύτητα c (στο κενό) μεταφέροντας μέρος της ενέργειας της πηγής που τα παράγαγε.

Το χαρακτηριστικό γνώρισμα της H/M ακτινοβολίας είναι ακριβώς αυτή η ροή ενέργειας μακριά από την πηγή, ενέργειας που χάνεται και δεν ανακτάται ποτέ από την πηγή.

Θεωρούμε ότι η πηγή της H/M ακτινοβολίας βρίσκεται εντοπισμένη σε μια μικρή περιοχή του χώρου. Φανταστείτε τώρα μια τεράστια σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας r με κέντρο στη θέση όπου βρίσκεται η πηγή:



Έστω $U(t)$ η ολική Η/Μ ενέργεια στο εσωτερικό της S τη χρονική στιγμή t . Η ολική ισχύς που διαπερνά την S τη στιγμή αυτή δίνεται από τη σχέση (9.45):

$$P(r,t) = -\frac{dU(t)}{dt} = \oint_S \vec{N} \cdot \vec{da} = \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{da} \quad (10.73)$$

όπου \vec{N} το διάνυσμα Poynting. Η ακτινοβολούμενη ισχύς τη χρονική στιγμή t είναι

$$P_{rad}(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} P(r,t) \quad (10.74)$$

Η ποσότητα αυτή αντιπροσωπεύει ενέργεια ανά μονάδα χρόνου η οποία ακτινοβολείται από την πηγή και φτάνει ως το άπειρο. Στην περίπτωση που $P_{rad}=0$, το σύστημα δεν ακτινοβολεί.

Χρησιμοποιώντας τους νόμους Coulomb και Biot-Savart μπορεί ναδειχθεί ότι για στατικά Η/Μ πεδία, $P_{rad}=0$. Έτσι, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, οι στατικές (χρονικά αμετάβλητες) πηγές δεν ακτινοβολούν. Απαιτούνται λοιπόν χρονικά μεταβαλλόμενες πηγές και, αντίστοιχα, χρονικά μεταβαλλόμενα Η/Μ πεδία έτσι ώστε $P_{rad} \neq 0$.

Ως ένταση της Η/Μ ακτινοβολίας σε ένα σημείο Σ του χώρου ορίζουμε τη μέση ισχύ που μεταφέρεται από το Η/Μ κύμα ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση διαδόσεως στο Σ . Η ένταση I ισούται με τη μέση τιμή $\langle N \rangle$ του μέτρου του διανύσματος Poynting. Στην περίπτωση ενός αρμονικού κύματος συχνότητας $\omega=2\pi/T$, η μέση τιμή του N υπολογίζεται για το χρονικό διάστημα μιας περιόδου T (ή και αυθαίρετα πολλών περιόδων):

$$\langle N \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T N(\vec{r}, t) dt \quad (10.75)$$

όπου \vec{r} το διάνυσμα θέσης του σημείου Σ . Αλλά, από τις (10.55), (10.54) και (10.48),

$$N(\vec{r}, t) = uc = \varepsilon_0 c E^2 = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \quad (10.76)$$

Έτσι, η ένταση I είναι

$$I = \langle N \rangle = \varepsilon_0 c E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) dt$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\omega=2\pi/T$, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi - \vec{k} \cdot \vec{r} - \alpha) d\varphi = \frac{1}{2}$$

Έτσι, τελικά, η ένταση της ακτινοβολίας του αρμονικού κύματος είναι

$$\boxed{I = \langle N \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2} \quad (10.77)$$

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια μερικά παραδείγματα φυσικών συστημάτων που ακτινοβολούν. Θα περιοριστούμε στα βασικά φυσικά συμπεράσματα αποφεύγοντας τις μαθηματικές λεπτομέρειες (κάτι για το οποίο είμαι βέβαιος ότι δεν είστε ιδιαίτερα δυσχερήστενοι!).

10.12 Ακτινοβολία Επιταχυνόμενου Σημειακού Φορτίου

Σύμφωνα με έναν παρατηρητή που είναι ακίνητος σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ένα κινούμενο σημειακό φορτίο q δημιουργεί ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Το φορτίο μεταφέρει την ενέργεια του Η/Μ πεδίου του στην κατεύθυνση της κίνησής του. Αν η ενέργεια αυτή μένει σταθερή, το φορτίο προφανώς δεν ακτινοβολεί. Αν όμως η ολική ενέργεια του Η/Μ πεδίου του φορτίου ελαττώνεται, η ενέργεια που χάνεται δεν είναι τίποτ' άλλο παρά εκπομπή Η/Μ ακτινοβολίας. Ας δούμε τα πράγματα αναλυτικά:

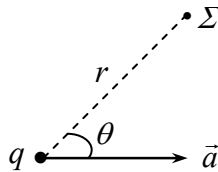
Όταν η ταχύτητα του φορτίου μένει σταθερή (κατά μέτρο και κατεύθυνση) η ολική ενέργεια του Η/Μ πεδίου του επίσης μένει σταθερή και απλά μεταφέρεται στην κατεύθυνση κίνησης του q . Αυτό ισχύει διότι, όπως αποδεικνύεται, το ολοκλήρωμα του διανύσματος Poynting πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια S με κέντρο το q και ακτίνα r είναι μηδέν στο όριο που $r \rightarrow \infty$. Έτσι, $P_{rad} = 0$, όπως εξηγήσαμε στην Παρ.10.11. Δηλαδή, η ενέργεια του Η/Μ πεδίου μένει «προσκολλημένη» στο q και δεν «δραπετεύει στο άπειρο» υπό μορφή Η/Μ ακτινοβολίας. Συμπεραίνουμε ότι

ένα σημειακό φορτίο που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά δεν εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία.

Όταν το φορτίο *επιταχύνεται*, ένα μέρος της ενέργειας του Η/Μ πεδίου του αποσπάται, κατά κάποιον τρόπο, και απομακρύνεται στο άπειρο με την ταχύτητα του φωτός υπό μορφή Η/Μ κύματος. Στην περίπτωση αυτή, $P_{rad} \neq 0$. Αυτό ακριβώς είναι το κύριο χαρακτηριστικό της Η/Μ ακτινοβολίας. Άρα,

ένα επιταχυνόμενο σημειακό φορτίο εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία.

Θεωρούμε τώρα ένα σημειακό φορτίο q που εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση \vec{a} . Θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου το q είτε είναι *στιγμιαία* ακίνητο ($\vec{v} = 0$) είτε κινείται με ταχύτητα πολύ μικρότερη από αυτή του φωτός ($v \ll c$). Έστω Σ ένα σημείο παρατήρησης που απέχει απόσταση r από τη στιγμιαία θέση του q . Καλούμε θ τη γωνία ανάμεσα στον άξονα $q\Sigma$ και την επιτάχυνση του q :



Η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από το q λόγω της επιτάχυνσής του είναι, στο σημείο παρατήρησης Σ :

$$I(r, \theta) = (\text{σταθερά}') \cdot q^2 a^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \quad (a = |\vec{a}|) \quad (10.78)$$

Η *ολική εκπεμπόμενη ισχύς* (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου) δίνεται από τον *τύπο του Larmor*:

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (10.79)$$

Παρατηρήσεις:

1) Για να διατηρήσουμε ένα φορτίο σε επιταχυνόμενη κίνηση για μεγάλο χρονικό διάστημα πρέπει να του χορηγούμε διαρκώς ενέργεια προς αναπλήρωση αυτής που χάνεται λόγω ακτινοβολίας. Η απώλεια αυτή όμως είναι σημαντική μόνο για πολύ μεγάλες τιμές της επιτάχυνσης a , ενώ για σχετικά μικρές τιμές του a οι απώλειες ενέργειας είναι αμελητέες και συχνά δεν λαμβάνονται υπόψη.

2) Ένα φορτισμένο σωματίο που κινείται (έστω και ομαλά) σε κυκλική τροχιά εκτελεί *επιταχυνόμενη* κίνηση λόγω συνεχούς μεταβολής της κατεύθυνσης της ταχύτητάς του (έχει κεντρομόλο επιτάχυνση). Έτσι, το σωματίο αυτό εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία. Για παράδειγμα, όταν ένα ιόν επιταχύνεται σε έναν κυκλικό επιταχυντή (π.χ., κύκλοτρο) ένα μέρος της ενέργειας του ιόντος χάνεται υπό μορφή ακτινοβολίας η οποία καλείται *ακτινοβολία σύγχροτρου* και είναι τόσο εντονότερη όσο μικρότερη είναι η μάζα του σωματίου.

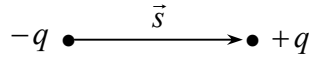
3) Σε συνέχεια της προηγούμενης παρατήρησης πρέπει να τονίσουμε και το εξής: Η περίπτωση ενός *σημειακού* φορτίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση είναι διαφορετική από εκείνη ενός κυκλικού *ρεύματος* σταθερής έντασης. Στη δεύτερη περίπτωση το παραγόμενο Η/Μ πεδίο είναι απλά ένα *στατικό* μαγνητικό πεδίο (το ηλεκτρικό πεδίο έξω από το ρευματοφόρο αγωγό είναι αμελητέο διότι ο αγωγός είναι ηλεκτρικά ουδέτερος). Έτσι, ένα *σταθερό* κυκλικό ρεύμα δεν παράγει Η/Μ ακτινοβολία. Αντίθετα, το σημειακό φορτίο που κινείται κυκλικά παράγει ένα *χρονικά μεταβαλλόμενο* Η/Μ πεδίο, πράγμα που αποτελεί αναγκαία συνθήκη για να έχουμε εκπομπή ακτινοβολίας. Τονίζουμε και πάλι ότι

η Η/Μ ακτινοβολία παράγεται είτε από επιταχυνόμενα μεμονωμένα φορτία είτε από χρονικά μεταβαλλόμενα ρεύματα. Συστήματα φορτίων ή ρευμάτων που είναι πηγές στατικών Η/Μ πεδίων δεν ακτινοβολούν.

4) Ο τύπος του Larmor (10.79) ισχύει ανεξάρτητα αν το φορτίο q «επιταχύνεται» (αυξάνει το μέτρο v της ταχύτητάς του) ή «επιβραδύνεται» (ελαττώνεται το v). Πράγματι, η ακτινοβλούμενη ισχύς εξαρτάται μόνο από το τετράγωνο του μέτρου a της επιτάχυνσης του q (προσέξτε επίσης ότι η ισχύς είναι ανεξάρτητη από το πρόσημο του φορτίου). Έτσι, ένα *επιβραδυνόμενο* φορτισμένο σωματίο εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία η οποία καλείται *ακτινοβολία επιβράδυνσης* ή *bremsstrahlung*. Τέτοιας μορφής ακτινοβολία εκπέμπεται, για παράδειγμα, όταν ένα ταχέως κινούμενο ηλεκτρόνιο προσκρούει σε ένα στόχο με αποτέλεσμα να υποστεί απότομη επιβράδυνση. Με το μηχανισμό αυτό κυρίως παράγεται η ακτινοβολία στους σωλήνες ακτίνων Χ.

10.13 Ακτινοβολία Ηλεκτρικού Διπόλου

Μια ειδική διάταξη επιταχυνόμενων φορτίων είναι ένα *παλλόμενο ηλεκτρικό δίπολο*. Μια τέτοια διάταξη εκπομπής ακτινοβολίας είναι, για παράδειγμα, η γραμμική κεραία ενός ραδιοφωνικού σταθμού. Πρόκειται στην ουσία για ένα ηλεκτρικό δίπολο

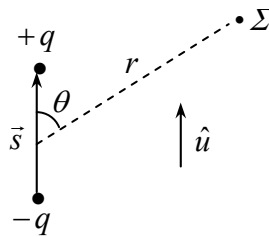


διπολικής ροπής $\vec{p} = q\vec{s}$, στο οποίο το φορτίο ταλαντώνεται από το ένα άκρο στο άλλο έτσι ώστε τη χρονική στιγμή t να ισούται με

$$q(t) = q_0 \cos \omega t \quad (q_0 > 0) \tag{10.80}$$

Υποθέτουμε ότι το \vec{s} είναι *σταθερό* διάνυσμα ανεξάρτητο από το πρόσημο της στιγμιαίας τιμής q του φορτίου. Αυτό σημαίνει ότι, μια δεδομένη χρονική στιγμή, η διπολική ροπή $\vec{p} = q\vec{s}$, η οποία κατευθύνεται πάντα από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο, είναι ομόροπη ή αντίροπη με το \vec{s} ανάλογα με το αν $q > 0$ ή $q < 0$, αντίστοιχα, τη στιγμή αυτή. Η ροπή αυτή ταλαντώνεται με συχνότητα ω αλλάζοντας περιοδικά κατεύθυνση. Αν $\hat{u} = \vec{s}/s$ ($s = |\vec{s}|$) είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του \vec{s} , έχουμε:

$$\vec{p}(t) = q(t)\vec{s} = (q_0 s \cos \omega t)\hat{u} = (p_0 \cos \omega t)\hat{u} \quad \text{όπου } p_0 = q_0 s \tag{10.81}$$



Το σύστημα αυτό εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία συχνότητας $\omega = 2\pi f$. Η ακτινοβολία διαδίδεται ακτινικά προς όλες τις κατευθύνσεις με την ταχύτητα του φωτός. Σε κάθε σημείο του χώρου μακριά από το δίπολο τα πεδία \vec{E} και \vec{B} είναι σε φάση, κάθετα μεταξύ τους και κάθετα προς τη διεύθυνση διαδόσεως, και οι στιγμιαίες τιμές τους συνδέονται με τη σχέση $E = cB$. Επιπλέον, τα πλάτη των \vec{E} και \vec{B} ελαττώνονται κατά τον παράγοντα $1/r$ (όπου r η απόσταση του σημείου παρατήρησης Σ από το δίπολο) καθώς το κύμα απομακρύνεται από την πηγή (δίπολο), οι δε επιφάνειες σταθερών φάσεων (*ισοφασικές επιφάνειες*) είναι σφαίρες με κέντρο το δίπολο. Κύματα τέτοιας μορφής ονομάζονται *σφαιρικά κύματα*.

Η ένταση της Η/Μ ακτινοβολίας στο σημείο Σ είναι

$$I(r, \theta) = (\text{σταθερά}') \cdot p_0^2 \omega^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \tag{10.82}$$

ενώ η ολική εκπεμπόμενη ισχύς είναι

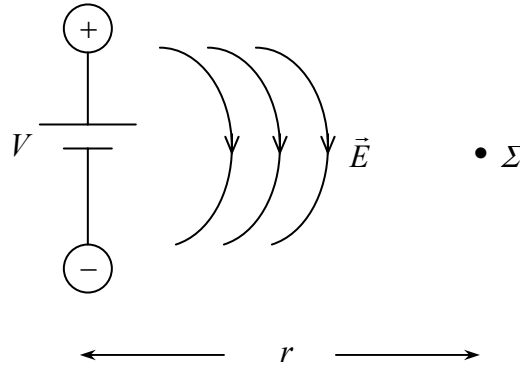
$$P = (\text{σταθερά}') \cdot p_0^2 \omega^4 \quad (10.83)$$

Μια εναλλακτική μορφή παλλόμενου ηλεκτρικού διπόλου είναι εκείνη όπου τα φορτία είναι χρονικά σταθερά, ίσα κατ' απόλυτη τιμή με q_0 , αλλά το διάνυσμα \vec{s} μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο: $\vec{s}(t) = \vec{s}_0 \cos \omega t = (s_0 \cos \omega t) \hat{u}$. Τότε,

$$\vec{p}(t) = q_0 \vec{s}(t) = (q_0 s_0 \cos \omega t) \hat{u} = (p_0 \cos \omega t) \hat{u}$$

όπως πριν. (Το \vec{s} τώρα δεν είναι σταθερό, κατευθύνεται όμως πάντα από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο και είναι ομόρροπο με το \vec{p} . Τα δύο φορτία εναλλάσσουν θέσεις ανάλογα με την κατεύθυνση του \vec{s} .) Αυτό το μοντέλο ταλαντωτή χρησιμοποιείται για να περιγράψει την απορρόφηση και επανεκπομπή ακτινοβολίας από τα άτομα ή τα μόρια των διηλεκτρικών μέσων, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα παλλόμενου ηλεκτρικού διπόλου. Φανταστείτε ότι συνδέουμε δύο μεταλλικά σφαιρίδια με μια πηγή τάσης V :

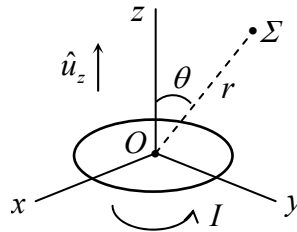


Τι αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής στο σημείο Σ σε απόσταση r από το σύστημα; Έστω ότι αρχικά η πηγή μένει σταθερή ($V=V_0=\text{σταθ.}$). Τότε, τα φορτία $+q$ και $-q$ στα σφαιρίδια μένουν σταθερά, το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} στο χώρο είναι στατικό, το μαγνητικό πεδίο \vec{B} είναι μηδέν, και καμία μεταβολή (διαταραχή) δεν γίνεται αντιληπτή από τον παρατηρητή στο Σ . Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου η τάση της πηγής είναι περιοδικά εναλλασσόμενη. Όταν η πολικότητα της πηγής αντιστρέφεται, το ίδιο συμβαίνει και με την κατεύθυνση του \vec{E} κοντά στο δίπολο. Ο παρατηρητής στο Σ , όμως, δεν το αντιλαμβάνεται αυτό ακαριαία αλλά μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t=r/c$, όσο χρειάζεται για να ταξιδέψει η «πληροφορία» από το δίπολο στο Σ σε απόσταση r από το παλλόμενο σύστημα. Τώρα, η αντιστροφή της πολικότητας της πηγής συνοδεύεται από ροή φορτίου (ηλεκτρικό ρεύμα) κατά μήκος του διπόλου, άρα από εμφάνιση μαγνητικού πεδίου γύρω από το δίπολο. Και πάλι, ο παρατηρητής στο Σ αντιλαμβάνεται το \vec{B} μετά από χρόνο $\Delta t=r/c$ από τη στιγμή της δημιουργίας του. Προσέξτε ότι η μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου συνοδεύεται από εμφάνιση μαγνητικού πεδίου, σύμφωνα με το νόμο Ampère-Maxwell. Προσέξτε επίσης ότι, λόγω της περιοδικότητας του V , τα φορτία ταλαντώνονται άρα επιταχύνονται συνεχώς, ενώ και το ρεύμα κατά μήκος του διπόλου είναι μεταβαλλόμενο. Όπως γνωρίζουμε, οι συνθήκες αυτές είναι προϋποθέσεις για την εκπομπή Η/Μ ακτινοβολίας.

10.14 Ακτινοβολία Μαγνητικού Διπόλου

Μια ειδική διάταξη χρονικά-μεταβαλλόμενου ρεύματος είναι ένα *παλλόμενο μαγνητικό δίπολο* (παράδειγμα: μια κυκλική κεραία εκπομπής). Θεωρούμε έναν κυκλικό ρευματικό βρόχο ακτίνας R (άρα, εμβαδού $a=\pi R^2$) στο επίπεδο xy , ο οποίος διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα της μορφής

$$I(t) = I_0 \cos \omega t \quad (I_0 > 0) \tag{10.84}$$



Κατά συνθήκη, ένα ρεύμα στο επίπεδο xy θα θεωρείται ως θετικό αν κινείται αριστερόστροφα ενώ ως αρνητικό αν κινείται δεξιόστροφα. Έτσι, π.χ., τη χρονική στιγμή $t=0$ το αρχικό ρεύμα I_0 είναι αριστερόστροφο, η φορά του ρεύματος όμως αλλάζει περιοδικά με το χρόνο.

Η μαγνητική διπολική ροπή του βρόχου τη χρονική στιγμή t είναι

$$\begin{aligned} \vec{m}(t) &= I(t) \vec{a} = I(t) a \hat{u}_z = (I_0 \pi R^2 \cos \omega t) \hat{u}_z \Rightarrow \\ \vec{m}(t) &= (m_0 \cos \omega t) \hat{u}_z \quad \text{όπου} \quad m_0 = I_0 a = I_0 \pi R^2 \end{aligned} \tag{10.85}$$

Προσέξτε ότι το \vec{m} είναι στην κατεύθυνση $+z$ όταν $I > 0$ (αριστερόστροφο ρεύμα) ενώ είναι στην κατεύθυνση $-z$ όταν $I < 0$ (δεξιόστροφο ρεύμα). Έτσι, η διπολική ροπή αλλάζει περιοδικά κατεύθυνση ανάλογα με τη φορά τού I .

Το παραπάνω σύστημα, όπως και αυτό της προηγούμενης παραγράφου, εκπέμπει σφαιρικά Η/Μ κύματα συχνότητας $\omega=2\pi f$. Η ένταση της Η/Μ ακτινοβολίας στο σημείο Σ είναι

$$I(r, \theta) = (\text{σταθερά}') \cdot m_0^2 \omega^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \tag{10.86}$$

ενώ η ολική εκπεμπόμενη ισχύς είναι

$$P = (\text{σταθερά}') \cdot m_0^2 \omega^4 \tag{10.87}$$

Παρατηρήστε τις ομοιότητες ανάμεσα στις εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό δίπολο!

10.15 Φάσμα της Η/Μ Ακτινοβολίας

Η Η/Μ ακτινοβολία καλύπτει μια ευρύτατη περιοχή συχνοτήτων που καλείται *φάσμα της Η/Μ ακτινοβολίας*. Για πρακτικούς λόγους οι διάφορες συνιστώσες του φάσματος καταχωρίζονται σε συγκεκριμένες περιοχές, ανάλογα με τη συχνότητα και τον τρόπο παραγωγής των Η/Μ κυμάτων. Κατά αυξανόμενη συχνότητα f , οι περιοχές αυτές είναι:

1) Ραδιοκύματα (μερικά Hz έως 10^9 Hz). Παράγονται από παλλόμενα ηλεκτρικά κυκλώματα και κεραίες. Υποδιαιρούνται σε *μεσαία* (ραδιοφωνία AM, 500-1600 kHz), *βραχεία* (ραδιοφωνία AM, 6-25 MHz), και *υπερβραχεία* (ραδιοφωνία FM, τηλεόραση, 30-1000 MHz).

2) Μικροκύματα (δορυφορική τηλεπικοινωνία, $10^9 - 3 \times 10^{11} \text{ Hz}$). Επίσης παράγονται από παλλόμενα ηλεκτρικά κυκλώματα και κεραίες.

3) Υπερύθρη ακτινοβολία ($3 \times 10^{11} - 4 \times 10^{14} \text{ Hz}$). Εκπέμπεται από μόρια και θερμά σώματα.

4) Ορατό φως ($4 \times 10^{14} - 8 \times 10^{14} \text{ Hz}$). Εκπέμπεται από διηγεμένα άτομα ή μόρια. Κατά αυξανόμενη συχνότητα: κόκκινο, πορτοκαλί, κίτρινο, πράσινο, μπλε, ιώδες.

5) Υπεριώδης ακτινοβολία ($8 \times 10^{14} - 3 \times 10^{17} \text{ Hz}$). Εκπέμπεται και αυτή από διηγεμένα άτομα ή μόρια.

6) Ακτίνες X ($3 \times 10^{17} - 5 \times 10^{19} \text{ Hz}$). Εκπέμπονται από διηγεμένα άτομα ή παράγονται με το μηχανισμό του *bremsstrahlung* (βλ. Παρ.10.12).

7) Ακτίνες γ ($3 \times 10^{18} - 3 \times 10^{22} \text{ Hz}$). Εκπέμπονται από διηγεμένους πυρήνες.

10.16 Απορρόφηση Η/Μ Ακτινοβολίας από Διηλεκτρικά (Μονωτές)

Όταν ένα Η/Μ κύμα προσπίπτει σε ένα άτομο (ή μόριο) ενός διηλεκτρικού (μονωτικού) μέσου, τα πεδία \vec{E} και \vec{B} του κύματος αλληλεπιδρούν με τα *δέσμια* ηλεκτρόνια του ατόμου. Η επίδραση του \vec{B} θεωρείται αμελητέα για μικρές τιμές της ταχύτητας v ενός ηλεκτρονίου, αν συγκρίνουμε τη μαγνητική με την ηλεκτρική δύναμη που ασκούνται στο ηλεκτρόνιο, λαμβάνοντας υπόψη ότι $E \approx cB$:

$$F_{\mu\alpha\gamma\nu} \approx q_e v B \approx \frac{v}{c} (q_e E) = \frac{v}{c} F_{\eta\lambda} \Rightarrow \frac{F_{\mu\alpha\gamma\nu}}{F_{\eta\lambda}} \approx \frac{v}{c} \approx 0 \quad \text{όταν} \quad v \ll c$$

(όπου q_e η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου). Προσέξτε ότι οι δύο δυνάμεις γίνονται συγκρίσιμες στο όριο που $v \rightarrow c$, δηλαδή στην περιοχή των υψηλών ενεργειών (βλ. και Κεφ.9, Πρόβλ.6).

Έστω $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$ το ηλεκτρικό πεδίο ενός μονοχρωματικού κύματος που προσπίπτει σε ένα δέσμιο ηλεκτρόνιο ενός ατόμου του διηλεκτρικού. Θεωρώντας ότι το x μεταβάλλεται ελάχιστα στον περιορισμένο χώρο όπου κινείται το ηλεκτρόνιο, θέτουμε εξαρχής $x=0$, οπότε $\vec{E} \approx \vec{E}_0 \cos \omega t$. Υπό την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης $\vec{F} = -q_e \vec{E} = -q_e \vec{E}_0 \cos \omega t$, το ηλεκτρόνιο εκτελεί *εξαναγκασμένες ταλαντώσεις* συχνότητας ω ίδιας με αυτήν του προσπίπτοντος κύματος. Ο ρυθμός με τον οποίο το

ηλεκτρόνιο απορροφά ενέργεια από το κύμα (δηλαδή, η μέση ισχύς που μεταφέρεται από το κύμα στον ταλαντωτή) αποκτά μέγιστη τιμή όταν υφίσταται *ενεργειακός συντονισμός*, πράγμα που με τη σειρά του συμβαίνει όταν η συχνότητα $\omega = 2\pi f$ του κύματος ισούται με τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης του ηλεκτρονίου. Η συχνότητα αυτή είναι οποιαδήποτε από τις συχνότητες $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, του *φάσματος απορρόφησης* του ατόμου (ή μορίου) στο οποίο ανήκει το ηλεκτρόνιο.

Το άτομο τώρα συμπεριφέρεται σαν ένα *παλλόμενο ηλεκτρικό δίπολο* που εξαναγκάζεται να ταλαντώνεται με συχνότητα ω . (Το φορτίο q_e του διπόλου είναι σταθερό αλλά η απόσταση μεταξύ του ταλαντούμενου ηλεκτρονίου και του θετικού ιόντος που αποτελεί το υπόλοιπο μέρος του ατόμου μεταβάλλεται αρμονικά.) Το άτομο λοιπόν θα εκπέμπει H/M ακτινοβολία της ίδιας συχνότητας ω με αυτήν του προσπίπτοντος κύματος. Την ενέργεια που ακτινοβολεί το άτομο την *απορρόφησε* από το προσπίπτον H/M κύμα μέσω ενός εκ των δέσμιων ηλεκτρονίων του. Η ενέργεια αυτή δεν επιστρέφεται ποτέ στην προσπίπτουσα ακτινοβολία αλλά επανεκπέμπεται άτακτα σε τυχαίες κατευθύνσεις. Η διαδικασία αυτή καλείται *σκέδαση* της H/M ακτινοβολίας και έχει σαν αποτέλεσμα την ελάττωση του ενεργειακού περιεχομένου της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. (Έχουμε εδώ μια περίπτωση απορρόφησης H/M ακτινοβολίας που δεν οφείλεται στην αγωγιμότητα του υλικού μέσου!)

Το φαινόμενο της απορρόφησης γίνεται ιδιαίτερα έντονο καθώς η συχνότητα ω της προσπίπτουσας ακτινοβολίας πλησιάζει κάποια από τις συχνότητες $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, του φάσματος απορρόφησης του ατόμου (ή μορίου) του διηλεκτρικού. Αν η απορρόφηση είναι αμελητέα για κάποια συχνότητα ω , λέμε ότι το υλικό είναι *διαφανές* στη συχνότητα αυτή. Αντίθετα, το υλικό είναι *αδιαφανές* στις περιοχές συχνοτήτων γύρω από τις συχνότητες συντονισμού $\omega_1, \omega_2, \dots$, των ατόμων του. Για παράδειγμα, η χαμηλότερη συχνότητα ω_1 για το γυαλί βρίσκεται στην υπεριώδη περιοχή του φάσματος της H/M ακτινοβολίας. Έτσι, το γυαλί είναι διαφανές στο ορατό φως αλλά αδιαφανές στις υπεριώδεις ακτίνες.

Στο φαινόμενο της σκέδασης της H/M ακτινοβολίας οφείλεται το παρατηρούμενο χρώμα του ουρανού. Η ηλιακή ακτινοβολία που προσπίπτει στα άτομα της ατμόσφαιρας της Γης καλύπτει μια ευρεία περιοχή συχνοτήτων (λευκό φως), αλλά η ενέργεια που απορροφάται και επανεκπέμπεται (σκεδάζεται) από τα ατμοσφαιρικά άτομα αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο μέρος της στις υψηλότερες συχνότητες. Έτσι, η σκέδαση είναι εντονότερη στο μπλε απ' ό,τι στο κόκκινο. Όταν λοιπόν κοιτάζουμε τον ουρανό την ημέρα, αυτό που παρατηρούμε είναι το σκεδαζόμενο μπλε φως, εκτός αν κοιτάξουμε απευθείας στον Ήλιο οπότε βλέπουμε το κιτρινωπό χρώμα του (ό,τι απομένει από το λευκό μετά την αφαίρεση ενός σχετικά μικρού μέρους από το μπλε). Από την άλλη μεριά, το ξημέρωμα και το σούρουπο οι ακτίνες του Ήλιου μάς έρχονται από τα βάθη του ορίζοντα και διατρέχουν πολύ μεγαλύτερες αποστάσεις μέχρι να φτάσουν σ' εμάς. Έτσι, μεγάλο μέρος από τη μπλε συνιστώσα του ηλιακού φωτός έχει ήδη αφαιρεθεί λόγω της σκέδασης στην ατμόσφαιρα, πράγμα που εξηγεί γιατί ο Ήλιος μάς φαίνεται κοκκινωπός τις ώρες εκείνες.

10.17 Συχνότητα Πλάσματος Αγώγιμου Μέσου

Στα αγώγιμα μέσα η απορρόφηση της Η/Μ ακτινοβολίας οφείλεται κυρίως στην επίδραση του Η/Μ κύματος πάνω στα *ελεύθερα* φορτία, σε αντίθεση με τα διηλεκτρικά μέσα όπου η απορρόφηση οφείλεται στα *δέσμια* φορτία. Η διάδοση Η/Μ κυμάτων μέσα σε αγωγούς μελετήθηκε στην Παρ.10.9 και σαν βασικό σημείο εκκίνησης ήταν ο νόμος του Ohm: $\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$. Χωρίς να το κάνουμε θέμα, υποθέσαμε αυτονόητα ότι η ειδική αγωγιμότητα σ του μέσου είναι σταθερή ποσότητα. Στην πραγματικότητα όμως αυτό ισχύει για σχετικά χαμηλές συχνότητες ω του διερχόμενου κύματος. Για τις συχνότητες αυτές μπορούμε να θεωρούμε ότι $\sigma \approx \sigma_0$, όπου σ_0 η *στατική* τιμή της ειδικής αγωγιμότητας (αυτή που υπεισέρχεται στο νόμο του Ohm όταν το πεδίο \vec{E} είναι στατικό). Για έναν καλό αγωγό σε θερμοκρασία δωματίου, η ειδική αγωγιμότητα μπορεί να θεωρείται σταθερή όταν το ω δεν ξεπερνάει τις συχνότητες των μικροκυμάτων.

Όταν λοιπόν Η/Μ ακτινοβολία σχετικά χαμηλής συχνότητας ω προσπίπτει στην επιφάνεια ενός αγωγού, παρατηρούνται τα φαινόμενα που περιγράψαμε στις Παρ.10.9 και 10.10: το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας του προσπίπτοντος κύματος ανακλάται στην επιφάνεια του αγωγού, ενώ το μικρό μέρος που εισέρχεται στο υλικό γρήγορα απορροφάται από αυτό. Όπως μάλιστα είδαμε, με την αύξηση του ω ελαττώνεται το επιδερμικό βάθος Δ , άρα και η διεισδυτικότητα του κύματος.

Καθώς όμως η συχνότητα ω του κύματος αυξάνει, το σ αρχίζει να εξαρτάται από το ω , με τον ίδιο τρόπο που η διηλεκτρική «σταθερά» ενός μονωτή εξαρτάται από το ω (βλ. Παρ.10.7). Όταν το ω ξεπεράσει μια οριακή τιμή ω_p , χαρακτηριστική για το αγώγιμο υλικό, το επιδερμικό βάθος αυξάνει απεριόριστα και το υλικό επιτρέπει τη διέλευση της ακτινοβολίας με αμελητέα απορρόφηση καθώς και με μικρή ανακλαστικότητα. Η ω_p καλείται *κυκλική συχνότητα πλάσματος* του υλικού, ενώ η $f_p = \omega_p / 2\pi$ καλείται *συχνότητα πλάσματος*. Έτσι,

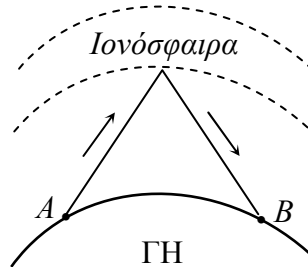
ένα αγώγιμο υλικό εμφανίζεται «διαφανές» για κάθε Η/Μ ακτινοβολία με συχνότητα $f > f_p$.

Για τα περισσότερα μέταλλα, $f_p \approx 3 \times 10^{16}$ Hz. Έτσι, αν και τα μέταλλα είναι αδιαφανή στο ορατό φως, καθίστανται διαφανή στην υπεριώδη ακτινοβολία.

Τα μέταλλα όμως δεν είναι τα μόνα υλικά που εμφανίζουν αγωγιμότητα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και μια κατάσταση της ύλης που ονομάζεται *πλάσμα*. Με τον όρο αυτό εννοούμε ένα αέριο στο οποίο ένας μεγάλος αριθμός ατόμων ή μορίων έχουν υποστεί ιονισμό. Έτσι, το πλάσμα είναι ένα μείγμα ελεύθερων ηλεκτρονίων και θετικών ιόντων. Η αγωγιμότητά του οφείλεται κυρίως στα ελεύθερα ηλεκτρόνια, αφού τα θετικά ιόντα είναι σχετικά δυσκίνητα λόγω της μεγάλης τους μάζας. Ένα φυσικό παράδειγμα πλάσματος είναι η *ιονόσφαιρα*, το στρώμα δηλαδή της γήινης ατμόσφαιρας που εκτείνεται από περίπου 60 km μέχρι 200-300 km πάνω από την επιφάνεια της Γης. Ο ιονισμός προκαλείται από την απορρόφηση της ηλιακής υπεριώδους ακτινοβολίας από τα άτομα της ατμόσφαιρας. Η συχνότητα πλάσματος f_p της ιονόσφαιρας είναι στην περιοχή των ραδιοκυμάτων FM. Κάθε ακτινοβολία συχνότητας $f < f_p$ (όπως, π.χ., ραδιοκύματα AM) που προσπίπτει στο στρώμα αυτό υφίσταται *ανάκλαση* (κυρίως) και μερική απορρόφηση. Ακτινοβολίες όμως με $f > f_p$ (όπως, π.χ., ραδιοκύματα

FM, μικροκύματα, υπέρυθρη ακτινοβολία, ορατό φως, κλπ.) διαπερνούν την ιονόσφαιρα με μικρές μόνο απώλειες λόγω ανάκλασης ή απορρόφησης.

Το φαινόμενο της ανάκλασης για $f < f_p$ αξιοποιείται στις τηλεπικοινωνίες για τη διάδοση των ραδιοκυμάτων AM. Το σήμα ανακλάται πίσω στη Γη όταν φτάσει στην ιονόσφαιρα:



Με τον τρόπο αυτό είναι εφικτή η επικοινωνία μεταξύ δύο απομακρυσμένων σημείων A και B στην επιφάνεια της Γης, έστω κι αν η διάδοση του σήματος σε ευθεία γραμμή είναι αδύνατη λόγω της καμπυλότητας της Γης (η Γη είναι αγωγός και απορροφά τα κύματα επιφανείας). Τούτο εξηγεί γιατί οι σταθμοί AM που εκπέμπουν στα βραχέα ακούγονται σε μακρύτερες αποστάσεις απ' ό,τι οι σταθμοί FM, ιδιαίτερα μάλιστα κατά τη νύχτα όπου το κατώτερο ύψος της ιονόσφαιρας αυξάνει λόγω απουσίας της ηλιακής υπεριώδους ακτινοβολίας, πράγμα που επιτρέπει στο ανακλώμενο κύμα να φτάσει σε απομακρυσμένες περιοχές τις οποίες δεν μπορεί να προσεγγίσει κατά τη διάρκεια της μέρας. (Σημειώνουμε ότι τα FM ελάχιστα ανακλώνται στην ιονόσφαιρα, και ως κύματα επιφανείας η εμβέλειά τους είναι σχετικά μικρή λόγω της υψηλής τους συχνότητας, η οποία εν τούτοις είναι κατώτερη από τη συχνότητα πλάσματος της επιφάνειας της Γης.)

Σημείωση 1: Τα βραχέα AM ακούγονται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από τα μεσαία AM, για τον εξής λόγο: Τα AM είναι ταυτόχρονα κύματα επιφανείας και κύματα από ανάκλαση στην ιονόσφαιρα. Η συχνότητά τους (όπως και αυτή των FM) είναι πολύ μικρότερη από τη συχνότητα πλάσματος της επιφάνειας της Γης. Τα βραχέα, ως πιο υψίσυχνα, απορροφώνται γρήγορα από το έδαφος (το οποίο έχει αγώγιμες ιδιότητες) κι έτσι σε μεγάλες αποστάσεις είναι αμιγώς κύματα ανακλάσεως. Αντίθετα, τα κύματα επιφανείας των μεσαίων, έχοντας χαμηλότερες συχνότητες, «επιβιώνουν» σε μεγαλύτερες αποστάσεις και δημιουργούν φαινόμενα συμβολής με τα ανακλώμενα. Η συμβολή αυτή προκαλεί παραμόρφωση του σήματος σε μεγάλες αποστάσεις από το σταθμό εκπομπής. Το σήμα των μεσαίων ακούγεται ευκρινώς μόνο σε μέσες αποστάσεις όπου το ανακλώμενο κύμα είναι ακόμα αμελητέο.

Στην περίπτωση που θέλουμε να επικοινωνήσουμε με διαστημόπλοια ή με δορυφόρους που βρίσκονται στο διάστημα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε υψίσυχνα κύματα με συχνότητες μεγαλύτερες από τη συχνότητα πλάσματος της ιονόσφαιρας διότι αυτά διαπερνούν την ιονόσφαιρα χωρίς μεγάλες απώλειες λόγω ανάκλασης ή απορρόφησης. Τέτοιες επικοινωνίες γίνονται με τη χρήση μικροκυμάτων. Σαν εφαρμογή, η διάδοση υψίσυχνων σημάτων σε πολύ μεγάλες αποστάσεις πάνω στη Γη γίνεται με τη βοήθεια τηλεπικοινωνιακών δορυφόρων, οι οποίοι παίζουν παρόμοιο ρόλο με αυτόν της ιονόσφαιρας στην περίπτωση των ραδιοκυμάτων AM.

Το γεγονός ότι η υπέρυθη και η ορατή ακτινοβολία διαπερνούν την ιονόσφαιρα (διότι $f \gg f_p$) έχει πολύ μεγάλη σημασία για τη ζωή πάνω στη Γη, αφού έτσι η Γη μπορεί να θερμαίνεται και να φωτίζεται από τον Ήλιο. Αντίθετα, η συχνότητα πλάσματος της θάλασσας είναι πολύ υψηλή, πάνω από την ορατή περιοχή του φάσματος ($f_p \geq 10^{15} \text{ Hz}$) κι έτσι δεν επιτρέπει τη διέλευση θερμικής ή ορατής ακτινοβολίας σε μεγάλα βάθη.

Αλήθεια, γιατί δεν επικοινωνούμε με τα υποβρύχια με πολύ υψηλά Η/Μ σήματα, πάνω από τη συχνότητα πλάσματος της θάλασσας; Διότι Η/Μ ακτινοβολία τέτοιων συχνοτήτων είναι επικίνδυνη, τόσο για τον άνθρωπο όσο και για τη λειτουργία των συσκευών του υποβρυχίου!

Σημείωση 2: Τα ραδιοκύματα AM (*amplitude modulated*) μεταφέρουν το σήμα μέσω ενός Η/Μ κύματος με δοσμένη συχνότητα και κατάλληλα διαμορφωμένο πλάτος, ενώ τα FM (*frequency modulated*) χρησιμοποιούν κύμα δοσμένου πλάτους και κατάλληλα μεταβαλλόμενης συχνότητας. Σκεφτείτε το ως εξής: Έστω ότι θέλουμε να στείλουμε ένα κωδικοποιημένο μήνυμα αναβοσβήνοντας έναν φακό. Υπάρχουν δύο τρόποι να το κάνουμε: (α) Αναβοσβήνουμε με σταθερό ρυθμό αλλά αυξομειώνουμε την ένταση της φωτεινής δέσμης. (β) Αναβοσβήνουμε με μεταβαλλόμενο ρυθμό, κρατώντας τη φωτεινή ένταση σταθερή. Ο πρώτος τρόπος μετάδοσης πληροφορίας (*διαμόρφωση πλάτους*) αντιστοιχεί στα AM, ενώ ο δεύτερος τρόπος (*διαμόρφωση συχνότητας*) αντιστοιχεί στα FM.

Τα AM έχουν δύο βασικά μειονεκτήματα: (α) Μαζί με την χρήσιμη πληροφορία, έχουν την τάση να μεταφέρουν και ηλεκτρικούς θορύβους που συναντούν στο δρόμο τους (π.χ., από οικιακές ηλεκτρικές συσκευές ή καταιγίδες). (β) Δεν παρέχουν ήχο υψηλής πιστότητας στο δέκτη. Τα FM, αντίθετα, δεν επηρεάζονται από θορύβους και προσφέρουν σήμα υψηλής πιστότητας. Για το λόγο αυτό, η μουσική ακούγεται πολύ καλλίτερα στα FM.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Να δοθεί η γενική μαθηματική έκφραση (πραγματική και μιγαδική) ενός επίπεδου αρμονικού κύματος $\xi(\vec{r}, t)$ που διαδίδεται (α) στην κατεύθυνση $+y$, (β) στην κατεύθυνση $-z$.
2. Ένα επίπεδο Η/Μ κύμα διαδίδεται στην κατεύθυνση $-x$. Ο στιγμιαίος προσανατολισμός του πεδίου \vec{B} σε κάποιο σημείο του χώρου είναι στην κατεύθυνση $-z$. Ποιος είναι ο αντίστοιχος προσανατολισμός του πεδίου \vec{E} ;
3. Δείξτε αναλυτικά ότι τα στάσιμα κύματα (10.60) είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης (10.61).
4. Δύο υλικά μέσα, ένα αγωγίμο και ένα μη-αγωγίμο, έχουν τις ίδιες τιμές των ϵ και μ (π.χ., θαλάσσιο και αποσταγμένο νερό). Να συγκριθούν οι ταχύτητες διάδοσης ενός επίπεδου Η/Μ κύματος συχνότητας ω στα δύο αυτά μέσα.
5. Ένα αγωγίμο μέσο έχει σταθερές τιμές των ϵ , μ , σ , ανεξάρτητες από τη συχνότητα ω με την οποία «ταλαντώνεται» το Η/Μ πεδίο στο εσωτερικό του. Να συγκριθούν οι ταχύτητες διάδοσης v_1 και v_2 , στο μέσο αυτό, δύο επίπεδων Η/Μ κυμάτων με συχνότητες ω_1 και ω_2 , όπου $\omega_1 < \omega_2$.
6. Δύο επίπεδα κύματα χαμηλών συχνοτήτων ω_1 και $\omega_2 = 2\omega_1$ προσπίπτουν στην επιφάνεια ενός αγωγίμου μέσου. Ποιο κύμα θα προχωρήσει περισσότερο πριν υποστεί ολική απορρόφηση;
7. Θεωρούμε δύο μέταλλα M_1 και M_2 . Τα επιδερμικά βάθη στα μέταλλα αυτά για την ορατή περιοχή του φάσματος της Η/Μ ακτινοβολίας ικανοποιούν την ανισοτική σχέση $\Delta_1 < \Delta_2$. Ποιο από τα δύο μέταλλα θα χρησιμοποιούσατε για να κατασκευάσετε έναν καθρέφτη;
8. Ποιο από τα παρακάτω φυσικά συστήματα ακτινοβολεί, και γιατί: (α) ένα ηλεκτρόνιο που κινείται κυκλικά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα; (β) ένα κυκλικό ρεύμα σταθερής έντασης I ;
9. Στο κέντρο μιας μεγάλης σφαίρας βρίσκεται ένα μικρό ηλεκτρικό δίπολο το οποίο πάλλεται κατά μήκος κατακόρυφου άξονα διερχόμενου από το κέντρο της σφαίρας. Σε ποια σημεία της σφαιρικής επιφάνειας είναι η ένταση της εκπεμπόμενης Η/Μ ακτινοβολίας μέγιστη, και σε ποια σημεία ελάχιστη; Επαναλάβετε το πρόβλημα θεωρώντας ένα παλλόμενο μαγνητικό δίπολο στο κέντρο της σφαίρας.
10. Πού είναι προτιμότερο να ακούμε ραδιόφωνο, μέσα σε ένα μεταλλικό ή μέσα σε ένα γυάλινο δωμάτιο;
11. Μια καλοκαιρινή μέρα κλεινόμαστε μέσα σε ένα σκοτεινό μεταλλικό δωμάτιο. Θα χρειαστεί να έχουμε μαζί το αντηλιακό μας;

12. Ο κυβερνήτης ενός υποβρυχίου (το οποίο βρίσκεται σε κατάδυση μικρού βάθους) και ο κυβερνήτης ενός διαστημόπλοιου ενδιαφέρονται για το αποτέλεσμα ενός ποδοσφαιρικού αγώνα ο οποίος μεταδίδεται ραδιοφωνικά από τους σταθμούς SPORT FM (107.4 MHz) και SPORT AM (560 kHz). Με ποιο σταθμό θα προτιμήσει να συντονίσει το δέκτη του ο κάθε κυβερνήτης; [*Υπόδειξη:* Η συχνότητα πλάσματος της θάλασσας είναι πολύ υψηλότερη από τις ραδιοσυχνότητες, ενώ για την ιονόσφαιρα η συχνότητα αυτή είναι στην περιοχή των ραδιοκυμάτων FM. Πώς μεταβάλλεται η διεισδυτικότητα των Η/Μ κυμάτων σε ένα αγωγίμο μέσο σαν συνάρτηση του ω για $\omega \ll \omega_p$; Τι συμβαίνει για συχνότητες που υπερβαίνουν την ω_p ;]

13. Ο Maxwell αναλαμβάνει κυβερνήτης σε φρεγάτα. Το πλοίο διαθέτει (α) radar, (β) sonar, (γ) αναμεταδότη ραδιοκυμάτων AM, και (δ) αναμεταδότη ραδιοκυμάτων FM. Η αποστολή του είναι (1) να ανιχνεύσει τυχόν εχθρικά υποβρύχια σε μεγάλο βάθος, (2) να ανιχνεύσει την ύπαρξη εχθρικών πλοίων στη θαλάσσια περιοχή ευθύνης του, (3) να αναμεταδώσει τη ραδιοφωνική περιγραφή ενός ποδοσφαιρικού αγώνα σε ένα φιλικό υποβρύχιο σε κατάδυση 5 m, και (4) να αναμεταδώσει τον ίδιο αγώνα σε ένα διαστημόπλοιο σε τροχιά γύρω από τη Γη. Ποια συσκευή θα χρησιμοποιήσει σε κάθε περίπτωση;

14. Γιατί τη νύχτα ακούμε απομακρυσμένους σταθμούς ραδιοφώνου στα βραχέα AM τους οποίους δεν ακούμε τη μέρα; Γιατί καθώς απομακρυνόμαστε από την πόλη λαμβάνουμε τα μεσαία AM σχετικά καθαρά ενώ το σήμα των σταθμών FM χάνεται; Γιατί τους τοπικούς σταθμούς AM τους πιάνουμε στα μεσαία ενώ τους πολύ απομακρυσμένους στα βραχέα;

15. Φανταστείτε τον κόσμο μας αν η συχνότητα πλάσματος της ιονόσφαιρας ήταν ίση με αυτήν της θάλασσας. Πόσες ώρες θα μελετούσατε (λέμε τώρα...) το μάθημα της Φυσικής κατά τη διάρκεια της μέρας και πόσες κατά τη διάρκεια της νύχτας; Ποια ομάδα θα κέρδιζε το καλοκαιρινό πρωτάθλημα beach soccer; [*Υπόδειξη:* Η συχνότητα πλάσματος της θάλασσας είναι πολύ υψηλότερη τόσο από τις συχνότητες της ορατής ακτινοβολίας (χάρη στην οποία βλέπουμε) όσο και από αυτές της υπέρυθρης (χάρη στην οποία, κυρίως, θερμαινόμαστε).]

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε ένα επίπεδο κύμα της μορφής $\zeta(x,t) = f(x-vt)$. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση ζ είναι περιοδική ως προς t , τότε αναγκαία είναι περιοδική και ως προς x , και αντίστροφα.

Λύση: Έστω ότι η ζ είναι περιοδική ως προς t με περίοδο T :

$$\zeta(x,t) = \zeta(x, t+T) \Rightarrow f(x-vt) = f[x-v(t+T)] = f[(x-vT)-vt] = f[(x-\lambda)-vt]$$

όπου θέσαμε $\lambda = vT$. Άρα, $\zeta(x,t) = \zeta(x-\lambda, t)$, που σημαίνει ότι η ζ είναι περιοδική ως προς x με περίοδο λ . Υποθέτοντας τώρα ότι η ζ είναι περιοδική ως προς x με περίοδο λ , δείξτε ότι θα είναι περιοδική και ως προς t με περίοδο $T = \lambda/v$. Μπορείτε να αναφέρετε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα περιοδικής κυματικής συνάρτησης; Ποια είναι η φυσική σημασία των λ και T ;

2. Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας, οι φυσικοί νόμοι πρέπει να έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Ειδικότερα, οι εξισώσεις του Maxwell πρέπει να έχουν την ίδια μορφή για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Επιπλέον, όπως βρίσκεται πειραματικά, η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή c σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς (πράγματι, βάσει των εξισώσεων του Maxwell η τιμή της c εξαρτάται μόνο από τις σταθερές ϵ_0 και μ_0). Θεωρούμε τώρα ένα φορτίο q που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή Π . Δείξτε ότι, βάσει της αρχής της σχετικότητας, το φορτίο αυτό δεν μπορεί να εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία.

Λύση: Επειδή το q κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή Π , ορίζει και το ίδιο ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ως προς έναν παρατηρητή Π' του συστήματος αυτού το q φαίνεται ακίνητο. Άρα, το μόνο που αντιλαμβάνεται ο Π' είναι ένα στατικό ηλεκτρικό πεδίο, ενώ δεν καταγράφει την παρουσία Η/Μ κύματος. Ας υποθέσουμε τώρα ότι, σύμφωνα με τον Π , το q εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία. Αυτό σημαίνει ότι ο Π παρατηρεί στο σύστημα αναφοράς του την ύπαρξη Η/Μ κύματος. Στο σύστημα του Π το κύμα αυτό «ταξιδεύει» με ταχύτητα c . Αλλά, επειδή η ταχύτητα ενός Η/Μ κύματος (όχι μόνο του φωτός!) είναι ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, θα πρέπει και ως προς το σύστημα του Π' το κύμα αυτό να διαδίδεται με ταχύτητα c , πράγμα που όμως δεν συμβαίνει αφού ο Π' δεν αντιλαμβάνεται την ύπαρξη κύματος! Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ούτε ο Π μπορεί να αντιλαμβάνεται την εκπομπή Η/Μ ακτινοβολίας από το q .

Στην περίπτωση ενός επιταχυνόμενου φορτίου q η παραπάνω επιχειρηματολογία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, αφού το q δεν ορίζει πλέον ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (πράγματι, δεν υπάρχει τέτοιο σύστημα ως προς το οποίο το q να είναι σταθερά ακίνητο). Έτσι, η αρχή της σχετικότητας δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση αυτή.

3. Θεωρούμε δύο αρμονικά Η/Μ κύματα συχνοτήτων ω_1 και ω_2 που διαδίδονται στο κενό στην κατεύθυνση $+x$. Τα ηλεκτρικά πεδία των κυμάτων είναι

$$\vec{E}_1(x,t) = E_0 \cos(k_1x - \omega_1t) \hat{u}_y, \quad \vec{E}_2(x,t) = E_0 \cos(k_2x - \omega_2t) \hat{u}_y, \quad \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = c$$

(α) Βρείτε τα αντίστοιχα μαγνητικά πεδία των κυμάτων. (β) Βρείτε το Η/Μ κύμα που προκύπτει από τη συμβολή των δύο αυτών κυμάτων. Τι είδους κύμα είναι, τρέχον ή στάσιμο;

Λύση: Για καθένα από τα δύο κύματα, τα πεδία \vec{E} και \vec{B} ταλαντώνονται σε φάση και τα πλάτη τους συνδέονται με τη σχέση $B_0 = E_0/c$. Επιπλέον, το γινόμενο $\vec{E} \times \vec{B}$ είναι στην κατεύθυνση διαδόσεως $+x$. Άρα,

$$\vec{B}_1(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(k_1x - \omega_1t) \hat{u}_z, \quad \vec{B}_2(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(k_2x - \omega_2t) \hat{u}_z$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos [(\alpha+\beta)/2] \cos [(\alpha-\beta)/2]$$

και παρατηρώντας ότι $\omega_1 \pm \omega_2 = c(k_1 \pm k_2)$, δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2E_0 \cos \left[\frac{k_1 - k_2}{2} (x - ct) \right] \cos \left[\frac{k_1 + k_2}{2} (x - ct) \right] \hat{u}_y \\ \vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{2E_0}{c} \cos \left[\frac{k_1 - k_2}{2} (x - ct) \right] \cos \left[\frac{k_1 + k_2}{2} (x - ct) \right] \hat{u}_z \end{aligned}$$

Το κύμα είναι *τρέχον*, αφού είναι της μορφής $F(x-ct)$ (κάντε σύγκριση με το παράδειγμα της Παρ.10.8). Μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν αρμονικό κύμα συχνότητας $(\omega_1 + \omega_2)/2$, το πλάτος του οποίου συνιστά ένα *ξεχωριστό* αρμονικό κύμα με συχνότητα $|\omega_1 - \omega_2|/2$. Πρόκειται για την πιο απλή περίπτωση *διαμόρφωσης πλάτους* (*Amplitude Modulation*), τεχνική στην οποία βασίζεται η ραδιοφωνία των AM.

4. Ένα υποβρύχιο που βρίσκεται σε κατάδυση 20 m λαμβάνει με δυσκολία ένα Η/Μ σήμα πολύ μεγάλου μήκους κύματος λ (στον αέρα). Σε ποιο βάθος θα πρέπει να μετατοπιστεί το υποβρύχιο ώστε να μπορέσει να λάβει ένα σήμα με μήκος κύματος $\lambda/4$; (Υποθέστε προσεγγιστικά ότι, στον αέρα, $c = \lambda f$, όπου f η συχνότητα του κύματος.)

Λύση: Σύμφωνα με την (10.71), το επιδερμικό βάθος για κύμα (κυκλικής) συχνότητας $\omega = 2\pi f = 2\pi c/\lambda$ είναι

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi c \mu \sigma}}$$

Έτσι,

$$\Delta_2 / \Delta_1 = \sqrt{\lambda_2 / \lambda_1}$$

Θέτοντας $\Delta_1 = 20 \text{ m}$ και $\lambda_2 = \lambda_1/4$, βρίσκουμε: $\Delta_2 = 10 \text{ m}$.

5. Θα μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά ενός γενικού (μη-μονοχρωματικού) επίπεδου Η/Μ κύματος που διαδίδεται στο κενό. Ένα τέτοιο κύμα μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός μονοχρωματικών κυμάτων διαφόρων συχνοτήτων ω τα οποία διαδίδονται στην ίδια κατεύθυνση, έστω $+x$. Ο γραμμικός αυτός συνδυασμός, για συνεχείς μεταβολές τού ω , παρίσταται ως εξής:

$$\vec{E}(x,t) = \int \vec{E}_0(k) e^{i(kx-\omega t)} dk, \quad \vec{B}(x,t) = \int \vec{B}_0(k) e^{i(kx-\omega t)} dk$$

όπου $\omega/k = c \Leftrightarrow \omega = ck$, $c = (1/\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$ (προσέξτε ότι το κυματοδιάνυσμα γράφεται $\vec{k} = |\vec{k}| \hat{u}_x = k \hat{u}_x$). Όπως γνωρίζουμε (Παρ.10.5), τα μονοχρωματικά κύματα

$$\vec{E}_0(k) e^{i(kx-\omega t)}, \quad \vec{B}_0(k) e^{i(kx-\omega t)}$$

είναι λύσεις των εξισώσεων Maxwell στο κενό υπό την προϋπόθεση ότι

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0(k) = k \hat{u}_x \cdot \vec{E}_0(k) = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0(k) = k \hat{u}_x \cdot \vec{B}_0(k) = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0(k) = k \hat{u}_x \times \vec{E}_0(k) = \omega \vec{B}_0(k), \quad \vec{k} \times \vec{B}_0(k) = k \hat{u}_x \times \vec{B}_0(k) = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0(k)$$

(α) Δείξτε ότι τα $\vec{E}(x,t)$ και $\vec{B}(x,t)$ είναι επίπεδα κύματα που διαδίδονται στην κατεύθυνση $+x$ με ταχύτητα $c = \omega/k$. [Υπόδειξη: Τέτοια κύματα περιγράφονται από συναρτήσεις της μορφής $F(x-ct)$.]

(β) Δείξτε ότι τα $\vec{E}(x,t)$ και $\vec{B}(x,t)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell στο κενό. (Θυμηθείτε ότι $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$.)

(γ) Δείξτε ότι $\hat{u}_x \cdot \vec{E} = 0$, $\hat{u}_x \cdot \vec{B} = 0$. Δηλαδή, τα $\vec{E}(x,t)$ και $\vec{B}(x,t)$ είναι κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος (*εγκάρσιο κύμα*).

(δ) Δείξτε ότι $\hat{u}_x \times \vec{E} = c\vec{B}$, $\hat{u}_x \times \vec{B} = -(1/c)\vec{E}$. Δηλαδή, τα $(\vec{E}, \vec{B}, \hat{u}_x)$ αποτελούν δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα.

(ε) Δείξτε ότι οι στιγμιαίες τιμές των \vec{E} και \vec{B} συνδέονται με τη σχέση $E = cB$.

Λύση:

$$(α) \quad \vec{E}(x,t) = \int \vec{E}_0(k) e^{ik(x-ct)} dk \equiv \vec{F}(x-ct) \quad (\text{όμοια για το } \vec{B})$$

(β) Οι εξισώσεις Maxwell στο κενό είναι

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (10.41), καθώς και το ότι

$$\vec{\nabla} e^{i(kx-\omega t)} = ik e^{i(kx-\omega t)} \hat{u}_x$$

Έχουμε:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int \vec{E}_0(k) \cdot \vec{\nabla} e^{i(kx-\omega t)} dk = \int i k \hat{u}_x \cdot \vec{E}_0(k) e^{i(kx-\omega t)} dk = 0 \quad (\text{όμοια, } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \int [\vec{\nabla} e^{i(kx-\omega t)}] \times \vec{E}_0(k) dk - \int i \omega \vec{B}_0(k) e^{i(kx-\omega t)} dk \\ &= i \int dk e^{i(kx-\omega t)} [k \hat{u}_x \times \vec{E}_0(k) - \omega \vec{B}_0(k)] = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i \int dk e^{i(kx-\omega t)} [k \hat{u}_x \times \vec{B}_0(k) + \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0(k)] = 0$$

$$(\gamma) \quad \hat{u}_x \cdot \vec{E} = \int \hat{u}_x \cdot \vec{E}_0(k) e^{i(kx-\omega t)} dk = 0, \quad \hat{u}_x \cdot \vec{B} = \int \hat{u}_x \cdot \vec{B}_0(k) e^{i(kx-\omega t)} dk = 0$$

$$(\delta) \quad \hat{u}_x \times \vec{E} = \int \hat{u}_x \times \vec{E}_0(k) e^{i(kx-\omega t)} dk = \int \frac{\omega}{k} \vec{B}_0(k) e^{i(kx-\omega t)} dk = c \vec{B}$$

$$\hat{u}_x \times \vec{B} = \int \hat{u}_x \times \vec{B}_0(k) e^{i(kx-\omega t)} dk = - \int \frac{\omega}{kc^2} \vec{E}_0(k) e^{i(kx-\omega t)} dk = - \frac{1}{c} \vec{E}$$

(ε) Θεωρούμε τώρα τις σχέσεις $\hat{u}_x \times \vec{E} = c \vec{B}$, $\hat{u}_x \times \vec{B} = -(1/c) \vec{E}$ για τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές των πεδίων \vec{E} και \vec{B} . Έχουμε, λαμβάνοντας υπόψη το (γ):

$$|\hat{u}_x \times \vec{E}| = c |\vec{B}| \Rightarrow |\vec{E}| = c |\vec{B}| \Rightarrow E = cB$$

(στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη σχέση).

6. Μια λάμπα εκπέμπει ένα τεράστιο πλήθος μονοχρωματικών Η/Μ κυμάτων με διάφορες συχνότητες ω και κυματοδιανύσματα \vec{k} . Το Η/Μ πεδίο που προκύπτει είναι γραμμική επαλληλία τέτοιων κυμάτων και, για συνεχείς μεταβολές των ω και \vec{k} , γράφεται:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \iiint \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dk_x dk_y dk_z \equiv \int \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \iiint \vec{B}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dk_x dk_y dk_z \equiv \int \vec{B}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} \end{aligned}$$

όπου $\omega = ck \Leftrightarrow \omega/k = c$ ($k = |\vec{k}|$). Όπως γνωρίζουμε (Παρ.10.5), τα μονοχρωματικά κύματα

$$\vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

είναι λύσεις των εξισώσεων Maxwell στο κενό υπό την προϋπόθεση ότι

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0(\vec{k}) = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0(\vec{k}) = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0(\vec{k}) = \omega \vec{B}_0(\vec{k}), \quad \vec{k} \times \vec{B}_0(\vec{k}) = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0(\vec{k})$$

(α) Δείξτε ότι τα $\vec{E}(\vec{r}, t)$ και $\vec{B}(\vec{r}, t)$ επαληθεύουν την κυματική εξίσωση στο κενό.

(β) Δείξτε ότι τα $\vec{E}(\vec{r}, t)$ και $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell στο κενό. (Θυμηθείτε ότι $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$.)

(γ) Εξηγήστε γιατί το Η/Μ κύμα που εκπέμπει η λάμπα δεν είναι, γενικά, επίπεδο κύμα, άρα δεν έχει τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν στο Πρόβλ.5. Τι θα λέγατε αν στη θέση της λάμπας είχαμε μια πηγή ακτίνων laser;

Λύση:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \vec{E} &= \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = - \int (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d\vec{k} \\
 &= - \int k^2 \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d\vec{k} \\
 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= - \int \omega^2 \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d\vec{k}
 \end{aligned}$$

(προσέξτε ότι τα k^2 και ω^2 δεν μπορούν να βγουν έξω από τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, αφού δεν είναι σταθερά ως προς τη μεταβλητή ολοκληρώσεως!). Έτσι,

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \int \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d\vec{k} = 0 \quad (\text{όμοια για το } \vec{B})$$

(β) Οι εξισώσεις Maxwell στο κενό είναι

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (10.41), καθώς και το ότι

$$\vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = i\vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Έχουμε:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int \vec{E}_0(\vec{k}) \cdot \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d\vec{k} = \int i\vec{k} \cdot \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d\vec{k} = 0 \quad (\text{όμοια, } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \int [\vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}] \times \vec{E}_0(\vec{k}) d\vec{k} - \int i\omega \vec{B}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d\vec{k} \\
 &= i \int d\vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} [\vec{k} \times \vec{E}_0(\vec{k}) - \omega \vec{B}_0(\vec{k})] = 0
 \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i \int d\vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} [\vec{k} \times \vec{B}_0(\vec{k}) + \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0(\vec{k})] = 0$$

(γ) Το Η/Μ κύμα δεν είναι επίπεδο, αφού δεν είναι της μορφής $\vec{F}(\hat{t} \cdot \vec{r} - ct)$ με σταθερή κατεύθυνση του \hat{t} (στο Πρόβλ.5, αντίθετα, είχαμε $\hat{t} = \hat{u}_x = \text{σταθερό}$). Μια ακτίνα laser, όμως, χαρακτηρίζεται από υψηλή κατευθυντικότητα και το Η/Μ κύμα στο οποίο αντιστοιχεί μπορεί να θεωρηθεί ως περίπου επίπεδο.

7. Θα μελετήσουμε τη διάδοση ενός επίπεδου Η/Μ κύματος μέσα σε αγωγίμο μέσο που έχει σταθερές τιμές των ε , μ , σ .

(α) Με χρήση των εξισώσεων Maxwell για το μέσο αυτό,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

να δειχθεί ότι τα πεδία \vec{E} και \vec{B} υπακούουν στις τροποποιημένες κυματικές εξισώσεις

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (5')$$

(β) Να δειχθεί ότι οι παραπάνω εξισώσεις δέχονται λύσεις της μορφής

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{-sx} e^{i(kx-\omega t)}, \quad \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 e^{-sx} e^{i(kx-\omega t)} \quad (6)$$

(όπου \vec{E}_0, \vec{B}_0 σταθερά μιγαδικά διανύσματα) υπό την προϋπόθεση ότι

$$s^2 - k^2 + \varepsilon\mu\omega^2 = 0 \quad \text{και} \quad \mu\sigma\omega - 2sk = 0 \quad (7)$$

Λύνοντας τις (7) ως προς k και s , επαληθεύστε τις σχέσεις (10.65). Οι λύσεις (6) περιγράφουν επίπεδο Η/Μ κύμα που διαδίδεται στην κατεύθυνση $+x$.

(γ) Να δειχθεί ότι τα \vec{E} και \vec{B} είναι κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος (εγκάρσιο κύμα). [Υπόδειξη: Αντικαταστήστε τις (6) στις (1) και (2).]

(δ) Να δειχθεί ότι τα \vec{E} και \vec{B} είναι κάθετα μεταξύ τους. [Υπόδειξη: Υποθέστε ότι $\vec{E}_0 = \widetilde{E}_0 \hat{u}_y$, όπου \widetilde{E}_0 μιγαδική σταθερά. Αντικαθιστώντας την πρώτη από τις (6) στην

(3) και ολοκληρώνοντας ως προς t , δείξτε ότι $\vec{B}_0 = \frac{k+is}{\omega} \widetilde{E}_0 \hat{u}_z$.]

(ε) Να δειχθεί ότι τα πραγματικά πεδία γράφονται

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,t) &= E_0 e^{-sx} \cos(kx - \omega t + \alpha) \hat{u}_y \\ \vec{B}(x,t) &= \frac{\sqrt{k^2 + s^2}}{\omega} E_0 e^{-sx} \cos(kx - \omega t + \alpha + \varphi) \hat{u}_z \end{aligned} \quad (8)$$

όπου E_0 πραγματικό και $\varphi = \arctan(s/k)$. Ελέγξτε το αποτέλεσμά σας στο όριο που $\sigma \rightarrow 0$ (μη-αγωγίμο μέσο), παρατηρώντας ότι $s \rightarrow 0$ στο όριο αυτό. [Υπόδειξη: Θέστε $\widetilde{E}_0 = |\widetilde{E}_0| e^{i\alpha} = E_0 e^{i\alpha}$ και $k+is = |k+is| e^{i\varphi} = \sqrt{k^2 + s^2} e^{i\varphi}$, όπου $\tan \varphi = s/k$.]

Λύση:

(α) Παίρνουμε τα *rot* των (3) και (4) και εργαζόμαστε όπως στην Παρ.10.4(α).

(β) Αντικαθιστούμε την πρώτη από τις (6) στην (5) προσέχοντας ότι $\nabla^2 \vec{E} = \partial^2 \vec{E} / \partial x^2$. Οδηγούμαστε έτσι σε μια μιγαδική εξίσωση της οποίας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ισοδυναμεί με την πρώτη και τη δεύτερη, αντίστοιχα, από τις σχέσεις (7). [Εναλλακτικά, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη δεύτερη από τις (6) στην (5').] Δείξτε ότι η λύση του συστήματος (7) ως προς k και s οδηγεί στις σχέσεις (10.65).

(γ) Αντικαθιστούμε τις (6) στις (1) και (2), προσέχοντας ότι

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla} e^{-sx+i(kx-\omega t)} = (-s+ik) \hat{u}_x \cdot \vec{E}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = (-s+ik) \hat{u}_x \cdot \vec{B}$$

Έτσι, $\hat{u}_x \cdot \vec{E} = 0$, $\hat{u}_x \cdot \vec{B} = 0$.

(δ) Θέτουμε $\vec{E}_0 = \vec{E}_0 \hat{u}_y$, έτσι ώστε η πρώτη από τις (6) γράφεται

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-sx} e^{i(kx-\omega t)} \hat{u}_y \quad (9)$$

ή σύντομα, $\vec{E} = \vec{E} \hat{u}_y$. Αντικαθιστώντας την (9) στην (3), έχουμε:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \vec{E} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \hat{u}_z = (-s+ik) \vec{E}_0 e^{-sx} e^{i(kx-\omega t)} \hat{u}_z$$

Ολοκληρώνοντας ως προς $t \Rightarrow$

$$\vec{B} = \frac{k+is}{\omega} \vec{E}_0 e^{-sx} e^{i(kx-\omega t)} \hat{u}_z \quad (10)$$

Άρα, από την (6), $\vec{B}_0 = \frac{k+is}{\omega} \vec{E}_0 \hat{u}_z$.

(ε) Θέτουμε $\vec{E}_0 = |\vec{E}_0| e^{i\alpha} = E_0 e^{i\alpha}$ και $k+is = |k+is| e^{i\varphi} = \sqrt{k^2+s^2} e^{i\varphi}$, όπου $\tan \varphi = s/k \Leftrightarrow \varphi = \arctan(s/k)$. Αντικαθιστώντας στις (9) και (10) και παίρνοντας στη συνέχεια τα *πραγματικά μέρη* των \vec{E} και \vec{B} , καταλήγουμε στις (8).

Στο όριο που $\sigma \rightarrow 0$, η δεύτερη από τις σχέσεις (7) δίνει $s \rightarrow 0$ ενώ η πρώτη γίνεται $\omega/k = v = (1/\epsilon\mu)^{1/2}$. Επιπλέον, η διαφορά φάσης $\varphi \rightarrow 0$ (δηλαδή, τα πεδία \vec{E} και \vec{B} ταλαντώνονται σε φάση), ενώ οι στιγμιαίες τιμές των πεδίων συνδέονται με τη σχέση $E=vB$. Στο όριο της μηδενικής αγωγιμότητας, λοιπόν, τα αποτελέσματά μας ανάγονται ουσιαστικά σε αυτά της Παρ.10.5 (αυτή τη φορά για ένα οποιοδήποτε μονωτικό μέσο αντί για το κενό).

8. Θα μελετήσουμε την *πόλωση* ενός Η/Μ κύματος. Θεωρούμε μονοχρωματικό κύμα που διαδίδεται στην κατεύθυνση $+x$. Το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος γράφεται

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} \quad (1)$$

όπου \vec{E}_0 σταθερό *μιγαδικό* διάνυσμα. Στην απλούστερη περίπτωση θέτουμε (βλ. Παρ.10.5)

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0,R} e^{i\theta} \quad (2)$$

όπου $\vec{E}_{0,R}$ *πραγματικό* διάνυσμα, οπότε έχουμε:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_{0,R} e^{i(kx-\omega t+\theta)} \quad (3)$$

Παίρνοντας το *πραγματικό μέρος* τού \vec{E} , βρίσκουμε το *πραγματικό* (φυσικό) πεδίο

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_{0,R} \cos(kx - \omega t + \theta) \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι σε δοσμένη θέση x =*σταθερό*, η κορυφή του διανύσματος \vec{E} ταλαντώνεται κατά μήκος του άξονα που ορίζεται από το σταθερό διάνυσμα $\vec{E}_{0,R}$. Λέμε ότι το κύμα αυτό είναι *γραμμικά πολωμένο*. (Στη βιβλιογραφία θα συναντήσετε και τον όρο *επίπεδα πολωμένο*. Προτιμώ να μην τον χρησιμοποιώ, αφού υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με την εντελώς διαφορετική έννοια ενός επίπεδου κύματος.)

Η παραπάνω περίπτωση όμως είναι ειδική. Για να γενικεύσουμε το πρόβλημα ας επιστρέψουμε στη μιγαδική έκφραση (1). Όπως γνωρίζουμε, τα \vec{E}_0 και \vec{E} είναι κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως x (έτσι, κάθετα στο \hat{u}_x) άρα ανήκουν στο επίπεδο yz . Στη θέση της σχέσης (2) τώρα γράφουμε

$$\vec{E}_0 = E_1 e^{i\theta_1} \hat{u}_y + E_2 e^{i\theta_2} \hat{u}_z \quad (5)$$

όπου τα E_1 και E_2 είναι *πραγματικά*.

(α) Δείξτε ότι το *πραγματικό* ηλεκτρικό πεδίο γράφεται

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z \\ E_y &= E_1 \cos(kx - \omega t + \theta_1), \quad E_z = E_2 \cos(kx - \omega t + \theta_2) \end{aligned} \quad (6)$$

Δηλαδή, το \vec{E} είναι επαλληλία δύο γραμμικά πολωμένων κυμάτων, με κάθετες πολώσεις το ένα ως προς το άλλο και διαφορά φάσης $(\theta_1 - \theta_2)$.

(β) Δείξτε ότι, για $\theta_1 = \theta_2$ καθώς και για $|\theta_1 - \theta_2| = \pi$, το \vec{E} είναι *γραμμικά πολωμένο*.

(γ) Δείξτε ότι, για $|\theta_1 - \theta_2| = \pi/2$ ισχύει ότι

$$\left(\frac{E_y}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_2}\right)^2 = 1 \quad (7)$$

Λέμε ότι το \vec{E} είναι *ελλειπτικά πολωμένο* γιατί η κορυφή του διανύσματος \vec{E} διαγράφει έλλειψη στο επίπεδο yz . Ειδικά, αν $E_1 = E_2 = E_0$ η (7) γράφεται

$$E_y^2 + E_z^2 = E_0^2 \quad (\text{κυκλικά πολωμένο}) \quad (8)$$

(δ) Για αυθαίρετη διαφορά φάσης ($\theta_1 - \theta_2$) δείξτε ότι ισχύει

$$\left(\frac{E_y}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_2}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_1}\right)\left(\frac{E_z}{E_2}\right)\cos(\theta_1 - \theta_2) = \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \quad (9)$$

Δείξτε ότι η (9) ανάγεται στα αποτελέσματα των προηγούμενων ειδικών περιπτώσεων για $\theta_1 - \theta_2 = 0, \pm\pi$ και $\pm\pi/2$.

(ε) Έστω γραμμικά πολωμένο κύμα του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E}(x,t) = (E_1 \hat{u}_y + E_2 \hat{u}_z) \cos(kx - \omega t + \theta) \quad (10)$$

όπου E_1, E_2, θ δοσμένες πραγματικές σταθερές. Δείξτε ότι το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{B}(x,t) = \frac{1}{c} (E_1 \hat{u}_z - E_2 \hat{u}_y) \cos(kx - \omega t + \theta) \quad (11)$$

όπου $c = \omega/k$. [Υπόδειξη: Τα \vec{E} και \vec{B} είναι πάντα κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως x , ταλαντώνονται σε φάση, και ικανοποιούν τις σχέσεις (βλ. Πρόβλ.5)

$$\hat{u}_x \times \vec{E} = c\vec{B}, \quad \hat{u}_x \times \vec{B} = -(1/c)\vec{E} \quad (12)$$

Υποθέστε ότι $\vec{B} = (B_1 \hat{u}_y + B_2 \hat{u}_z) \cos(kx - \omega t + \theta)$ και προσδιορίστε τα B_1, B_2 .]

Λύση:

(α) Αντικαθιστούμε την (5) στην (1) και στη συνέχεια παίρνουμε το πραγματικό μέρος τού \vec{E} . Βρίσκουμε έτσι την (6).

(β) Για $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ η (6) ανάγεται στην (4) με $\vec{E}_{0,R} = E_1 \hat{u}_y + E_2 \hat{u}_z$. Όμοια για $\theta_1 = \theta$ και $\theta_2 = \theta + \pi$, με $\vec{E}_{0,R} = E_1 \hat{u}_y - E_2 \hat{u}_z$.

(γ) Θέτουμε $\theta_1 = \theta$ και $\theta_2 = \theta + \pi/2$. Τότε,

$$E_y = E_1 \cos(kx - \omega t + \theta), \quad E_z = -E_2 \sin(kx - \omega t + \theta)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, οδηγούμαστε στην (7).

(δ) Επιλύουμε το σύστημα

$$E_y = E_1 \cos(kx - \omega t + \theta_1), \quad E_z = E_2 \cos(kx - \omega t + \theta_2)$$

ως προς $\cos(kx - \omega t)$ και $\sin(kx - \omega t)$ (με λίγη βοήθεια από την Τριγωνομετρία!) και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$. Για $\theta_1 - \theta_2 = 0$ ή π , η (9) δίνει

$$\left(\frac{E_y}{E_1} \mp \frac{E_z}{E_2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{E_y}{E_1} = \pm \frac{E_z}{E_2}$$

Αυτό ακριβώς προκύπτει και από την (6) όταν $\theta_1 - \theta_2 = 0$ ή π (γραμμική πόλωση). Για $\theta_1 - \theta_2 = \pi/2$, η (9) ανάγεται στην (7) (ελλειπτική πόλωση).

(ε) Στην πρώτη ή τη δεύτερη από τις (12), αντικαθιστούμε το \vec{E} από την (10) και το \vec{B} από την έκφραση που δίνεται στην υπόδειξη. Εξισώνοντας συντελεστές όμοιων μοναδιαίων διανυσμάτων, βρίσκουμε ότι $B_1 = -E_2/c$, $B_2 = E_1/c$.

9. Στο Πρόβλημα 8 είδαμε ότι η επαλληλία δύο γραμμικά πολωμένων Η/Μ κυμάτων που έχουν ίσα πλάτη, τα ηλεκτρικά τους πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους, και η διαφορά φάσης τους είναι $\pm \pi/2$, δίνει κυκλικά πολωμένο κύμα. Δείξτε τώρα ότι, αντίστροφα, μια κατάλληλη επαλληλία δύο κυκλικά πολωμένων κυμάτων μπορεί να δώσει γραμμικά πολωμένο κύμα.

Λύση: Θεωρούμε τη γενική έκφραση

$$\vec{E} = E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z$$

$$E_y = E_1 \cos(kx - \omega t + \theta_1), \quad E_z = E_2 \cos(kx - \omega t + \theta_2)$$

Θέτουμε $E_1 = E_2 = E_0$ και καλούμε $\theta_1 = \theta$. Για $\theta_2 = \theta + \pi/2$, έχουμε το κυκλικά πολωμένο κύμα

$$\vec{E}_L = E_0 \cos(kx - \omega t + \theta) \hat{u}_y - E_0 \sin(kx - \omega t + \theta) \hat{u}_z$$

$$= E_0 \cos[\omega t - (kx + \theta)] \hat{u}_y + E_0 \sin[\omega t - (kx + \theta)] \hat{u}_z$$

ενώ για $\theta_2 = \theta - \pi/2$, έχουμε το επίσης κυκλικά πολωμένο κύμα

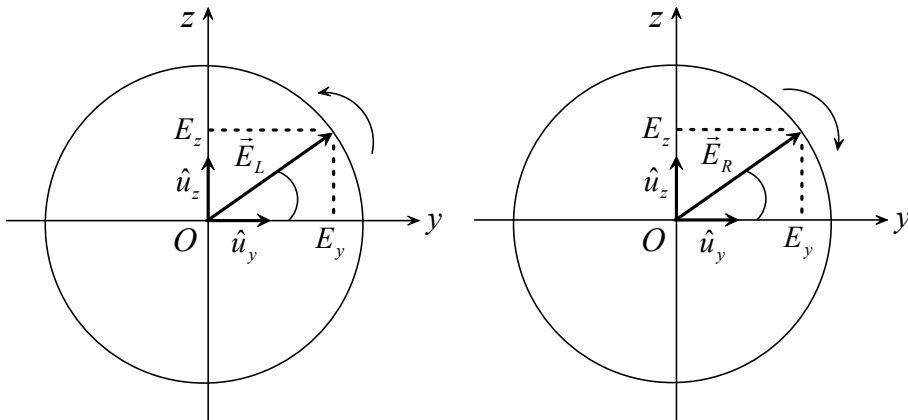
$$\vec{E}_R = E_0 \cos(kx - \omega t + \theta) \hat{u}_y + E_0 \sin(kx - \omega t + \theta) \hat{u}_z$$

$$= E_0 \cos[(kx + \theta) - \omega t] \hat{u}_y + E_0 \sin[(kx + \theta) - \omega t] \hat{u}_z$$

Προσθέτοντας διανυσματικά τα ηλεκτρικά πεδία των δύο αυτών κυμάτων, βρίσκουμε

$$\vec{E} = \vec{E}_L + \vec{E}_R = 2E_0 \cos(kx - \omega t + \theta) \hat{u}_y$$

που παριστά γραμμικά πολωμένο κύμα. Το \vec{E}_L καλείται *αριστερόστροφα πολωμένο* γιατί σε κάθε σημείο x παρίσταται με ένα διάνυσμα μέτρου E_0 που περιστρέφεται αριστερόστροφα σε ένα επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο yz . Όμοια, το \vec{E}_R καλείται *δεξιόστροφα πολωμένο* γιατί παρίσταται με δεξιόστροφα περιστρεφόμενο διάνυσμα. (Προσέξτε ότι η γωνία $\omega t - (kx + \theta)$ την οποία σχηματίζει το διάνυσμα \vec{E}_L με τον άξονα y αυξάνει με το χρόνο, ενώ η αντίστοιχη γωνία $(kx + \theta) - \omega t$ την οποία σχηματίζει το \vec{E}_R ελαττώνεται.)



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Κ. Δ. Αλεξόπουλου, Δ. Ι. Μαρίνου, *Γενική Φυσική*, Τόμος ΙΙ, *Ηλεκτρισμός* (Εκδόσεις Παπαζήση, 1992).
- Γ. Ασημέλλη, *Μαθήματα Οπτικής* (Θεσσαλονίκη, 2005).
- Κ. Ι. Παπαχρήστου, *Εισαγωγή στη Μηχανική των Σωματιδίων και των Συστημάτων*, Β' Έκδοση (Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, 2008).
- Σ. Τραχανά, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2004).
- Π. Τσιλιμίγκρα, *Ειδικά Κεφάλαια Φυσικής* (Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, 1986).
- C. L. Alley, K. W. Atwood, *Semiconductor Devices and Circuits* (Wiley, 1971).
- M. Alonso, E. J. Finn, *Fundamental University Physics*, Volume II, *Fields and Waves*, 2nd Edition (Addison-Wesley, 1983).
- M. Alonso, E. J. Finn, *Fundamental University Physics*, Volume III, *Quantum and Statistical Physics* (Addison-Wesley, 1968).
- M. Alonso, E. J. Finn, *Physics* (Addison-Wesley, 1992).
- A. I. Borisenko, I. E. Tarapov, *Vector and Tensor Analysis with Applications* (Dover, 1979).
- B. H. Bransden, C. J. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules*, 2nd Edition (Prentice-Hall, 2003).
- R. V. Churchill, J. W. Brown, *Complex Variables and Applications*, 5th Edition (McGraw-Hill, 1990).
- W. N. Cottingham, D. A. Greenwood, *Electricity and Magnetism* (Cambridge, 1991).
- A. J. Dekker, *Solid State Physics* (Macmillan India, 2001).
- J. A. Edminister, *Electromagnetics*, 2nd Edition (Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1993).
- W. C. Elmore, M. A. Heald, *Physics of Waves* (Dover, 1985).
- R. A. Greiner, *Semiconductor Devices and Applications* (McGraw-Hill, 1961).
- W. Greiner, *Classical Electrodynamics* (Springer, 1998).
- D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Edition (Prentice-Hall, 1999).

- H. C. Gupta, *Solid State Physics*, 2nd Edition (Vikas Publishing, 1995).
- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition (Wiley, 1999).
- A. S. Kompaneys, *Theoretical Physics* (Dover, 2003).
- S. Lokanathan, R. S. Gambhir, *Statistical and Thermal Physics* (Prentice-Hall, 1991).
- P. Lorrain, D. R. Corson, F. Lorrain, *Electromagnetic Fields and Waves*, 3rd Edition (Freeman, 1988).
- A. N. Matveev, *Optics* (Mir Publishers, 1988).
- J. Millman, C. C. Halkias, *Integrated Electronics* (McGraw-Hill, 1972).
- V. Rojansky, *Electromagnetic Fields and Waves* (Dover, 1979).
- R. A. Serway, *Physics*, 4th Edition (Saunders, 1996).
- A. Shadowitz, *The Electromagnetic Field* (McGraw-Hill, 1975).
- R. Turton, *The Physics of Solids* (Oxford, 2000).
- R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd Edition (Wiley, 1986).

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

- Αγωγός 21
 Αδιαφάνεια 22, 24, 189, 190
 Ακτίνα Bohr 6
 Ακτίνες γ 188
 Ακτίνες X 188
 Ακτινοβολία επιβράδυνσης 184
 Ακτινοβολία επιταχυνόμενου φορτίου 183, 184
 Ακτινοβολία παλλόμενου ηλεκτρικού διπόλου 185, 186, 189
 Ακτινοβολία παλλόμενου μαγνητικού διπόλου 187
 Ακτινοβολία σύγχροτου 184
 Άμορφο στερεό 2
 Ampère, νόμος 105, 118
 Ampère-Maxwell, νόμος 132
 Ανάκλαση ηλεκτρομαγνητικού κύματος 180
 Ανάλυση του φωτός 172
 Αντίσταση 28, 97
 Απαγορευμένη ζώνη 16, 23, 24
 Απαγορευτική αρχή του Pauli 9, 15, 48
 Αποδέκτης 34
 Απομονωμένο σύστημα 43
 Απορρόφηση ηλεκτρομαγνητικού κύματος 177, 178, 180, 188, 189
 Αριστερόστροφα πολωμένο κύμα 204
 Αρμονικό κύμα 157, 158
 Αρχή της αβεβαιότητας 8, 47
 Αρχή της επαλληλίας 71, 77, 82
 Αρχή της σχετικότητας 195
 Αστρόβιλο πεδίο 65-67, 74, 130
 Αυτεπαγωγή 131
 Αυτογενής πυκνότητα 29, 35
 Biot-Savart, νόμος 103
 Bohr, ατομικό μοντέλο 6
 Boltzmann, σταθερά 46
 Bose-Einstein, κατανομή 48
 Βραχέα κύματα AM 188, 191
 Bremsstrahlung 184
 Gauss, θεώρημα 64
 Gauss, νόμος 71, 74, 103, 104, 115
 Γραμμικά πολωμένο κύμα 202
 Γραμμικό διηλεκτρικό 115
 Γραμμικό μαγνητικό μέσο 118
 Δείκτης διαθλάσεως 165, 171, 172
 Δεξιόστροφα πολωμένο κύμα 204
 Δεσμού υδρογόνου, στερεό 3
 Διακριτά σωματίδια 47
 Διαμαγνητικό υλικό μέσο 116, 121
 Διαμόρφωση πλάτους 196
 Διάνυσμα μαγνήτισης 116

- Διάνυσμα πόλωσης 114
 Διασπορά 172, 177
 Διατήρηση της ενέργειας 140
 Διατήρηση του φορτίου 95, 135, 136
 Διαφάνεια 23, 189, 190
 Διαφορά δυναμικού 76
 Δηλεκτρική σταθερά 115
 Δηλεκτρικό μέσο 113
 Δηλεκτρικότητα 115
 Δότης 33
 Δύναμη Lorentz 101
 Δυναμική ενέργεια 68, 79, 80
 Δυναμικό 76
 Εγκάρσιο κύμα 167, 197
 Ειδική αγωγιμότητα 28, 30, 35, 96
 Ειδική αντίσταση 28
 Ελεύθερα ηλεκτρόνια 3, 22, 26, 48, 80
 Ελεύθερα ρεύματα 117
 Ελεύθερα φορτία 114
 Ελλειπτικά πολωμένο κύμα 202
 Ενέργεια ιονισμού 6
 Ενέργεια Fermi 50-52, 54-56
 Ενεργειακή ζώνη 14-16
 Ενεργειακή πυκνότητα 44, 45, 49, 50, 52
 Ενεργειακή στάθμη 7, 10-15, 43
 Ενεργειακό χάσμα 16, 23-25
 Ενεργειακός συντονισμός 189
 Ένταση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας 182, 183, 185, 187
 Ένωση $p-n$ 56
 Εξίσωση ηλεκτρομαγνητικού κύματος 163-165
 Εξίσωση συνεχείας 95, 135
 Επανασύνδεση οπής-ηλεκτρονίου 26
 Επιδερμικό βάθος 177-179
 Επίπεδο αρμονικό κύμα 159, 161
 Επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα 170, 171
 Επίπεδο κύμα 159, 160, 197, 198
 Ευκινησία 27, 30, 96
 Εύρος ενεργειακής ζώνης 14, 15
 Ζώνη αγωγιμότητας 16, 21, 23-25
 Ζώνη σθένους 16, 23-25
 Ηλεκτρεγερτική δύναμη 126-128
 Ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές 77, 130
 Ηλεκτρική διπολική ροπή 111, 185
 Ηλεκτρική επιδεκτικότητα 115
 Ηλεκτρική μετατόπιση 114
 Ηλεκτρικό δίπολο 111
 Ηλεκτρικό δυναμικό 76
 Ηλεκτρικό πεδίο 69
 Ηλεκτρικό ρεύμα 27, 91
 Ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά 137

Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία 181
 Ηλεκτρομαγνητικό κύμα 125, 163-165
 Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο 125
 Ηλεκτρονική πυκνότητα 27, 45, 51, 52, 96
 Ηλεκτροστατική ισορροπία 80, 96
 Ημιαγωγός 2, 24
 Ημιαγωγός προσμείξεως 29, 33, 34, 55
 Ημιαγωγός τύπου n 33, 36, 37, 55
 Ημιαγωγός τύπου p 34, 36, 37, 55
 Θερμική ισορροπία συστήματος 43, 44
 Ιδανικό αέριο 45, 51
 Ιονόσφαιρα 190, 191
 Ιοντικό στερεό 3
 Ισοδυναμική επιφάνεια 77, 80
 Ισοφασική επιφάνεια 159, 185
 Καθαρός ημιαγωγός 29, 31, 36, 37, 54, 55
 Κατανομή 44
 Κατανομή ενέργειας 45
 Κατανομή φορτίου 73, 74
 Κατάσταση ηλεκτρονίου 8, 15, 45
 Κβαντική στατιστική 47
 Κβαντικός αριθμός 8, 45
 Κβαντισμός 6
 Kirchhoff, πρώτος νόμος 99, 100
 Coulomb, νόμος 69, 72, 73
 Κρυσταλλικό πλέγμα 1
 Κρυσταλλικό στερεό 1, 2
 Κρύσταλλος 1, 13
 Κυκλικά πολωμένο κύμα 202, 204
 Κυκλική συχνότητα 158
 Κυκλική συχνότητα πλάσματος 190
 Κύκλωμα 126
 Κύμα 155
 Κύμα επιφανείας 191
 Κυματοαριθμός 158
 Κυματική εξίσωση 157, 160, 163-165
 Κυματική κίνηση 156
 Κυματοδιάνυσμα 159
 Laplace, εξίσωση 78
 Lagrang, τύπος 183, 184
 Lenz, κανόνας 129, 131
 Μαγνητική διαπερατότητα 118
 Μαγνητική διπολική ροπή 112, 187
 Μαγνητική δύναμη 101
 Μαγνητική επιδεκτικότητα 118
 Μαγνητικό δίπολο 112
 Μαγνητικό πεδίο 101
 Μαγνήτιση 116
 Maxwell, εξισώσεις 125, 133, 134, 162, 166, 176
 Maxwell-Boltzmann, κατανομή 45, 47

Μεικτή πρόσμειξη 37
 Μεσαία κύματα AM 188, 191
 Μέταλλο 2, 3, 21, 31
 Μήκος κύματος 158
 Μιγαδική μορφή κύματος 161
 Μικροκατάσταση συστήματος 44
 Μικροκύματα 188, 191
 Μονοχρωματικό επίπεδο κύμα 166
 Μονωτής 2, 23
 Μοριακό στερεό 3
 Μόριο 11, 12, 113
 Μποζόνια 48
 Νόμος δράσεως των μαζών 35-37
 Ohm, νόμος 28-30, 96, 97
 Ομογενές πεδίο 71, 97
 Ομοιοπολικό στερεό 3
 Οπή 25
 Ορατό φως 188
 Οριακές συνθήκες 78, 134
 Παλλόμενο ηλεκτρικό δίπολο 185, 186, 189
 Παλλόμενο μαγνητικό δίπολο 187
 Παραμαγνητικό υλικό μέσο 116, 121
 Pauli, απαγορευτική αρχή 9, 15, 48
 Πεδίο Coulomb 70, 77
 Περίοδος 158
 Πλάσμα 190
 Πλάτος αρμονικού κύματος 158
 Poisson, εξίσωση 78
 Πολικό μόριο 113
 Πόλωση διηλεκτρικού 114
 Πόλωση ηλεκτρομαγνητικού κύματος 169, 202-204
 Royniting, διάνυσμα 139, 140, 168, 171, 182
 Royniting, θεώρημα 140
 Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρομαγνητικού πεδίου 138, 139, 150-152, 170
 Πυκνότητα καταστάσεων 45, 49, 52, 53
 Πυκνότητα κινούμενου φορτίου 92, 96
 Πυκνότητα ρεύματος 27-30, 92, 94, 117
 Πυκνότητα ρεύματος μαγνήτισης 117
 Πυκνότητα φορτίου 73, 114
 Πυκνότητα φορτίου πόλωσης 114
 Πυκνωτής 81, 88, 89, 119-121
 Ραδιοκύματα 188, 190, 191
 Ρεύμα διάχυσης 37
 Ρεύμα μαγνήτισης 117
 Ρεύμα μετατόπισης 132
 Ροή ηλεκτρικού πεδίου 71, 116, 131
 Ροή μαγνητικού πεδίου 103, 104, 129
 Ροή πεδίου 64, 66, 67
 Rutherford, ατομικό μοντέλο 4
 Σημείο βρασμού - τήξης 1

- Σιδηρομαγνητικό υλικό μέσο 116
 Σκέδαση ακτινοβολίας 189
 Σταθερά διάχυσης 38
 Στάθμη Fermi 50, 54-56
 Στάσιμο κύμα 174, 175
 Στατικό πεδίο 67, 71, 102
 Στατιστική ισορροπία 44
 Στοιβάδα 9
 Stokes, θεώρημα του 63, 65
 Συγκέντρωση 27, 29
 Συμβατική φορά ρεύματος 27-29, 91
 Συμβολή κυμάτων 173, 174
 Συνάρτηση πιθανότητας 49, 53
 Συντηρητικό πεδίο 67, 79
 Συχνότητα 158
 Συχνότητα πλάσματος 180, 190
 Σφαιρικό κύμα 164, 185, 187
 Σφαιρικός πυκνωτής 88
 Σχετική διαπερατότητα 119
 Σωληνωτό πεδίο 66, 67, 104, 129
 Τάση 76
 Ταχύτητα διαδόσεως ηλεκτρομαγνητικού κύματος 164, 165, 176
 Ταχύτητα μεταθέσεως 26
 Τετρασθενών στοιχείων κρύσταλλοι 17
 Τηλεπικοινωνίες 191
 Τρέχον κύμα 172
 Τροποποιημένες κυματικές εξισώσεις 176
 Υπεραγωγός 32
 Υπερβραχέα κύματα 188
 Υπεριώδης ακτινοβολία 188
 Υπέρυθρη ακτινοβολία 188
 Υποστοιβάδα 9
 Faraday, νόμος επαγωγής 129
 Faraday-Henry, νόμος 129, 130
 Φάση κύματος 158, 172
 Φασική ταχύτητα 173
 Φάσμα εκπομπής-απορρόφησης 5, 7, 8, 189
 Φάσμα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας 188
 Fermi-Dirac, κατανομή 48-50, 52, 53
 Φερμιόνια 48
 Fick, νόμος του 37
 Φορείς μειονότητας 33, 36
 Φορείς πλειονότητας 33
 Φορτία πόλωσης 114
 Φωτοαγωγιμότητα 24
 Helmholtz, θεώρημα 78
 Χρώμα ουρανού 189
 Χωρητικότητα 81

Ένα Βαθύτατα Μεταφυσικό Ερώτημα:



Τ Ε Λ Ο Σ