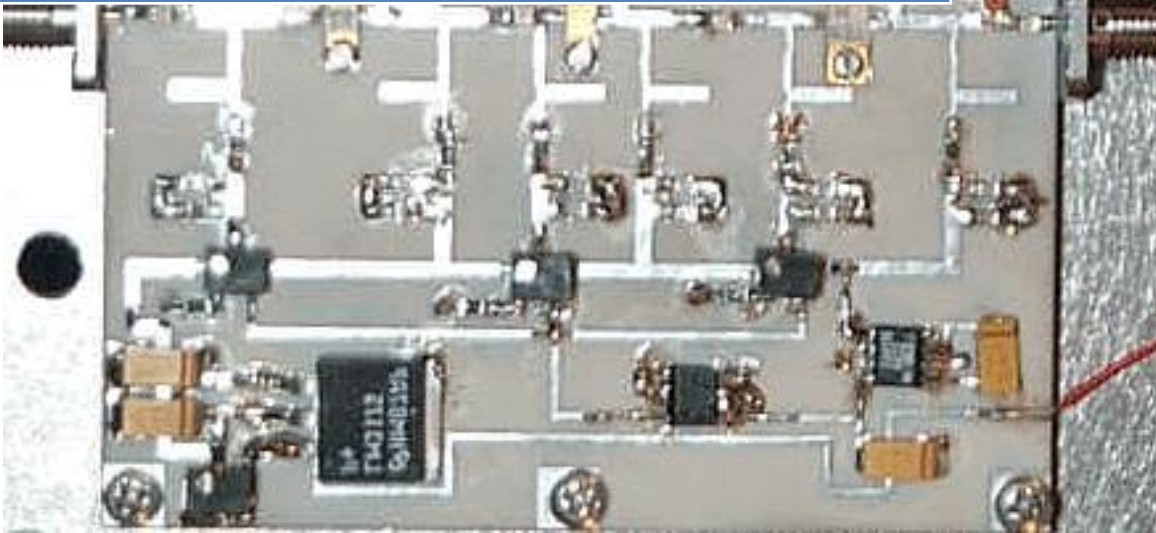


# ΣΝΔ

## Αναλογικά Κυκλώματα Τηλεπικοινωνιών



Ε. Καραγιάννη

Απαγορεύεται η ανατύπωση μέρους ή του συνόλου του συγγράμματος αυτού χωρίς την άδεια της Σχολής Ναυτικών Δοκίμων.

# Πρόλογος

Το παρόν σύγγραμμα συντάχθηκε με σκοπό να καλύψει τις ανάγκες των αυριανών Αξιωματικών του Π.Ν. και διδάσκεται στα πλαίσια των μαθημάτων Ηλεκτρονικής του 3<sup>ου</sup> έτους, στη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων. Είναι συνέχεια του συγγράμματος «Στοιχεία Ηλεκτρονικής» και συνδέει το μάθημα της Ηλεκτρονικής με το μάθημα των Τηλεπικοινωνιών περιγράφοντας τα βασικότερα ηλεκτρονικά κυκλώματα τηλεπικοινωνιακής ηλεκτρονικής από χαμηλές συχνότητες μέχρι και μικροκυματικές.

Πειραιάς, Μάϊος 2014

Ευαγγελία Καραγιάννη



# Πίνακας Περιεχομένων

Πρόλογος.....	3
<b>Κεφάλαιο 1. Εισαγωγικές Έννοιες.....</b>	<b>1</b>
1.1. DC – AC και RF.....	1
1.2. Ημιτονικό Σήμα και μετασχηματισμός Fourier.....	2
1.3. Αποκρίσεις χρόνου και συχνότητας .....	4
1.4. Φάσμα συχνοτήτων.....	6
1.5. Μιγαδικοί αριθμοί.....	8
1.6. Διαιρέτης Τάσης και Διαιρέτης Ρεύματος .....	10
<b>Κεφάλαιο 2. Ορισμοί και Νόμοι Τηλεπικοινωνιών .....</b>	<b>13</b>
2.1. Σύνθετη αντίσταση στοιχείου.....	13
2.2. Ο «νόμος» της μισής ισχύος.....	15
2.3. Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος (MMI).....	15
2.4. Κρίσιμη συχνότητα αποκοπής.....	17
2.5. Ορισμός deciBel.....	18
2.6. Συναρτηση μεταφοράς.....	21
<b>Κεφάλαιο 3. Αναλογικά Φίλτρα και Συζεύκτες .....</b>	<b>25</b>
3.1. Γενικά.....	25
3.1.1. Ορισμός φίλτρου .....	25
3.1.2. Παθητικά και ενεργά στοιχεία.....	25
3.1.3. RF και Πολωση.....	26
3.1.4. Προδιαγραφές φίλτρων .....	26
3.1.5. Ιδανικά και Πραγματικά Φίλτρα .....	27
3.2. Ταξινόμηση Φίλτρων.....	29
3.2.1. Κατηγορίες Φίλτρων Ως Προς Το Κερδος.....	29
3.2.2. Ταξινόμηση Φίλτρων ως Προς Το Φασμα.....	29
Φίλτρα Χαμηλών Συχνοτήτων (Low Pass Filters) .....	29
Φίλτρα Υψηλών Συχνοτήτων (High Pass Filters) .....	30
Φίλτρα ζώνης διέλευσης (Band Pass Filters).....	30

Φίλτρα ζώνης αποκοπής (Band Stop Filters ή Band Reject Filters).....	31
Φίλτρα στενής ζώνης διέλευσης (Narrow Band pass Filters).....	32
Φίλτρα στενής ζώνης αποκοπής (Narrow Band stop Filters).....	32
3.3. Μαθηματικά πρότυπα φίλτρων .....	32
3.3.1. Φίλτρα Butterworth (Μέγιστου Επίπεδου Κέρδους).....	33
3.3.2. Φίλτρα Chebyshev.....	35
Φίλτρα Chebychev τύπου I.....	35
Φίλτρα Chebyshev τύπου II (Αντίστροφα Chebyshev).....	37
3.3.3. Φίλτρα Cauler (Ελλειπτικά).....	38
3.3.4. Σύγκριση Αποκρίσεων Φίλτρων 5ης Τάξης.....	40
3.4. Κέρδος διαδοχικών συστημάτων.....	40
3.5. Βαθμός ή τάξη φίλτρου .....	41
3.6. Εφαρμογές φίλτρων.....	45
3.7. Σύζευξη.....	46
3.7.1. Κατευθυντικός Συζευκτης.....	46
3.7.2. Κύκλωμα προσαρμογής κεραίας .....	47
<b>Κεφάλαιο 4. Παθητικά Φίλτρα και Γραμμές Μεταφοράς.....</b>	<b>51</b>
4.1. Παθητικά Βαθυπερατά Φίλτρα.....	51
4.1.1. Το παθητικό βαθυπερατό RC φίλτρο.....	51
4.1.2. Αντίσταση Εισόδου και Εξόδου.....	53
4.1.3. Γενικευμένο Βαθυπερατό Φίλτρο 1 <sup>ης</sup> Τάξης.....	59
4.1.4. Τερματισμός Στα Παθητικά Βαθυπερατά Φίλτρα 1 <sup>ης</sup> Τάξης.....	60
4.1.3. Το Παθητικό Φίλτρο RLC (2 <sup>ης</sup> Τάξης).....	61
4.1.4. Συντελεστές ποιότητας και απόσβεσης .....	63
4.2. Παθητικά Υψιπερατά Φίλτρα.....	64
4.2.1. Το Παθητικό Υψιπερατό Φίλτρο RC (1ης Τάξης).....	64
4.2.2. Ένα υψιπερατό φίλτρο RLC (2ης Τάξης).....	65
4.2.3. Γενικευμένο Υψιπερατο φίλτρο .....	67
4.3. Παθητικά Ζωνοπερατά Φίλτρα.....	68
4.3.1. Ένα Παθητικό Ζωνοπερατό Φίλτρο RLC.....	68
4.3.2. Ένα Παθητικό Ζωνοπερατό φίλτρο LCR .....	71

4.3.3. Βαθυπερατό και Υψιπερατό Φίλτρο σε Σειρά.....	72
4.3.4. Γενικευμένο πρότυπο ζωνοπερατού φίλτρου .....	74
4.4. Ζωνοαποκοπτικά Φίλτρα .....	75
4.5. Κυκλώματα Παραγωγίσιμης και Ολοκλήρωσης.....	75
4.6. Γραμμές μεταφοράς.....	78
4.6.1. Συγκεντρωμένα και Κατανεμημένα Κυκλώματα .....	78
4.6.2. Γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες .....	80
4.6.3. Γραμμή μεταφοράς με απώλειες.....	81
4.6. Στάσιμα κύματα σε γραμμή μεταφοράς .....	82
4.7. Καλώδια και σύνδεσμοι .....	84
<b>Κεφάλαιο 5. Κυκλώματα με Τελεστικό Ενισχυτή.....</b>	<b>85</b>
5.1. Γενικά.....	85
5.2. Παραδοχές.....	87
5.3. Ο ΤΕ σε αναστρέφουσα συνδεσμολογία .....	87
5.3.1. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως ολοκληρωτής.....	88
5.3.2. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως διαφοριστής.....	88
5.3.3. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως αθροιστής.....	88
5.3.4. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως πολλαπλασιαστής.....	89
5.4. Ο ΤΕ σε μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία.....	89
5.4.1. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως αθροιστής.....	90
5.4.2. Ο ΤΕ ως αφαιρέτης ή διαφορικός ενισχυτής.....	91
<b>Κεφάλαιο 6. Ενεργά Φίλτρα.....</b>	<b>93</b>
6.1. Ενεργό Βαθυπερατό Φίλτρο 1 <sup>ης</sup> Τάξης.....	93
6.1.1. Συνδεσμολογία Αναστρέφοντα Ενισχυτή .....	93
6.1.2. Συνδεσμολογία Μη Αναστρέφοντα Ενισχυτή Ή Φίλτρο Shallen-Key.....	94
6.2. Ενεργό Υψιπερατό Φίλτρο Πρώτης Τάξης.....	95
6.2.1. Συνδεσμολογία Αναστρέφοντα Ενισχυτή .....	95
6.2.2. Συνδεσμολογία Shallen-Key .....	96
6.3. Ενεργό Ζωνοπερατό Φίλτρο Δευτερης Τάξης.....	97
6.4. Γενικευμένο πρότυπο ενεργού φίλτρου 2 <sup>ης</sup> τάξης.....	99
6.4.1. Φίλτρο Butterworth 2ης Τάξης .....	100

A) Λειτουργία Βαθυπερατού Φίλτρου.....	100
B) Λειτουργία Υψιπερατού Φίλτρου.....	101
6.4.2. Φίλτρο Butterworth Περιττής Τάξης.....	102
A) Βαθυπερατό Φίλτρο Περιττής Τάξης.....	102
B) Υψιπερατό Φίλτρο Περιττής Τάξης.....	103
6.4.3. Φίλτρο Butterworth άρτιας τάξης.....	105
6.5. Απόκριση Συχνότητας με τη Βοήθεια του Matlab.....	106
<b>Κεφάλαιο 7. Ενισχυτές με Ανάδραση και Ταλαντωτές .....</b>	<b>107</b>
7.1. Θετική ανάδραση.....	107
7.2. Αρνητική ανάδραση.....	108
7.3. Ενισχυτής BJT με ανάδραση στον εκπομπό.....	109
7.3.1. Αντιμετώπιση της αρνητικής ανάδρασης με χρήση κυκλωματικών στοιχείων.....	110
7.3.2. Αντιμετώπιση της ανάδρασης με χρήση κυκλωματικών παραμέτρων.....	111
7.2.3. Αντιμετώπιση της αρνητικής ανάδρασης με χρήση συστημικών παραμέτρων.....	112
7.4. Ενισχυτής BJT με ανάδραση στη βάση.....	113
7.5. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα αρνητικής ανάδρασης.....	116
7.6. Ταλαντωτές.....	118
7.6.1. Γενικά.....	119
7.6.2. Ταξινόμηση Ταλαντωτών.....	119
7.6.3. Γενική μορφή κυκλώματος Ταλαντωτή.....	120
7.6.4. Άλλοι Ταλαντωτές.....	123
<b>Κεφάλαιο 8. Παραμόρφωση, Θόρυβος και Παρεμβολές .....</b>	<b>125</b>
8.1. Παραμόρφωση στους Ενισχυτές.....	125
8.2. Είδη Παραμορφώσεων.....	127
8.2.1. Παραμόρφωση Πλάτους.....	127
8.2.2. Παραμόρφωση Συχνότητας.....	128
8.2.3. Παραμόρφωση Φάσης.....	129
8.2.4. Παραμόρφωση Ενδοδιαμόρφωσης.....	130
8.3. Ορισμοί Παραμορφώσεων.....	131



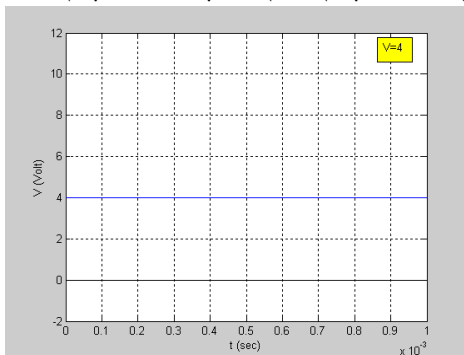
8.4. Μη Γραμμικά Συστήματα.....	131
8.5. Ο ενισχυτής Push-Pull.....	132
8.6. Μέτρηση Ολικής Αρμονικής Παραμόρφωσης (THD) .....	133
8.7. Θόρυβος.....	134
8.8. Συντελεστής θορύβου.....	135
8.9. RFI, EMI and EMC.....	137
<b>Κεφάλαιο 9. Διαμορφωτές και Αποδιαμορφωτές.....</b>	<b>141</b>
9.1. Τηλεπικοινωνίες και Διαμόρφωση .....	141
9.2. Το πρόβλημα .....	142
9.2.1. Το πρώτο πρόβλημα .....	143
9.2.2. Το Δεύτερο Πρόβλημα .....	144
9.3. Το Τέχνασμα .....	144
9.3.1. Το Βασικό Σήμα.....	144
9.3.2. Το Φέρον .....	145
9.4. Πομπός AM.....	145
9.4.1. Διαμόρφωση Πλάτους (AM Modulation) .....	145
9.4.2. Διαμορφωτές Πλάτους: Μέθοδος εισαγωγής δύο σημάτων σε ενισχυτή..	148
9.4.3. Διαμορφωτές Πλάτους Τετραγωνικού Νόμου .....	149
9.5. Δέκτης AM.....	150
9.5.1. Αποδιαμόρφωση Πλάτους (AM Demodulation) .....	150
9.5.2. Ο Γραμμικός Φωρατής.....	151
9.6. Πομπός FM.....	151
9.6.1. Διαμόρφωση Συχνότητας .....	151
9.6.2. Ένα πρακτικό κύκλωμα Διαμορφωτή FM.....	152
9.6.3. Διαμορφωτής Varactor .....	153
9.7. Δέκτης FM.....	153
9.7.1. Αποδιαμόρφωση Συχνότητας .....	153
9.7.2. Ο Φωρατής Κλίσεως.....	154
9.8. Σύγκριση των Διαμορφώσεων AM και FM.....	154
9.9. Διαμόρφωση απλής πλευρικής ζώνης.....	155
9.10. Μίκτες και IF .....	156

9.11. Διάδοση στην ατμόσφαιρα.....	157
<b>ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....</b>	<b>159</b>
Ασκήσεις από τα Κεφάλαια 1 έως 6.....	159
Α) Τύπου πολλαπλής επιλογής.....	159
Β1) Ασκήσεις τύπου Ανάπτυξης.....	163
Β2) Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων τύπου Ανάπτυξης.....	165
Γ) Ασκήσεις για Εξάσκηση.....	169
Ασκήσεις από το Κεφάλαιο 7.....	172
Α) Ασκήσεις για Εξάσκηση.....	172
Β) Παραδείγματα με Αναλυτικές Λύσεις.....	173
Ασκήσεις από το Κεφάλαιο 8.....	182
<b>Ευερετήριο Όρων.....</b>	<b>185</b>
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>187</b>

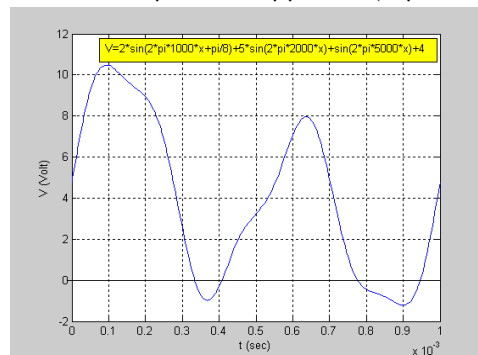
## Εισαγωγικές Έννοιες

### 1.1. DC – AC και RF

**Η**λεκτρικό ρεύμα είναι η ροή ηλεκτρικού φορτίου και η έντασή του μετριέται σε Αμπέρ (A). Οι συσκευές που χρησιμοποιούν τις αρχές της ροής ηλεκτρικού φορτίου σε υλικά ονομάζονται ηλεκτρονικές συσκευές. Για ιστορικούς λόγους, θεωρούμε πως το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει από το πιο θετικό μέρος ενός κυκλώματος στο πιο αρνητικό. Το ηλεκτρικό ρεύμα που ορίζεται έτσι ονομάζεται συμβατικό ρεύμα.



(α)



(β)

Σχήμα 1.1: (α) Ένα DC σήμα τιμής  $V=4\text{Volt}$ , (β) Ένα AC σήμα. Η αναγραφόμενη μαθηματική του έκφραση οφείλεται στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier (σύνδεση με σχήμα 1.4)

Τα σήματα συνήθως αναφέρονται ως DC και ως AC. Ο όρος DC προέρχεται από τον ορισμό για το συνεχές ρεύμα (Direct Current) το οποίο, εξ' ορισμού, κατά τη διέλευσή του μέσα από ένα καλώδιο δεν αλλάζει φορά (πολικότητα). Ο όρος AC προέρχεται από τον ορισμό για το εναλλασσόμενο ρεύμα, στο οποίο η κίνηση των ηλεκτρονίων μέσα σε ένα καλώδιο δεν είναι πάντα ομοιοκατευθυντική. Η μέση χρονική τιμή ενός

εναλλασσόμενου ρεύματος είναι μηδενική, αλλά όχι και η ικανότητα να δώσει ενέργεια (τιμή RMS). Ο Νόμος του Ωμ είναι μια σημαντική σχέση, καθώς περιγράφει τη συμπεριφορά των ηλεκτρικών ρευμάτων σε σχέση με την πηγή (παράγραφος 2.1).

Καταχρηστικά, αλλά δόκιμα, χρησιμοποιούνται αυτοί οι δύο όροι (DC και AC) για να περιγράψουν τις μεταβολές της τάσης ενός σήματος. Στο σχήμα 1.1 παρουσιάζονται ένα DC και ένα AC σήμα. Όπως παρατηρούμε, και για τα δύο σήματα περιγράφεται η μεταβολή της τάσης χρονικά και παρόμοια διαγράμματα θα τα καλούμε απόκριση χρόνου.

Παρόλο που η έννοια του σήματος RF θα αναπτυχθεί στην παράγραφο 2.4, αναφέρουμε ότι σήμα RF είναι εν γένει ένα σήμα AC, και πιο συγκεκριμένα ένα απλό ημίτονο. Χαρακτηρίζεται ως σήμα «Ραδιο-Συχνότητας» (Radio Frequency), όπως αυτό του σχήματος 2(α), για να διαχωριστεί από το σήμα τροφοδοσίας DC του οποίου η περίοδος είναι άπειρη και η συχνότητά του μηδενική.

Το σήμα που μεταφέρει πληροφορία, για παράδειγμα η φωνή μας (αφού μετατραπεί από φυσικό μήνυμα σε ηλεκτρικό με τη βοήθεια ενός αισθητήρα) είναι ένα σήμα RF. Παρόλο που δεν είναι ένα απλό ημίτονο, αλλά ένα τυχαίο σήμα, εμείς για να απλοποιήσουμε την ανάλυση θα το θεωρήσουμε απλό ημίτονο. Στην επόμενη παράγραφο θα αποδείξουμε ότι αυτή η προσέγγιση δεν βλάπτει την ανάλυση.

## 1.2. Ημιτονικό Σήμα και μετασχηματισμός Fourier

Ένα ημιτονικό σήμα (σχήμα 1.2) χαρακτηρίζεται από την ενεργό τιμή του  $U_{\text{εν}}$  και από τη συχνότητά του  $f$ . Για λόγους ομοιογένειας, όταν αναφερόμαστε σε ημιτονικό σήμα συνήθως το αναγράφουμε ως  $(U_{\text{εν}}, f)$ . Για παράδειγμα, το σήμα της Δ.Ε.Η. αναφέρεται ως  $(220\text{V}, 50\text{Hz})$ . Οι σχέσεις που συνδέουν τις δύο προηγούμενες τιμές με το πλάτος του σήματος  $U_0$  και την περίοδο του  $T$ , όπως αυτές εμφανίζονται στο σχήμα 1.2 (α) είναι αντίστοιχα:

$$U_{\text{εν}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (1.1)$$

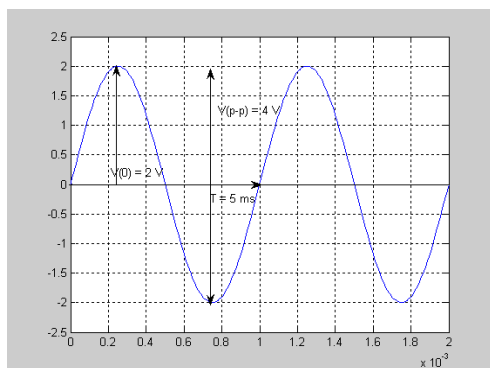
και

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.2)$$

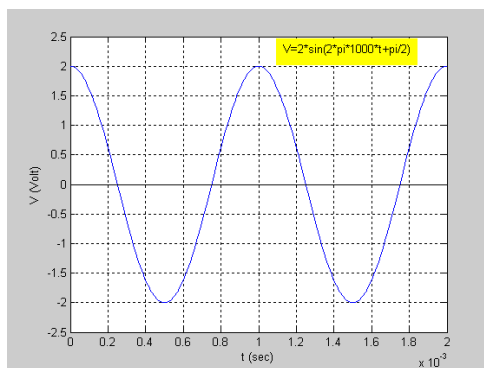
Η τιμή του σήματος (τάσης) από κορυφή σε κορυφή αναφέρεται ως  $U_{\text{p-p}}$  και είναι διπλάσια του πλάτους  $U_0$  για τα ημιτονοειδή σήματα.

Όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια, σπάνια «βλέπουμε» ένα αμιγές ημιτονοειδές σήμα. Συνήθως η απόκριση ενός σήματος στο πεδίο του χρόνου δεν είναι ημιτονοειδής, είναι όπως η απόκριση του σήματος του σχήματος 1.1(β). Ας θυμηθούμε ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier έχει αποδείξει ότι οποιοδήποτε σήμα, περιοδικό ή μη (όπως

αυτό του σχήματος 1β), μπορεί να αναπαρασταθεί τέλεια από ένα άθροισμα πεπερασμένων ημιτονικών σημάτων. Αυτές τις έννοιες θα τις αναπτύξουμε με λεπτομέρεια στο κεφάλαιο της παραμόρφωσης μη-γραμμικότητας. Δεχόμαστε λοιπόν ότι ένα σήμα αποτελείται από ένα ή περισσότερα ημίτονα συγκεκριμένου πλάτους και συχνότητας, τα οποία (επιμέρους ημίτονα) ας τα καλούμε συνιστώσες ή αρμονικές συνιστώσες.

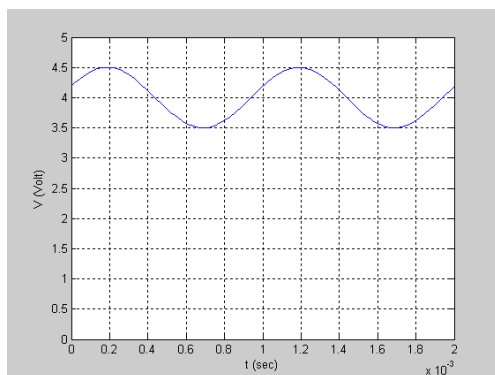


(α)

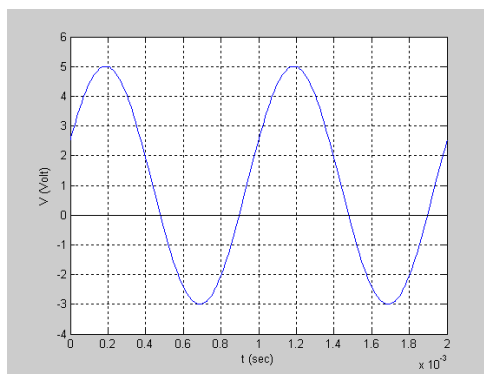


(β)

**Σχήμα 1.2:** (α) Ένα ημιτονικό σήμα (1.4V, 1KHz), (β) Ένα ημιτονικό σήμα με προπόρευση 1/4 της περιόδου, δηλ. ένα συνημίτονο σήμα (1.4V, 1KHz)



(α)



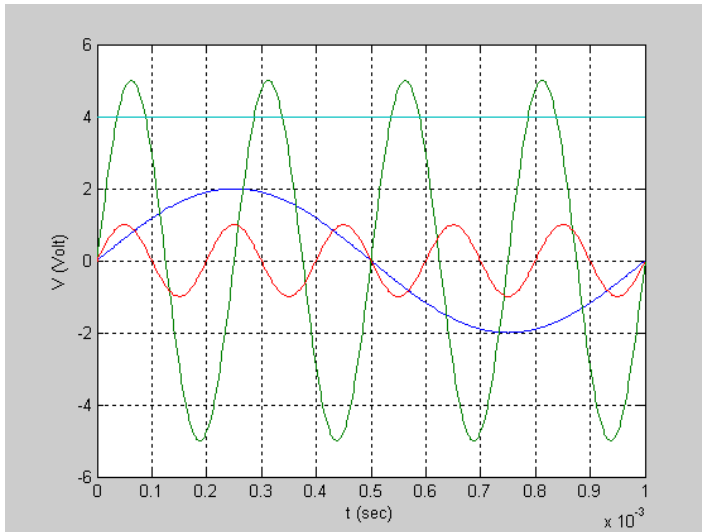
(β)

**Σχήμα 1.3:** (α) Ένα DC σήμα τιμής 4 Volt με AC συνιστώσα (0.35, 1KHz), (β) Ένα AC σήμα (2.8V, 1KHz) με DC συνιστώσα 1 Volt.

Μία παραλλαγή αυτού του φαινομένου είναι η ύπαρξη DC συνιστώσας σε ένα AC σήμα ή η ύπαρξη AC συνιστώσας σε ένα DC σήμα. Δεχόμαστε ότι DC σήμα είναι το σήμα του οποίου το πλάτος δεν αλλάζει ποικιότητα. Προς αποφυγή σύγχυσης παρουσιάζουμε τα σήματα του σχήματος 1.3.

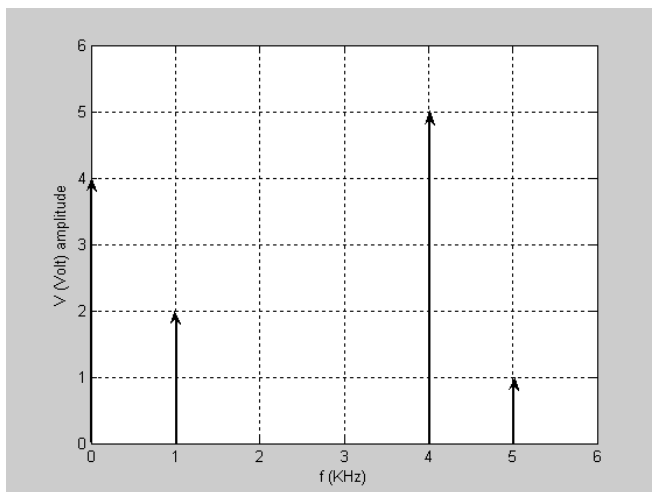
### 1.3. Αποκρίσεις χρόνου και συχνότητας

Στο σχήμα 1.4 παρατηρούμε τέσσερα ημιτονικά σήματα διαφορετικού πλάτους και διαφορετικής περιόδου. Η οπτική διάκριση αυτών των σημάτων είναι εύκολη για ένα σήμα, αλλά γίνεται δύσκολη όταν πρόκειται για πολλά σήματα, όπως άλλωστε φαίνεται και στο σχήμα. Γι' αυτό το λόγο, στις τηλεπικοινωνίες χρησιμοποιούμε μία διαφορετική αναπαράσταση των σημάτων. Την απόκριση συχνότητας. Οι τηλεπικοινωνίες έχουν να κάνουν με τη μετάδοση των σημάτων. Την απόκριση συχνότητας. Το διάγραμμα απόκρισης συχνότητας λοιπόν, δηλαδή το πλάτος ή η ενεργός τιμή του σήματος συναρτήσει της συχνότητας, είναι πολύ εύχρηστο και διαδεδομένο διάγραμμα. Στο παρόν, θα συμβιβαστούμε να χρησιμοποιούμε το πλάτος του σήματος συναρτήσει της συχνότητας.



Σχήμα 1.4: Τέσσερα διαφορετικά σήματα συναρτήσει του χρόνου, (απόκριση χρόνου) στο ίδιο διάγραμμα. Τα σήματα αυτά είναι: Ένα DC τιμής 4 V, και 3 AC ημιτονικά με συχνότητες 1000, 4000 και 5000 Hz και πλάτη 2, 5 και 1 Volt αντίστοιχα. Η σύνθεση αυτών δημιουργεί το σήμα του σχήματος 1.1(β).

Στο διάγραμμα απόκρισης συχνότητας, όπως αυτό του σχήματος 1.5, μπορούμε με επιτυχία να αναπαραστήσουμε πολλά σήματα ή και ομάδες σημάτων. Παραμένει ένα ερώτημα: Το διάγραμμα απόκρισης συχνότητας δίνει ακριβώς την ίδια πληροφορία με το διάγραμμα απόκρισης χρόνου; Η απάντηση είναι όχι, αφού στο διάγραμμα απόκρισης συχνότητας δεν διακρίνεται η διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων (ουσιαστικά δεν γνωρίζουμε ποτέ το σήμα είναι μετατοπισμένο ως προς το χρόνο, π.χ. συνημίτονο – σχήμα 1.2.β). Για παράδειγμα, στο σχήμα 1.4 μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των τριών σημάτων είναι μηδενική, κάτι που δεν αναγνωρίζεται στο σχήμα 1.5. Αυτό το «ελάττωμα» όμως, είναι μικρής σημασίας.



Σχήμα 1.5: Διάγραμμα απόκρισης συχνότητας για τα σήματα του σχήματος 1.4.

Ο παλμογράφος, ως γνωστόν μας δίνει μια αναπαράσταση της απόκρισης ενός σήματος ως προς το χρόνο. Ένας κοινός παλμογράφος, διαθέτοντας δύο κανάλια μπορεί να αποδώσει τη συμπεριφορά δύο σημάτων ως προς το χρόνο. Το όργανο που μας δίνει την αναπαράσταση απόκρισης συχνότητας λέγεται αναλυτής φάσματος (network analyzer) και ως είσοδο έχει μια κεραία η οποία λαμβάνει σήματα.

	ΕΡΑΣΙΤΕΧΝΙΚΗ ΔΟΥΡΥΦΟΡΙΚΗ		Μικροκυματική Εφαρμογές ραδιοερασιτέγνη μέσω δορυφόρου	
21 450-21 850	ΕΥΡΥΕΚΠΟΜΠΗ		Ραδιοφωνία	
21 850-21 870	ΣΤΑΘΕΡΗ		Στρατιωτικές εφαρμογές	
21 870-21 924	ΣΤΑΘΕΡΗ 5.155B		Στρατιωτικές εφαρμογές	
21 924-22 000	ΑΕΡΟΝΑΥΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΗ (R)	ΥΠΔ	Αεροναυτικές επικοινωνίες	Σχέδιο απονομής Προσαρτημάτων 27
22 000-22 855	ΝΑΥΤΙΛΙΑΚΗ ΚΙΝΗΤΗ 5.132		Ναυτιλιακές εφαρμογές Κλήση DSC MSI	Σχέδια διευκόλυνσης Προσαρτημάτων 17 και 25 22374,5, 22375, 22375,5 22444, 22444,5, 22445 kHz 22376 kHz
22 855-23 000	ΣΤΑΘΕΡΗ		Στρατιωτικές εφαρμογές	
23 000-23 200	ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΙΝΗΤΗ εκτός αεροναυτικής κινητής (R)		Στρατιωτικές εφαρμογές	
23 200-23 350	ΣΤΑΘΕΡΗ 5.156A ΑΕΡΟΝΑΥΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΗ (OR)	Ε.Δ.	Στρατιωτικές εφαρμογές	

5.155B Η ζώνη 21870-21924 kHz χρησιμοποιείται από την σταθερή υπηρεσία για την παροχή υπηρεσιών που σχετίζονται με την ασφάλεια πτήσεων των αεροσκαφών.

Σχήμα 1.6: Παράδειγμα κατανομής ζώνης συχνοτήτων από τον Εθνικό Κανονισμό. Διακρίνεται η κλήση Digital Selective Calling (DSC) η οποία είναι προδιαγραφη εκπομπής προκαθορισμένων μηνυμάτων μέσω MF, HF και VHF ναυτιλιακών συστημάτων και μέρος του GMDSS (Global Maritime Distress Safety System).

## 1.4. Φάσμα συχνοτήτων

**Μ**ε τον όρο φάσμα συχνοτήτων εννοούμε το πλήθος των συχνοτήτων που τυγχάνουν τηλεπικοινωνιακών εφαρμογών, από το DC μέχρι και πέραν του ορατού φωτός.

Ο Εθνικός Κανονισμός Κατανομής Ζωνών Συχνοτήτων περιέχει τις διατάξεις κατανομής που εφαρμόζονται σε μόνιμες εκχωρήσεις, σε περίοδο ειρήνης, στην Ελληνική Επιρράτεια για τη χρήση του φάσματος ραδιοσυχνοτήτων από 9 kHz μέχρι 1000 GHz. Περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στην Εφημερίδα της Κυβερνήσεως, Αρ. Φύλλου 399, 3 Απριλίου 2006 (σχήμα 1.6).

Στους πίνακες που ακολουθούν, μπορούμε να παρατηρήσουμε μερικές γνωστές κατανομές του φάσματος.

Σημειώνουμε τη σχέση μεταξύ του μήκους κύματος και της συχνότητας (στο κενό)

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (1.3)$$

όπου  $\lambda$  το μήκος κύματος της ακτινοβολίας σε μέτρα,  $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  η ταχύτητα του φωτός στο κενό και  $f$  η συχνότητα του ακτινοβολούμενου κύματος.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα όμως δεν διαδίδονται πάντα σε κενό περιβάλλοντα χώρο. Στην περίπτωση διαφορετικού μέσου από το κενό, η γενική σχέση που συνδέει το μήκος κύματος της ακτινοβολίας με τη συχνότητά της είναι

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad (1.4)$$

Όπου  $v$  η ταχύτητα του ΗΜ κύματος στο μέσο, που εξαρτάται από τη μαγνητική διαπερατότητα του μέσου,  $\mu$  και από τη διηλεκτρικής ταθερά του μέσου,  $\epsilon$ .

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \quad (1.5)$$

Για το κενό ισχύει

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} \quad (1.6)$$

όπου  $\mu_0=400\pi \text{ nH/m}$ ,  $\epsilon_0=8,84 \text{ pF/m}$  και  $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$



**Αναλογικά Κυκλώματα Τηλεπικοινωνιών**

Όνομασία Ζώνης	Συμβολισμός	Παραδείγματα Χρήσης	Συχνότητα και Μήκος Κύματος
Tremendously low frequency	TLF	Φυσικός και Τεχνητός ΗΜ θόρυβος	<3Hz και >100000km
Extremely Low Frequency	ELF	Επικοινωνία με υποβρύχια	3-30Hz και 10000–100000km
Super Low Frequency	SLF	Επικοινωνία με υποβρύχια	30-300Hz και 1000km-10000km
Ultra Low Frequency	ULF	Επικοινωνία Υποβρυχίων και επικοινωνία μέσα σε ορυχεία	300-3000Hz και 10km-1000km
Very Low Frequency	VLF	Ναυτιλία, Γεοφυσική, Ασύρματα συστήματα παρακολούθησης καρδιάς	3-30kHz και 10-100km
Low Frequency	LF	Ναυτιλία, ΑΜ εκπομπή, Ερασιτεχνικό Ράδιο	30-300kHz και 1-10km
Medium Frequency	MF	ΑΜ, Ραδιοερασιτέχνες, Φάροι	300-3000kHz και 100m-1km
High Frequency	HF	Αεροπορικές επικοινωνίες και ραντάρ πέραν του οριζοντα, RFID, Ναυτική και κινητή ραδιοτηλεφωνία	3-30MHz και 10m-100m
Very High Frequency	VHF	ΦΜ, Τηλεόραση, Αεροπορικές επικοινωνίες LOS, Ναυτιλιακή Κινητή Επικοινωνία	30-300MHz και -10m
Ultra High Frequency	UHF	Τηλεόραση, Μικροκυματικοί φούρνοι, Ραδιοαστρονομία, κινητή τηλεφωνία, ασύρματα LAN	300-3000MHz και 100mm-1m
Super High Frequency	SHF	Ραδιοαστρονομία, Μικροκυματικές επικοινωνίες και συστήματα, ασύρματα LAN, ραντάρ, επικοινωνιακοί δορυφόροι, ραδιοερασιτέχνες	3-30GHz και 10-100mm
Extremely High Frequency	EHF		30-300GHz και 1-10mm
Terahertz	THF	Ιατρική απεικόνιση, μοριακή φυσική, απομακρυσμένοι αισθητήρες, ραδιοερασιτέχνες	300-3000GHz και 100μm-1nm

Η κατανομή των 9 ζωνών συχνοτήτων σύμφωνα με τον ITU (International Telecommunication Union) φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί. Ο κάθε αριθμός ζώνης (4 έως 12) προκύπτει ως δεκαδικός λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου μεταξύ του πάνω και του κάτω ορίου της ζώνης σε hertz.

Συχνότητα	Συμβολισμός	Ονομασία	Μήκος Κύματος	No
3-30KHz	VLF	Very Low Frequency	10 - 100 km	4
30-300KHz	LF ή LW	Low Frequency ή Long Waves	1 - 10 km	5
300KHz-3MHz	MF ή MW	Medium Frequency ή Medium Waves	100 m – 1 km	6
3-30MHz	HF ή SW	High Frequency ή Short Waves	10 – 100 m	7
30-300MHz	VHF	Very High Frequency	1 – 10 m	8
300MHz-3GHz	UHF	Ultra High Frequency	10 – 100 cm	9
3-30GHz	SHF	Super High Frequency	1 – 10 cm	10
30-300GHz	EHF	Extreme High Frequency	1 – 10 mm	11
300-3000GHz	THF	Tremendously High Frequency	100μm-1mm	12

Στον ακόλουθο πίνακα διακρίνεται μια πιο περιορισμένη έκδοση της κατανομής συχνοτήτων για την περιοχή των GHz. Για παράδειγμα, αναφέρουμε ότι στους νέους κανονισμούς SOLAS/IEC (Safety Of Life At Sea / International Electrotechnical Commission), οι ελάχιστες απαιτήσεις σε ραντάρ ναυτιλίας για πλοία άνω των 10000 GT, είναι δύο ραντάρ ARPA στην S ή στην X ζώνη.

Ονομασία Ζώνης	Περιοχή Ζώνης σε GHz
L	1-2
S	2-4
C	4-8
X	8-12
Ku	12-18
K	18-27
Ka	27-40

### 1.5. Μιγαδικοί αριθμοί

Υπενθυμίζουμε ότι η καλύτερη αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού είναι στο μιγαδικό επίπεδο. Στο σχήμα 1.7 παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα

Ένας μιγαδικός αριθμός σε καρτεσιανή μορφή γράφεται ως  $z=a+jb$ . Ο ίδιος αριθμός, σε πολική μορφή γράφεται

$$z = |z| \cdot e^{-j\varphi} \tag{1.7}$$

όπου

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.8}$$

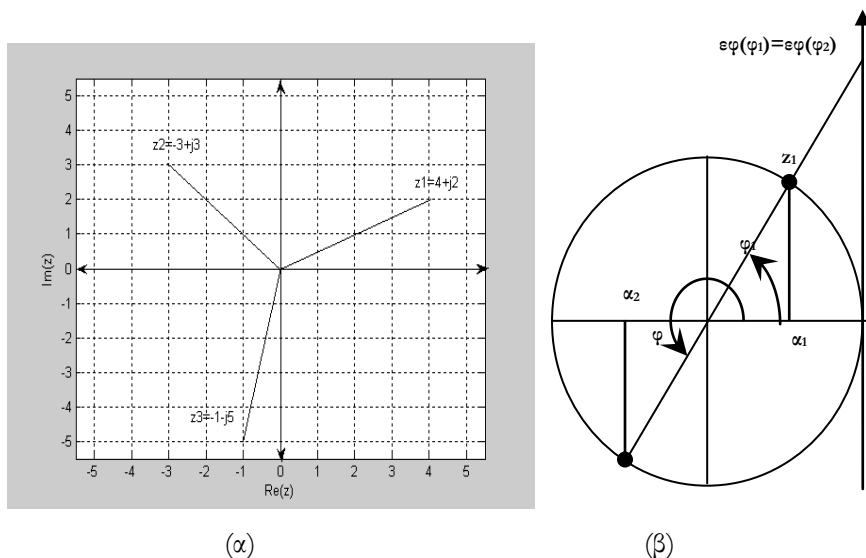
είναι το μέτρο του αριθμού (η απόστασή του από την αρχή των αξόνων) και

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad (1.9)$$

είναι η φάση του αριθμού (η γωνία που σχηματίζει με τον ημιάξονα των θετικών πραγματικών αριθμών. ΠΡΟΣΟΧΗ: Η σχέση 1.6 δίνει τη μισή πληροφορία. Για να βρούμε αν η φάση  $\varphi$  βρίσκεται στο 1ο ή στο 3ο τεταρτημόριο (θετική εφαπτομένη) πρέπει να ελέγξουμε το πρόσημο του  $a$ : Αν  $a > 0$  τότε η  $\varphi$  βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Αν  $a < 0$  τότε η  $\varphi$  βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο (σχήμα 1.7β).

Στο παράδειγμα του σχήματος 1.7, οι πολικές μορφές των μιγαδικών αριθμών είναι:

$$z_1 = 2\sqrt{5} \cdot e^{j26,6^\circ} \quad z_2 = 3\sqrt{2} \cdot e^{j135^\circ} \quad \text{και} \quad z_3 = \sqrt{26} \cdot e^{j258^\circ}.$$



Σχήμα 1.7: (α) Αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών (β) Εφαπτομένη γωνίας

Το αποτέλεσμα της διαίρεσης δύο μιγαδικών αριθμών ( $z_3/z_2$ ) είναι ένας μιγαδικός αριθμός ( $z_4$ ) του οποίου το μέτρο είναι το πηλίκο των μέτρων τους και η φάση του η διαφορά των φάσεων των δύο αριθμών,

$$z_4 = \frac{z_3}{z_2} = \frac{-1 - j \cdot 5}{-3 - j \cdot 3} = \frac{\sqrt{26} \cdot e^{j \cdot 258^\circ}}{\sqrt{18} \cdot e^{j \cdot 135^\circ}} = \sqrt{\frac{13}{9}} \cdot e^{j(258^\circ - 135^\circ)} = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot e^{j \cdot 123^\circ}$$

Τέλος, συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος και αντίθετο φανταστικό. Έστω οι αριθμοί  $z_1$  και  $z_2$  είναι συζυγείς. Τότε

$$z_1 = z_2^* \Rightarrow a_1 + jb_1 = (a_2 + jb_2)^* \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = -b_2 \end{cases} \quad \eta \quad z_1 = z_2^* \Rightarrow a_1 + jb_1 = a_2 - jb_2$$

## 1.6. Διαιρέτης Τάσης και Διαιρέτης Ρεύματος

Έστω το κύκλωμα του σχήματος 1.8, όπου δύο αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Προφανώς, οι αντιστάσεις διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα.

Σύμφωνα με το νόμο του Ohm:

$$\left. \begin{array}{l} U_{OUT} = I \cdot R_2 \\ U_{IN} = I \cdot (R_1 + R_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.10)$$

Ο λόγος  $U_{OUT}/U_{IN}$  ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς ενός κυκλώματος αφού δείχνει την έξοδο συναρτήσει της εισόδου.

Στη γενικότερη περίπτωση που στη θέση της αντίστασης  $R_1$  τοποθετήσουμε σύνθετη αντίσταση  $Z_1$  και στη θέση της  $R_2$  σύνθετη αντίσταση  $Z_2$  τότε η σχέση (1.7) γίνεται:

$$\frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (1.11)$$

Επαναλαμβάνουμε ότι η εφαρμογή της εξίσωσης (1.8) στο διαιρέτη τάσης προϋποθέτει ότι οι δύο σύνθετες αντιστάσεις  $Z_1$  και  $Z_2$  διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα.

Έστω τώρα ότι έχουμε δύο αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα όπως φαίνεται στο σχήμα 1.9. Σύμφωνα με το νόμο του Ohm ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = \frac{U}{R_1} \\ I_{ολ} = \frac{U}{R_{ολ}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{I_1}{I_{ολ}} = \frac{R_{ολ}}{R_1} \quad \text{και} \quad \left. \begin{array}{l} I_2 = \frac{U}{R_2} \\ I_{ολ} = \frac{U}{R_{ολ}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{I_2}{I_{ολ}} = \frac{R_{ολ}}{R_2} \quad (1.12)$$

Από το νόμο του Kirchhoff γνωρίζουμε ότι η ολική σύνθετη αντίσταση του παράλληλου συνδυασμού των δύο αντιστάσεων είναι

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{ολ} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.13)$$

ή

$$Y_{ολ} = Y_1 + Y_2 \quad (1.14)$$

όπου  $Y$  η αγωγιμότητα  $Y=1/R$

Οι σχέσεις (1.9) με τη βοήθεια της (1.10) γίνονται:

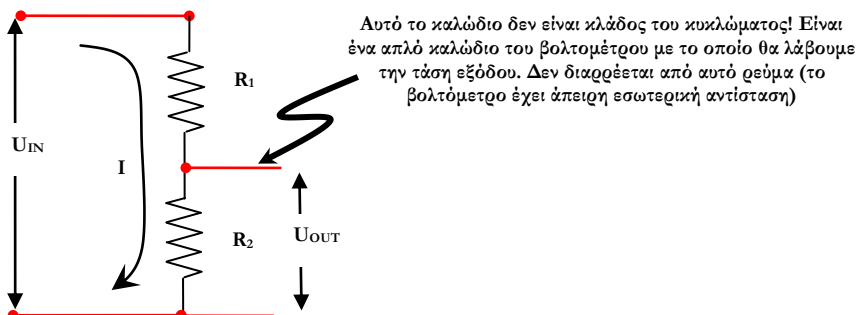
$$\frac{I_1}{I_{ολ}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{και} \quad \frac{I_2}{I_{ολ}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1.15)$$

ενώ με τη βοήθεια της (1.11), γίνονται

$$\frac{I_1}{I_{ολ}} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \quad \text{και} \quad \frac{I_2}{I_{ολ}} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} \quad (1.16)$$

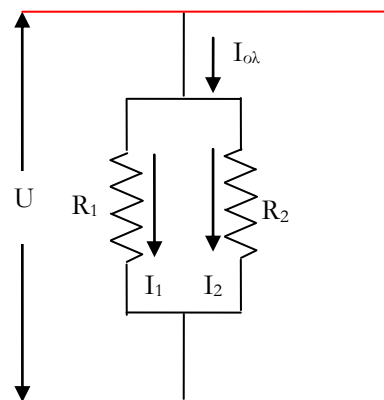
Στη γενικότερη περίπτωση που στη θέση της αντίστασης  $R_1$  τοποθετήσουμε σύνθετη αντίσταση  $Z_1$  και στη θέση της  $R_2$  σύνθετη αντίσταση  $Z_2$  τότε η σχέση (1.7) γίνεται:

$$\frac{I_1}{I_{ολ}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \quad (1.17)$$



Σχήμα 1.8: Ο απλός διαιρέτης τάσης

Σημειώνουμε ότι η εφαρμογή της εξίσωσης (1.12) στο διαιρέτη ρεύματος προϋποθέτει ότι στις δύο σύνθετες αντιστάσεις  $Z_1$  και  $Z_2$  εφαρμόζεται το ίδιο δυναμικό.



Σχήμα 1.9: Ο απλός διαιρέτης ρεύματος



## Ορισμοί και Νόμοι Τηλεπικοινωνιών

### 2.1. Σύνθετη αντίσταση στοιχείου

Ας θυμηθούμε το νόμο του Ohm: Το ρεύμα που διαρρέει μία αντίσταση είναι ανάλογο της τάσης που εφαρμόζεται στα άκρα της και αντιστρόφως ανάλογο της τιμής του αντιστάτη. Δηλαδή

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.1)$$

Από τα στοιχεία ηλεκτρονικής, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πυκνωτές και τα πηνία. Είναι γνωστή η σχέση που συνδέει το ρεύμα με την τάση ενός **πυκνωτή**:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.2)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace μετασχηματίζει το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας.

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

όπου η μεταβλητή  $s$  είναι ένας μιγαδικός αριθμός  $s = \sigma + j\omega$ . Μία από τις ιδιότητες του μονόδρομου μετασχηματισμού Laplace είναι

f(t) Πεδίο Χρόνου	F(s) Πεδίο Συχνότητας
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace στη σχέση (2.2), προκύπτει

$$I(s) = sCV(s) - CV_0 \Rightarrow V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{s}$$

όπου  $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ ,  $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$  και  $V_0 = v(t)/t=0$ . Ο ορισμός της σύνθετης αντίστασης είναι ο λόγος τάσης προς ρεύμα διατηρώντας την αρχική κατάσταση στο μηδέν  $V_0=0$

$$Z(s) = \frac{1}{C \cdot s} \tag{2.3}$$

Ο μοναδικός ορισμός που δώσαμε είναι:

$$\frac{dx}{dt} \equiv xs \text{ και } \int x = \frac{1}{s}x \tag{2.4}$$

όπου ο τελεστής  $s$  είναι ένας φανταστικός αριθμός που εμπεριέχει τη συχνότητα

$$s = j\omega = j \cdot 2\pi \cdot f \tag{2.5}$$

Η σχέση (2.3) μας οδηγεί σε σημαντικά συμπεράσματα αν τη συγκρίνουμε με τον κλασσικό νόμο του Ohm. Ο πυκνωτής αποτελείται από αντίσταση τιμής

$$\frac{U}{I} = \frac{1}{s \cdot C} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \tag{2.6}$$

Όμως, έχει καθιερωθεί η έννοια της αντίστασης να αναφέρεται σε πραγματικά μεγέθη. Ορίζουμε λοιπόν τη σύνθετη αντίσταση ως ένα μιγαδικό αριθμό

$$Z = R + jX \tag{2.7}$$

και καλούμε το  $R$  πραγματική αντίσταση και το  $X$  χωρητική ή άεργη αντίσταση. Επομένως, ο πυκνωτής έχει σύνθετη αντίσταση

$$Z_C = \frac{1}{sC} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \tag{2.8}$$

Η σχέση (2.8) «λέει» ότι σε πολύ χαμηλές συχνότητες  $f \rightarrow 0$  ο πυκνωτής έχει άπειρη αντίσταση, δηλαδή δεν επιτρέπει τη ροή του ρεύματος. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι ο πυκνωτής δεν επιτρέπει τη διέλευση του DC, ενώ επιτρέπει τη διέλευση του AC. Δηλαδή σε πολύ υψηλές συχνότητες η «αντίσταση» του είναι μηδενική! Ας παρατηρήσουμε τέλος ότι η σύνθετη αντίσταση ενός πυκνωτή έχει αρνητικό φανταστικό μέρος.

Με παρόμοιο τρόπο, προκύπτει η σύνθετη αντίσταση ενός **πηγνίου**:



$$U = L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow U = L \cdot s \cdot I \Rightarrow Z_L = s \cdot L \Rightarrow Z_L = j \cdot \omega \cdot L \quad (2.9)$$

Η σύνθετη αντίσταση ενός πηνίου έχει θετικό φανταστικό μέρος και είναι μηδενική για μηδενικές συχνότητες και άπειρη για υψηλές συχνότητες. Δηλαδή το πηνίο «αντιστέκεται» δυναμικά στη διέλευση σημάτων πολύ υψηλών συχνοτήτων.

**Παράδειγμα 2.1:** Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση ενός πυκνωτή 10 nF σε σειρά με μία αντίσταση 10 Ω, για τις ακόλουθες δύο συχνότητες: 10 KHz και 10 GHz.

Λύση:  $Z_1 = R - j \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot C} = 10 - j \cdot \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-8}} = 10 - j \cdot 159 \Omega$

$Z_2 = R - j \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot C} = 10 - j \cdot \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-8}} = 10 - j \cdot 1.6 \cdot 10^{-4} \Omega$ . Δηλαδή,

το μέτρο της σύνθετης αντίστασης στην πρώτη περίπτωση είναι

$|Z_1| = \sqrt{10^2 + 159^2} \approx 160 \Omega$  ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι μόνο

$|Z_2| = \sqrt{10^2 + 1.59^2 \cdot 10^{-8}} \approx 10 \Omega$

Ο πυκνωτής αυτός είναι «άχρηστος» για τη συχνότητα των 10 GHz!

## 2.2. Ο «νόμος» της μισής ισχύος

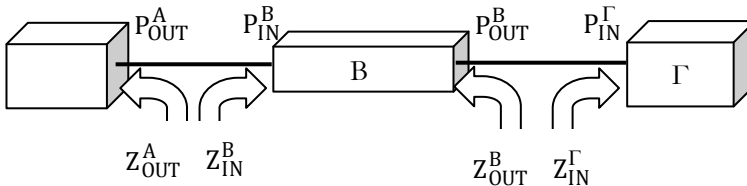
**Σ**τις τηλεπικοινωνίες υπάρχουν νόμοι. Κάποιοι από αυτούς αναφέρονται στην κατανομή του φάσματος συχνοτήτων, όπως τους περιγράψαμε στο κεφάλαιο 1, ενώ κάποιοι άλλοι στην ποιότητα και την αξιοπιστία των τηλεπικοινωνιών. Όταν ένα σήμα εκπέμπεται, εκπέμπεται με κάποια συγκεκριμένη ισχύ και λογικό είναι να χρησιμοποιούμε την ελάχιστη δυνατή (επιτρεπτά όρια για την ανθρώπινη υγεία). Ας υποθέσουμε ισχύ εκπομπής 10 mW. Θεωρούμε ότι η λήψη του σήματος είναι ικανοποιητική στο δέκτη όταν δεν έχει χαθεί πάνω από τη μισή ισχύ. Δηλαδή, ένας δέκτης που έχει λάβει το προηγούμενο σήμα με ισχύ 4 mW, θεωρείται ότι δεν το έλαβε, ενώ για έναν δέκτη ο οποίος έλαβε το σήμα με ισχύ 6 mW, λέμε ότι η λήψη είναι ικανοποιητική.

## 2.3. Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος (MMI)

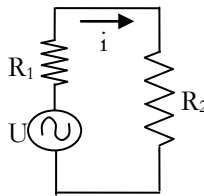
**Τ**ο θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος αποδεικνύει ότι για να μεταδοθεί ένα σήμα από ένα σύστημα Α σε ένα σύστημα Β (σχήμα 2.1) χωρίς να χαθεί ισχύς, θα πρέπει οι σύνθετες αντιστάσεις τερματισμού (εξόδου για το σύστημα Α και

εισόδου για το σύστημα B) να είναι συζυγείς. Δηλαδή

$$Z_{OUT}^A = Z_{IN}^B \Rightarrow R_{OUT}^A + j \cdot X_{OUT}^A = R_{IN}^B - j \cdot X_{IN}^B \Rightarrow \begin{cases} R_{OUT}^A = R_{IN}^B \\ X_{OUT}^A = -X_{IN}^B \end{cases} \quad (2.10)$$



Σχήμα 2.1: Ένα ηλεκτρονικό σύστημα που αποτελείται από τρία υποσυστήματα.



Σχήμα 2.2. Η πηγή U με εσωτερική αντίσταση R<sub>1</sub> τροφοδοτεί το φορτίο R<sub>2</sub>.

Στην ειδική περίπτωση όπου οι σύνθετες αντιστάσεις είναι μόνο πραγματικές, το θεώρημα γίνεται: **Για μέγιστη μεταφορά ισχύος οι αντιστάσεις πρέπει να είναι ίσες.**

Το θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος έχει αποδειχθεί στα πλαίσια παρελθόντος μαθήματος, οπότε γίνεται μία σύντομη αναφορά στην απόδειξη του θεωρήματος για την DC ισχύ: Θεωρούμε μία πηγή με εσωτερική αντίσταση R<sub>1</sub>. Η ισχύς που μεταφέρεται από την πηγή σε μία εξωτερική αντίσταση R<sub>2</sub> (σχήμα 2.2), είναι

$$P_{R_2} = I^2 \cdot R_2 = \frac{U^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_2$$

Η ισχύς αυτή γίνεται μέγιστη όταν η πρώτη παράγωγος ως προς R<sub>2</sub> μηδενιστεί.

$$\frac{dP}{dR_2} = 0 \Rightarrow \frac{U^2 \cdot \left[ (R_1 + R_2)^2 - 2 \cdot (R_1 + R_2) \cdot R_2 \right]}{(R_1 + R_2)^4} = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 - 2R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = R_2$$

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να μεταφέρουμε ένα σήμα από έναν ενισχυτή σε ένα ηχείο. Στο σχήμα 2.1, ως παίξει το ρόλο του ενισχυτή το σύστημα A, το ρόλο του καλωδίου το σύστημα B και το ρόλο του ηχείου το σύστημα Γ. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα καλώδιο του οποίου οι σύνθετες αντιστάσεις εισόδου και εξόδου θα πρέπει να

«ταιριάζουν» με τις σύνθετες αντιστάσεις εξόδου του ενισχυτή και εισόδου του ηχείου αντίστοιχα, ώστε να υπάρχει μέγιστη μεταφορά ισχύος.

Δεδομένων των διεθνών προτύπων, υπάρχουν κανόνες οι οποίοι υποχρεώνουν τον κατασκευαστή του ενισχυτή να τερματίσει το σύστημά του σε μία συγκεκριμένη πραγματική αντίσταση (π.χ. 75 Ω). Τα ίδια πρότυπα υποχρεώνουν τον κατασκευαστή του ηχείου να τερματίσει το ηχείο ως προς την εισοδό του στην ίδια συγκεκριμένη σύνθετη αντίσταση. Επομένως, και ο κατασκευαστής του καλωδίου προφανώς έχει συμμορφωθεί στα διεθνή πρότυπα, ούτως ώστε εμείς να μην είμαστε υποχρεωμένοι να αναζητήσουμε αυτές τις σύνθετες αντιστάσεις στα κουτιά του ενισχυτή ή/και του ηχείου. Αλλά, προμηθευόμαστε ένα καλώδιο για ακουστικό ενισχυτή.

**Παράδειγμα 2.2:** Έστω σύστημα Α το οποίο έχει τερματική αντίσταση  $Z_A = 500 - j \cdot 6.28 \cdot 10^{-3}$  για συχνότητα  $f = 1\text{KHz}$ , το οποίο συνδέεται σε σειρά με ένα σύστημα Β. Να βρεθούν τα στοιχεία που αποτελούν τη σύνθετη αντίσταση τερματισμού εισόδου του συστήματος Β έτσι ώστε να μην χάνεται ισχύς κατά τη μεταφορά από το σύστημα Α στο σύστημα Β.

**Λύση:** Η σύνθετη αντίσταση εισόδου του συστήματος Β πρέπει να είναι  $Z_B = 500 + j \cdot 6.28 \cdot 10^{-3}$ . Επομένως, αποτελείται από έναν αντιστάτη τιμής 500 Ω και ένα πηνίο σε σειρά (λόγω του θετικού προσήμου). Το πηνίο θα έχει εμπέδηση  $X = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 6.28 \cdot 10^{-3}$ . Για τη συχνότητα 1KHz, η τιμή της αυτεπαγωγής προκύπτει να είναι  $L = \frac{6.28 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3.14 \cdot 10^3} = 1\mu\text{F}$

## 2.4. Κρίσιμη συχνότητα αποκοπής

Ως κρίσιμη συχνότητα αποκοπής ορίζουμε τη συχνότητα όπου το σήμα χάνει τη μισή του ισχύ.

Συγκεκριμένα, για το κύκλωμα Β του σχήματος 2.1, κρίσιμη συχνότητα αποκοπής είναι η συχνότητα όπου  $P_{\text{OUT}}^B = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{IN}}^B$

Γενικότερα,

$$\frac{P_{OUT}}{P_{IN}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{U_{OUT}^2}{Z_{OUT}}}{\frac{U_{IN}^2}{Z_{IN}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left( \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.11)$$

όπου θεωρήσαμε ότι  $Z_{IN}=Z_{OUT}$ , βασιζόμενοι στο γεγονός ότι οι σύνθετες αντιστάσεις εισόδου και εξόδου είναι πραγματικές και το θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος είναι σε ισχύ. Μαθηματικά αποδείχθηκε ότι **κρίσιμη συχνότητα αποκοπής είναι η συχνότητα όπου η τάση του σήματος εξόδου είναι το 70,7% της τάσης του σήματος εισόδου.**

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε το θέμα της κρίσιμης συχνότητας αποκοπής αναφέρουμε έναν τρίτο ορισμό: **Κρίσιμη συχνότητα αποκοπής είναι η συχνότητα όπου το σήμα χάνει 3 dB.** Ο ορισμός αυτός θα γίνει κατανοητός στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

## 2.5. Ορισμος deciBel

**T**ο deciBel (dB) είναι σχετική μονάδα μέτρησης πολύ μεγάλων ή πολύ μικρών μεγεθών συγκριτικά με ένα μέγεθος αναφοράς ή ακόμα και μεταξύ τους.

Για παράδειγμα, ας πάρουμε την ένταση του ήχου. Αν δεχτούμε ότι η ένταση η οποία προκαλεί πόνο στο αυτί είναι της τάξης του  $1W/m^2$ , ενώ η ελάχιστη ένταση που μπορεί να αναγνωρίσει το ανθρώπινο αυτί είναι  $1pW/m^2$ , μπορούμε να θεωρήσουμε ως τιμή αναφοράς την ελάχιστη τιμή. Τότε, για να περιγράψουμε την τιμή όπου το αυτί νοιώθει πόνο, θα πρέπει να πούμε ότι είναι  $10^{12}$  φορές μεγαλύτερη! Επίσης, για να περιγράψουμε ενδιαμέσες τιμές (ψιθύρο, ομιλία, κρότο, κλπ) θα πρέπει να μιλάμε με όρους  $10$ πλάσιου,  $10^5$  φορές μεγαλύτερου ή  $10^{10}$  φορές μεγαλύτερου.

Ένας άλλος τρόπος είναι να λογαριθμήσουμε το πηλίκο (την τιμή που μας ενδιαφέρει σε σχέση με την τιμή αναφοράς), οπότε ορίζουμε το bel. Δηλαδή θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ένταση του ψιθύρου είναι 1bel ( $\log_{10}=1$ ), η ένταση της συνήθους ομιλίας είναι 5 bel ( $\log_{10}^5=5$ ), η ένταση ενός δυνατού κρότου είναι 10 bel ( $\log_{10}^{12}=10$ ), ενώ το αυτί νοιώθει πόνο σε ένταση 12 bel ( $\log_{10}^{12}=12$ ). Ένας άλλος τρόπος είναι να πολλαπλασιάσουμε με δέκα (deci) το προηγούμενο αποτέλεσμα και έτσι ορίζουμε το decibel. Δηλαδή το deciBel είναι το δεκαπλάσιο του bel. Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι το αυτί νοιώθει πόνο σε ένταση 120 dB. Προφανώς, η ελάχιστη ένταση του  $1pW/m^2$  αντιστοιχεί σε 0 dB.

Στην ηλεκτρονική, ο όρος dB συνηθίζεται να χρησιμοποιείται ως σχετική μονάδα μέτρησης ισχύος, τάσης ή έντασης ρεύματος. Η ισχύς  $P$  εκφράζεται σε dB με τη βοήθεια της σχέσης:

$$L(dB) = 10 \cdot \log \frac{P}{P_0} \quad (2.12)$$

όπου  $P_0$  είναι είναι μια συγκεκριμένη ισχύς αναφοράς. Δεδομένων των σχέσεων που συνδέουν την ισχύ με την ένταση του ρεύματος και την τάση

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \quad (2.13)$$

η σχέση (2.12) γίνεται

$$L(dB) = 10 \cdot \log \frac{P}{P_0} = 10 \cdot \log \frac{\frac{U^2}{R}}{\frac{U_0^2}{R_0}} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{θεώρημα MMI (R=R_0)}} = 10 \cdot \log \left( \frac{U}{U_0} \right)^2 = 20 \cdot \log \frac{U}{U_0} \quad (2.14)$$

και

$$L(dB) = 20 \cdot \log \frac{I}{I_0} \quad (2.15)$$

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα: 30 dB είναι χιλιαπλασιασμός ισχύος, 60 dB χιλιαπλασιασμός τάσης, -40 dB είναι υποεκατονταπλασιασμός τάσης, 0dB είναι μηδενικό κέρδος (μοναδιαίος λόγος και επομένως, ό,τι σήμα εισέρχεται, το ίδιο σήμα εξέρχεται).

Άλλες μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούνται στην ηλεκτρονική και στις τηλεπικοινωνίες είναι το dBm και το dBW για τους λόγους που θα φανούν στο ακόλουθο παράδειγμα.

Ο ορισμός για το dBm είναι

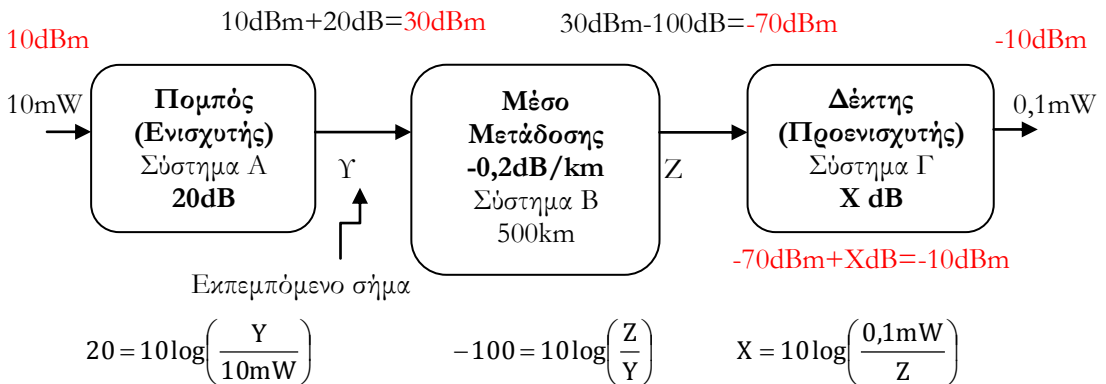
$$P(dBm) = 10 \cdot \log \frac{P(mW)}{1mW} \quad (2.16)$$

και για το dBW είναι

$$P(dBW) = 10 \cdot \log \frac{P(W)}{1W} \quad (2.17)$$

**Παράδειγμα 2.3:** Ένας πομπός εκπέμπει σήμα 10mW αφού το ενισχύσει με τη βοήθεια ενός ενισχυτή (σύστημα Α) κατά 20dB. Αν οι απώλειες του μέσου διάδοσης (σύστημα Β) είναι 0.2dB/Km και μεταδίδουμε το σήμα σε απόσταση 500 Km, να βρεθεί το κέρδος που πρέπει να έχει ο προενισχυτής στο δέκτη (σύστημα Γ) ώστε το λαμβανόμενο σήμα να έχει ισχύ τουλάχιστον 0.1 mW

**Λύση Α:** Το μέσο μετάδοσης (σύστημα Β) έχει συνολικές απώλειες 100 dB (0,2\*500). Το αρχικό σήμα έχει ισχύ 10 mW και με την ενίσχυση του συστήματος Α (100πλασιασμός) το εκπεμπόμενο σήμα έχει ισχύ  $Y=1W$  διότι  $20 = 10\log\left(\frac{Y}{10mW}\right)$  (ή  $30dBm = 10\log\left(\frac{1000mW}{1mW}\right)$ ). Το 1W γίνεται  $100dB = 10^{10}$  φορές μικρότερο, δηλαδή  $0,1nW$ , όταν φτάνει στο δέκτη:  $-100 = 10\log\left(\frac{Z}{1000mW}\right)$ . Αυτό το σήμα εισέρχεται στο σύστημα Γ στο οποίο ενισχύεται και πρέπει η ισχύς στην έξοδο του Γ να είναι πάνω από 0.1 mW. Επομένως, ο ενισχυτής Γ θα πρέπει να έχει κέρδος τουλάχιστον  $X = 10\log\left(\frac{0,1mW}{0,1nW}\right) = 60 dB$ .



**Λύση Β:** Παρατηρούμε τα dBm και τα dB προστίθενται και αφαιρούνται. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να μετατρέψουμε τα 10mW και τα 0,1mW σε dBm που είναι αντίστοιχα 10dBm για το αρχικό σήμα και -10dBm για το λαμβανόμενο.

$10dBm + 20dB - 100dB + X = -10dBm$ . Επομένως  $X = 60dB$ .

**Παράδειγμα 2.4:** Να συμπληρωθεί ο ακόλουθος πίνακας

Δεδομένο	Ζητούμενο
$\log 10^5 =$	5
$\log \left( \frac{10^5 \text{ mW}}{10^{-2} \text{ mW}} \right) =$	7
$86000 = 50\text{dB} \Rightarrow \frac{1}{86000} =$	-50dB
$63 = 18\text{dB} \Rightarrow 63^2 =$	36dB
$\frac{86000}{63} =$	50dB-18dB=36dB
-3dB=	0,5
-3dBm=	500μW
6dB=	4
4mW=	6dBm

## 2.6. Συναρτηση μεταφοράς

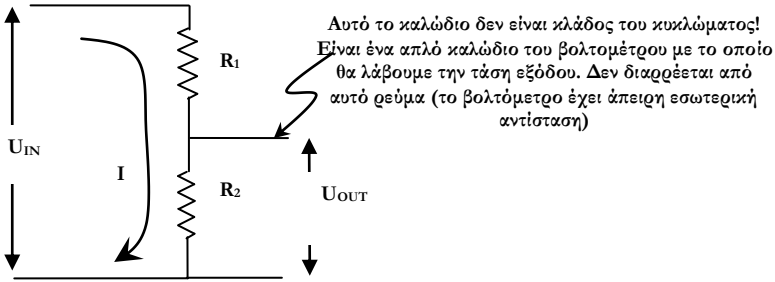
**Σ**υνάρτηση μεταφοράς γενικά είναι η σχέση που μας δίνει την απόκριση ενός συστήματος με δεδομένη διέγερση. Ως συνάρτηση μεταφοράς σε ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα ορίζουμε το λόγο της τάσης εξόδου προς την τάση εισόδου. Αυτός ο λόγος συνήθως είναι μιγαδικός αριθμός (για τους λόγους που αναπτύχθηκαν στην παράγραφο 2.1, και θα φανούν στη συνέχεια), ο οποίος προφανώς έχει μέτρο και φάση.

$$H(s) = \frac{U_{OUT}(s)}{U_{IN}(s)} = \alpha + j\beta = |H(s)| \cdot e^{j\phi} \quad (2.18)$$

**Παράδειγμα 2.5:** Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του απλού διαιρέτη τάσης του σχήματος 2.3.

$$\left. \begin{array}{l} U_{OUT} = I \cdot R_2 \\ U_{IN} = I \cdot (R_1 + R_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.19)$$

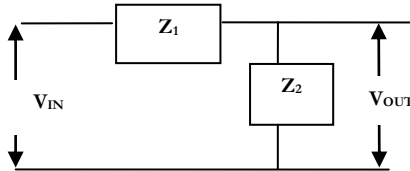
Στη γενικότερη περίπτωση που στη θέση της αντίστασης  $R_1$  τοποθετήσουμε σύνθετη αντίσταση  $Z_1$  και στη θέση της  $R_2$  σύνθετη αντίσταση  $Z_2$  (όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4), τότε η συνάρτηση μεταφοράς είναι μιγαδικός αριθμός:



Σχήμα 2.3: Ο απλός διαιρέτης τάσης

$$\frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (2.20)$$

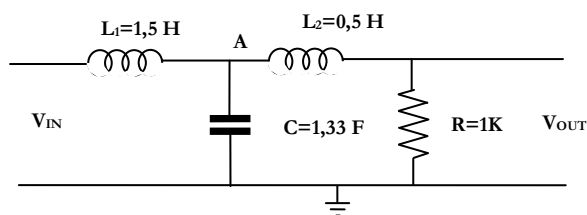
Σημειώνουμε ότι η εφαρμογή της εξίσωσης (2.20) στο διαιρέτη τάσης προϋποθέτει ότι οι δύο σύνθετες αντιστάσεις  $Z_1$  και  $Z_2$  διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα.



Σχήμα 2.4: Ο διαιρέτης τάσης

**Παράδειγμα 2.6:** Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος του σχήματος 2.5. Το κύκλωμα αυτό ονομάζεται φίλτρο Butterworth 3ης τάξης. Στη συνέχεια να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας του κέρδους του κυκλώματος.





Σχήμα 2.5: Παθητικό φίλτρο Butterworth 3ης τάξης (2 πηνία +1 πυκνωτής=3)

**Λύση:** Παρατηρούμε ότι το πηνίο  $L_2$  και η αντίσταση  $R$  διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την σχέση (2.20) μεταξύ των  $U_{OUT}$  και  $U_A$ .

$$\frac{U_{OUT}}{U_A} = \frac{R}{R + sL_2} = \frac{1}{1 + \frac{s}{2}} = \frac{2}{s+2} \quad (2.21)$$

Η αντίσταση  $R$  και το πηνίο  $L$  είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Η σύνθετη αντίσταση και των δύο θα είναι  $Z_{L,R} = R + sL = 1 + \frac{s}{2} = \frac{2+s}{2}$

Η  $Z(L_2R)$  είναι παράλληλα συνδεδεμένη με τον πυκνωτή  $C$ . Επομένως η συνολική σύνθετη αντίσταση είναι

$$Z_{RL_2C} = \frac{\frac{s+2}{2} \cdot \frac{1}{s \cdot C}}{\frac{s+2}{2} + \frac{1}{s \cdot C}} = \frac{s+2}{2+2sC+s^2C}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι το πηνίο  $L_1$  και η σύνθετη αντίσταση  $Z_{RLC}$  διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα. Εφαρμόζουμε διαίρεση τάσης

$$\frac{U_A}{U_{IN}} = \frac{Z_{RL_2C}}{Z_{RL_2C} + sL_1} = \frac{\frac{s+2}{2+2sC+s^2C}}{\frac{s+2}{2+2sC+s^2C} + sL_1} = \frac{s+2}{s+2+2sL_1+2s^2L_1C+s^3L_1C} \Rightarrow \quad (2.22)$$

$$\frac{U_A}{U_{IN}} = \frac{s+2}{2s^3+4s^2+4s+2}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (2.21) και (2.22), προκύπτει:

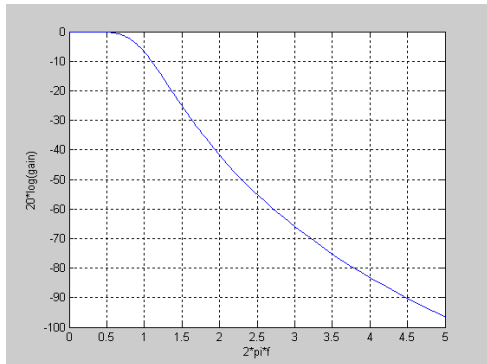
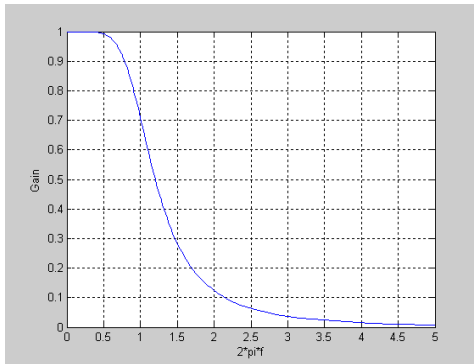
$$\frac{U_A}{U_{IN}} \cdot \frac{U_{OUT}}{U_A} = \frac{s+2}{2s^3+4s^2+4s+2} \cdot \frac{2}{s+2} \quad (2.23)$$

$$\frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

ή

$$\frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1} = \frac{1}{1 - 2\omega^2 + j\omega(2 - \omega^2)}$$

$$G^2(\omega) = \frac{1}{(1 - 2\omega^2)^2 + \omega^2(2 - \omega^2)^2} = \frac{1}{1 + \omega^6} \quad (2.24)$$



Σχήμα 2.6: Απόκριση του φίλτρου του παραδείγματος 2.6 (α) Σε καθαρό αριθμό, (β) Σε dB.

## Αναλογικά Φίλτρα και Συζεύκτες

### 3.1. Γενικά

#### 3.1.1. Ορισμός φίλτρου

**Ω**ς τώρα έχουμε μιλήσει για αναλογικά σήματα. Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα στις τηλεπικοινωνίες, ειδικότερα τα τελευταία χρόνια όπου το περιβάλλον είναι «βομβαρδισμένο» από πολλά σήματα (από το σήμα του ασυρμάτου τηλεφώνου έως το σήμα που ανοιγοκλείνει αυτόματα την πόρτα του γκαράζ μας), είναι ο διαχωρισμός των σημάτων, η απομόνωση ή/και η ενίσχυσή τους. Είναι λοιπόν επιτακτική η ανάγκη ύπαρξης φίλτρων σε όλα τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα.

Τα αναλογικά φίλτρα είναι κυκλώματα επιλογής συχνότητας και χρησιμοποιούνται για την ενίσχυση ή την εξασθένηση ενός απλού ημιτονοειδούς σήματος (συνιστώσας) ή ενός μέρους του φάσματος συχνότητας.

#### 3.1.2. Παθητικά και ενεργά στοιχεία

Ως γνωστόν, μία αντίσταση τιμής  $10\text{ K}\Omega$  είναι πάντα  $10\text{ K}\Omega$  ανεξαρτήτως του ρεύματος που θα περάσει από μέσα της ή της τάσης που θα εφαρμοστεί στα άκρα της. Επίσης, είναι αδιάφορο αν το σήμα που την διαρρέει είναι DC ή AC. Στην πραγματικότητα βέβαια, κατά την εφαρμογή μίας μεγάλης τάσης είναι πιθανόν η αντίσταση να καεί, οπότε, στη χειρότερη περίπτωση θα μπορούσε να μετατραπεί μια αντίσταση των  $10\text{ K}\Omega$  σε μία «αντίσταση» άπειρης τιμής. Επίσης είναι γνωστό ότι η αντίσταση θερμαίνεται (νόμος Joule). Όταν ένα σήμα περάσει μέσα από μία αντίσταση πάντα χάνει ισχύ και ως αποτέλεσμα η τάση του σήματος εξόδου είναι πάντα μικρότερη από την τάση του σήματος εισόδου. Η αντίσταση είναι ένα παθητικό στοιχείο. Δεν χρειάζεται πόλωση.

Δηλαδή, για να λειτουργήσει (με τον τρόπο που αυτή λειτουργεί) δεν χρειάζεται εξωτερική τροφοδοσία από μία μπαταρία ή από ένα DC τροφοδοτικό.

Το τρανζίστορ από την άλλη μεριά, όπως είδη έχουμε μάθει, λειτουργεί μόνο με DC τροφοδοτικό ή μπαταρία. Σε περίπτωση που δεν διαθέτουμε ένα DC σήμα, το τρανζίστορ είναι μια απλή μάζα. Όταν όμως «πολώσουμε» το τρανζίστορ, δηλαδή όταν του δώσουμε την κατάλληλη DC τροφοδοσία, όπως ακριβώς την ορίζει ο κατασκευαστής του, τότε κατά έναν «μαγικό» τρόπο μπορούμε να βάλουμε ένα ημίτονο πλάτους 1 mV και συχνότητας 1 KHz στην είσοδο και να πάρουμε στην έξοδο ένα ημίτονο πλάτους 10 V! Δηλαδή, να ενισχύσουμε το RF σήμα μας 10.000 φορές ή κατά 80 dB. Σε περίπτωση που τροφοδοτήσουμε το τρανζίστορ με διαφορετική τάση από αυτή που ορίζει ο κατασκευαστής, το τρανζίστορ θα συνεχίσει να λειτουργεί, αλλά με διαφορετικό τρόπο: Με διαφορετική ενίσχυση από την αναμενόμενη σε διαφορετικές συχνότητες. Το τρανζίστορ λοιπόν είναι ένα ενεργό στοιχείο.

### 3.1.3. RF και Πολωση

Είναι πλέον ξεκάθαρο ότι τα σήματα των τηλεπικοινωνιών, δηλαδή τα σήματα που περιέχουν πληροφορία (για παράδειγμα φωνή), είναι AC σήματα και για να απλουστεύσουμε τη διαδικασία ανάλυσης, τα θεωρούμε ως απλά ημίτονα. Αυτό που διαφοροποιεί τα σήματα μεταξύ τους είναι η συχνότητά τους.

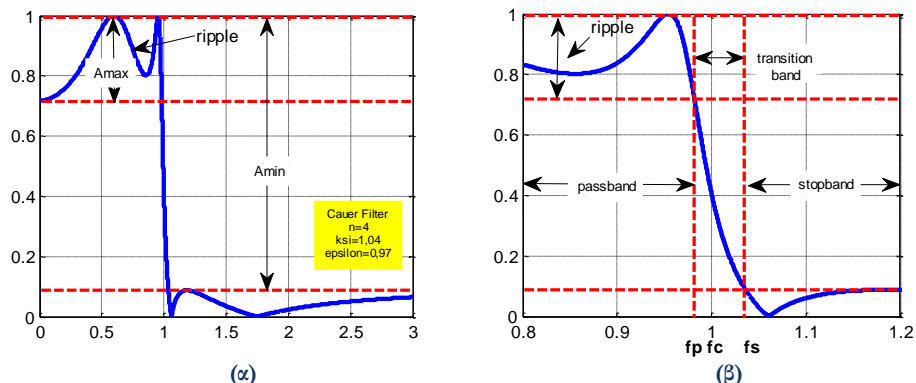
Σε καμιά περίπτωση δε θα μεταδίδαμε ένα σήμα μηδενικής συχνότητας (DC σήμα). Είναι αδύνατον, όπως θα αποδείξουμε στο κεφάλαιο της διαμόρφωσης – αποδιαμόρφωσης. Επίσης, δε θα ενισχύαμε σε καμιά περίπτωση ένα DC σήμα με τη βοήθεια ενός τρανζίστορ. Δεν θα τα καταφέραμε. Από τις γνώσεις μας για το τρανζίστορ, έχουμε ήδη μάθει ότι το τρανζίστορ για να λειτουργήσει, πρέπει να «πολωθεί» κατάλληλα. Με άλλα λόγια, πρέπει να τροφοδοτηθεί μέσω ενός κατάλληλου «κυκλώματος πόλωσης» με ένα ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ DC ρεύμα.

Τα DC σήματα στις τηλεπικοινωνίες τα χρησιμοποιούμε ως βοηθητικά και αναγκαία προκειμένου να στείλουμε, να λάβουμε ή/και να επεξεργαστούμε τα σήματα που μεταφέρουν πληροφορία (AC), δηλαδή τα απλά ημίτονα. Γι' αυτό και στις τηλεπικοινωνίες, τα σήματα πληροφορίας τα ονομάζουμε συνήθως RF σήματα (Radio Frequency) για να τα διαχωρίσουμε από τα σήματα τροφοδοσίας (DC).

### 3.1.4. Προδιαγραφές φίλτρων

Αν θεωρήσουμε το φίλτρο σαν ένα δίθυρο (κουτί με δύο πόρτες, μία για την είσοδο και μία για την έξοδο), τότε μπορούμε να ορίσουμε τα εξής: **Ζώνη διέλευσης** είναι η ζώνη (το εύρος ή η μπάντα διέλευσης: passband) συχνοτήτων στην οποία τα ημιτονοειδή σήματα ενισχύονται ή απλά «περνάνε» χωρίς αξιολογική εξασθένηση. **Ζώνη αποκοπής** (stopband) είναι η ζώνη συχνοτήτων μέσα στην οποία τα σήματα εξασθενούν σημαντικά. Στο σχήμα 3.1(α) η ζώνη διέλευσης εκτείνεται από τη συχνότητα 0 έως τη συχνότητα  $f_p$  (pass), ενώ η ζώνη αποκοπής από τη συχνότητα  $f_s$  (stop) μέχρι το άπειρο.

Οι προδιαγραφές ενός φίλτρου, αρχικά, έχουν να κάνουν με την απαιτούμενη μέγιστη εξασθένιση  $A_{\max}$  ή  $A_p$  της ζώνης διέλευσης (pass), και την απαιτούμενη ελάχιστη εξασθένιση  $A_{\min}$  ή  $A_s$  της ζώνης μετάβασης η οποία εκτείνεται ανάμεσα στις **ακραίες συχνότητες** που αντιστοιχούν στη ζώνη διέλευσης  $f_p$  και στη ζώνη αποκοπής  $f_s$ .



Σχήμα 3.1: Καμπύλη απόκρισης πραγματικού φίλτρου χαμηλών συχνοτήτων. (α)  $0 < \frac{f}{f_c} < 3$  (β)

Μεγέθυνση κλίμακας ώστε να φαίνεται η ζώνη μετάβασης  $0.8 < \frac{f}{f_c} < 1.2$

Τα κύρια χαρακτηριστικά έχουν ως ακολούθως: Ο όρος **κυμάτωση ζώνης διέλευσης** είναι ο αντίστοιχος passband ripple και συνήθως συμβολίζεται  $r_{\text{PASS}}$ . Η συχνότητα  $f_c$  συνήθως συμβολίζεται  $f_{-3\text{dB}}$ . Το  $A_{\min}$  ως stop band rejection (εξασθένιση ζώνης αποκοπής). Η συχνότητα  $f_p$  ως ακραία συχνότητα ζώνης διέλευσης (passband edge frequency) και η  $f_s$  ως ακραία συχνότητα ζώνης αποκοπής (stopband edge frequency). Επομένως, εδώ ως ξεκαθαρίσουμε ότι πολλές φορές στα φίλτρα ως συχνότητα αποκοπής δεν δηλώνεται η συχνότητα των  $-3$  dB.

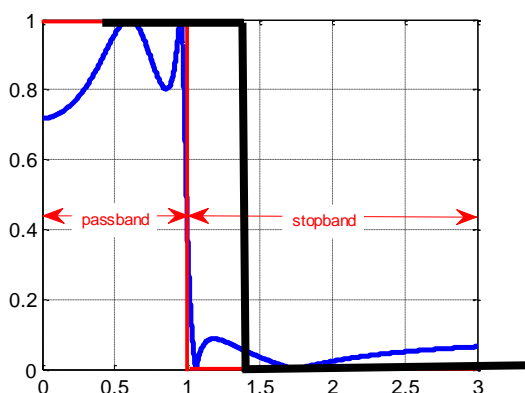
### 3.1.5. Ιδανικά και Πραγματικά Φίλτρα

Ιδανικό φίλτρο θεωρείται το φίλτρο (σχήμα 3.2, έντονη γραμμή) που ικανοποιεί τους ακόλουθους 4 όρους:

- ☞ Έχει απολαβή (ενίσχυση ή κέρδος) μονάδα, δηλαδή δεν δημιουργεί ούτε ενίσχυση ούτε υποβιβασμό του σήματος εισόδου σ' όλη την έκταση των ζωνών διέλευσής του.
- ☞ Δημιουργεί πλήρη υποβιβασμό (100%) του σήματος εισόδου σ' όλη την έκταση των ζωνών αποκοπής του.
- ☞ Η μετάβαση της απόκρισής του από τη μία ζώνη στην άλλη είναι τελείως απότομη.

- ☞ Δε δημιουργεί καμία παραμόρφωση στα σήματα που περνούν μέσα από τη ζώνη διέλευσής του.

Τα πραγματικά φίλτρα έχουν συμπεριφορά που μοιάζει με αυτή που προβλέπεται από τα ιδανικά φίλτρα, μόνο κατά μεγάλη προσέγγιση. Έτσι, π.χ. η απότομη μετάβαση από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη αποκοπής και αντίστροφα, που θεωρείται ότι ισχύει στα ιδανικά φίλτρα, δεν είναι πραγματοποιήσιμη στα πραγματικά φίλτρα. Επίσης, είναι ανέφικτη η σταθερότητα της τιμής του κέρδους τάσης καθ' όλη την έκταση των ζωνών διέλευσης. Τέλος, η ύπαρξη μηδενικής ενίσχυσης σ' όλη τη διάρκεια των ζωνών αποκοπής, είναι αδύνατη στα πραγματικά φίλτρα.



Σχήμα 3.2: Απόκριση πραγματικού και ιδανικού φίλτρου.

Η τυπική, πρακτική απόκριση ενός πραγματικού φίλτρου, και συγκεκριμένα ενός φίλτρου Χαμηλών συχνοτήτων, έχει τη μορφή που εικονίζει το σχήμα 3.1(α) (με κέρδος τάσης μονάδα).

Το πόσο απότομη είναι η πτώση της καμπύλης απόκρισης μέσα στη μεταβατική ζώνη εξαρτάται από την τιμή του λόγου συχνοτήτων  $f_s/f_p$ . Αν η μετάβαση είναι τελείως απότομη, θα έχουμε  $f_s/f_p = 1$ . Όσο πιο «απαλή» είναι η μετάβαση, δηλαδή όσο πιο μικρή είναι η κλίση της καμπύλης απόκρισης μέσα στη ζώνη μετάβασης, τόσο μεγαλύτερος από 1 θα είναι ο λόγος αυτός.

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω κλίση της καμπύλης σε λογαριθμική κλίμακα συχνοτήτων εξαρτάται άμεσα από το βαθμό ή τάξη του φίλτρου. Η ακριβής έννοια της τάξης ενός φίλτρου θα εξηγηθεί στην παράγραφο 3.4.

## 3.2. Ταξινόμηση Φίλτρων

### 3.2.1. Κατηγορίες Φίλτρων Ως Προς Το Κέρδος

**Τ**α ηλεκτρονικά φίλτρα χωρίζονται σε δύο μεγάλες ομάδες: τα παθητικά και τα ενεργά φίλτρα.

Τα παθητικά φίλτρα, αποτελούνται μόνο από παθητικά στοιχεία (αντιστάσεις, πυκνωτές, πηνία). Το κέρδος τους, δηλαδή το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς, στην καλύτερη περίπτωση μπορεί να μονάδα (0 dB). Τα μειονεκτήματά τους είναι ότι σε χαμηλές συχνότητες απαιτούν ογκώδη πηνία, αφού χρειάζονται μεγάλες επαγωγικές αντιστάσεις, καθώς επίσης και ότι προκαλούν υποβιβασμό του σήματος με μεγάλο συντελεστή απωλειών. Γι' αυτούς τους λόγους, η χρήση τους αποφεύγεται, καθώς επίσης και επειδή δημιουργούν έντονα ηλεκτρομαγνητικά πεδία και αποτελούν αιτία ηλεκτρομαγνητικών παρεμβολών. Χρησιμοποιούνται μόνο σε μεγάλες συχνότητες και σε μεγάλες ισχύες.

Τα ενεργά φίλτρα αποτελούνται από ενεργά στοιχεία (τρανζίστορ, τελεστικούς ενισχυτές κ.α.) συνδυασμένα με παθητικά στοιχεία. Το κέρδος τους, δηλαδή το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς, μπορεί να είναι μεγαλύτερο της μονάδας (πάνω από 0 dB). Αυτά τα φίλτρα δεν έχουν τα μειονεκτήματα των παθητικών, είναι αποδοτικά και στοιχίζουν λιγότερο. Χρησιμοποιούνται ευρέως σε χαμηλές συχνότητες και χαμηλές ισχύες. Σε υψηλές συχνότητες (της τάξης των MHz) τα ενεργά φίλτρα έχουν υψηλό κόστος. Σε αντίθεση με τα παθητικά φίλτρα, τα ενεργά φίλτρα είναι κυκλώματα τα οποία λειτουργούν ως ενισχυτές. Δηλαδή, το μέγιστο κέρδος τους είναι

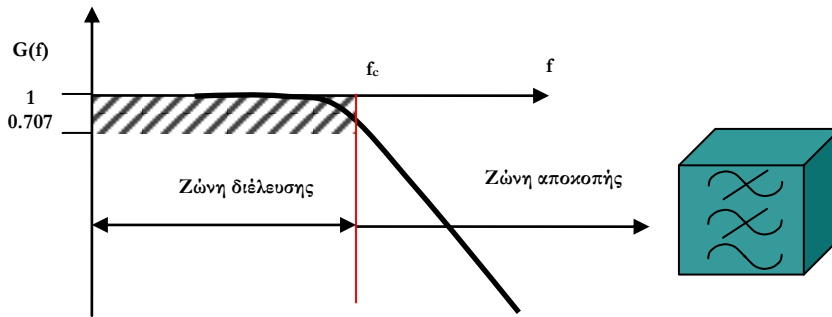
$$\left( \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} \right)_{MAX} > 1$$

### 3.2.2. Ταξινόμηση Φίλτρων ως Προς Το Φάσμα

Ανάλογα με το φάσμα συχνοτήτων στο οποίο επιτρέπουν ή απαγορεύουν τη διέλευση σημάτων, τα φίλτρα χωρίζονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

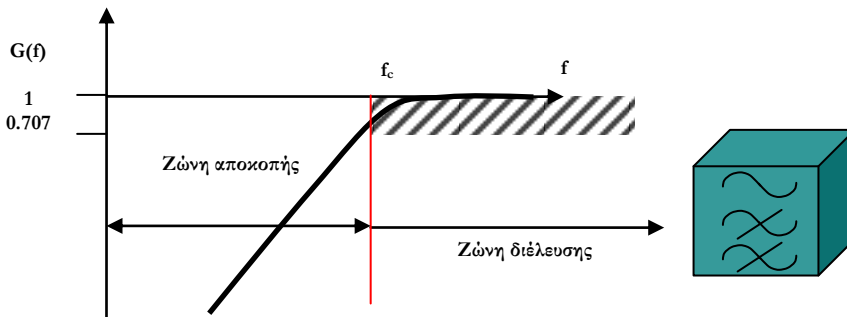
#### **Φίλτρα Χαμηλών Συχνοτήτων (Low Pass Filters)**

Τα φίλτρα αυτά επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων μόνο χαμηλών συχνοτήτων, ενώ αποκόπτουν τα σήματα υψηλότερων συχνοτήτων. Η ζώνη διέλευσής τους αρχίζει από μηδενική συχνότητα (σήματα DC) και φτάνει μέχρι μία συχνότητα που ονομάζεται συχνότητα αποκοπής  $f_c$  ή  $f_H$  (Higher frequency). Από αυτή τη συχνότητα και μετά η ενίσχυση μειώνεται δραστικά και το φίλτρο περνάει στη ζώνη αποκοπής, η συχνότητα της οποίας εκτείνεται μέχρι την άπειρη συχνότητα.



Σχήμα 3.2: Ζώνη διέλευσης και σύμβολο του βαθυπερατού φίλτρου

### Φίλτρα Υψηλών Συχνοτήτων (High Pass Filters)



Σχήμα 3.3: Ζώνη διέλευσης και σύμβολο υψιπερατού φίλτρου

Τα φίλτρα αυτά αποκόπτουν τα σήματα χαμηλών συχνοτήτων και επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων μόνο υψηλών συχνοτήτων. Η ζώνη αποκοπής τους αρχίζει από μηδενική συχνότητα (δηλαδή από σήματα DC) και φτάνει μέχρι μία συχνότητα από την οποία και πέρα η ενίσχυσή τους αυξάνεται γρήγορα. Στη συνέχεια από μία συχνότητα  $f_c$  ή  $f_L$  (Lower Frequency) και μετά που καλείται συχνότητα αποκοπής, αρχίζει η ζώνη διέλευσης που εκτείνεται μέχρι την άπειρη συχνότητα.

Στην περίπτωση που το φίλτρο χρησιμοποιείται για το διαχωρισμό του σήματος από το θόρυβο (ο οποίος είναι χαμηλής συχνότητας), λαμβάνεται φροντίδα ώστε η μεν ζώνη αποκοπής να καλύπτει όλο το φάσμα του θορύβου, η δε ζώνη διέλευσης το φάσμα του σήματος.

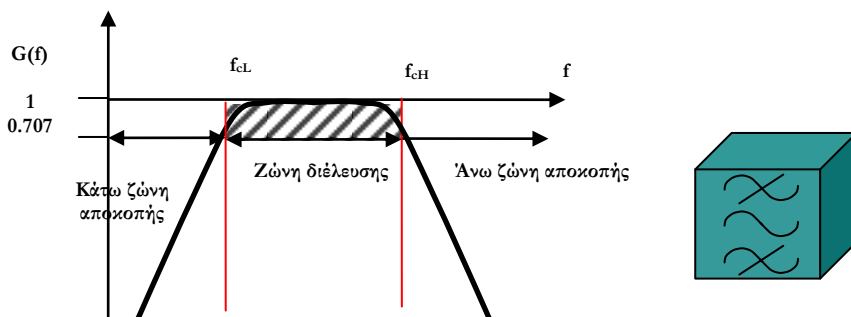
### Φίλτρα ζώνης διέλευσης (Band Pass Filters)

Τα φίλτρα αυτά επιτρέπουν τη διέλευση μόνο σημάτων που η συχνότητά τους περιλαμβάνεται μέσα σε μια ζώνη συχνοτήτων και ανακόπτονται όλες τις υπόλοιπες συχνότητες. Τα φίλτρα αυτά έχουν μία πρώτη κάτω συχνότητα αποκοπής  $f_{cL}$ , μετά



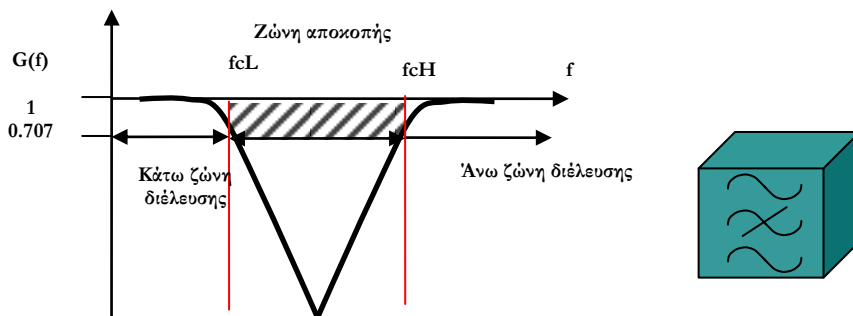
ακολουθεί η ζώνη διέλευσης από τη συχνότητα  $f_{CL}$  μέχρι μία άνω συχνότητα αποκοπής  $f_{CH}$  και τέλος εμφανίζεται η δεύτερη ζώνη αποκοπής από τη συχνότητα  $f_{CH}$  μέχρι την άπειρη συχνότητα.

Αν το BPF χρησιμοποιείται για το διαχωρισμό του σήματος από το θόρυβο χαμηλής και υψηλής συχνότητας, λαμβάνεται φροντίδα ώστε η ζώνη διέλευσης να καλύπτει το φάσμα του σήματος και οι δύο ζώνες αποκοπής το φάσμα του θόρυβου. Ένα BPF μπορεί να προκύψει αν συνδυάσουμε σε σειρά ένα LPF με ένα HPF (με κατάλληλες συχνότητες αποκοπής όπως θα δούμε στην παράγραφο 4.3.4).



Σχήμα 3.4. Λειτουργία και σύμβολο φίλτρου διέλευσης ζώνης

### Φίλτρα ζώνης αποκοπής (Band Stop Filters ή Band Reject Filters)



Σχήμα 3.5. Λειτουργία και σύμβολα φίλτρου απόρριψης ζώνης

Τα φίλτρα αυτά αποκόπτουν μόνο σήματα που η συχνότητά τους περιλαμβάνεται σε μία ζώνη συχνοτήτων και επιτρέπουν τη διέλευση όλων των υπόλοιπων συχνοτήτων. Τα φίλτρα αυτά έχουν μία πρώτη ζώνη διέλευσης από μηδενική συχνότητα (σήματα DC) μέχρι μία κάτω συχνότητα αποκοπής  $f_{cL}$ , μετά ακολουθεί η ζώνη αποκοπής από τη συχνότητα  $f_{cL}$  μέχρι μία άνω συχνότητα αποκοπής  $f_{cH}$ , και τέλος εμφανίζεται η δεύτερη ζώνη διέλευσης από τη συχνότητα  $f_{cH}$  μέχρι την άπειρη συχνότητα.

Το BSF μπορεί να προκύψει αν συνδυάσουμε παράλληλα ένα LPF με ένα HPF (με κατάλληλες συχνότητες αποκοπής όπως θα φανεί στην παράγραφο 4.4) και τα σήματά τους τα οδηγήσουμε σε έναν αναλογικό αθροιστή.

### Φίλτρα στενής ζώνης διέλευσης (Narrow Band pass Filters)

Τα φίλτρα αυτά επιτρέπουν τη διέλευση μόνο μιας στενής ζώνης συχνοτήτων, εστιασμένης γύρω από μία κεντρική συχνότητα  $f_0$ , ενώ αποκόπτουν όλες τις άλλες συχνότητες. Τα φίλτρα αυτά είναι ιδιαίτερα χρήσιμα όταν το σήμα έχει φάσμα συγκεντρωμένο μέσα σε μία στενή ζώνη συχνοτήτων γύρω από μία κεντρική συχνότητα  $f_0$ .

### Φίλτρα στενής ζώνης αποκοπής (Narrow Band stop Filters)

Τα φίλτρα αυτά, που ονομάζονται και φίλτρα δοντιού, αποκόπτουν μία στενή ζώνη συχνοτήτων, απορρίπτοντας μόνο τις συχνότητες που βρίσκονται σε μία στενή περιοχή γύρω από μία κεντρική συχνότητα  $f_0$ , ενώ επιτρέπουν τη διέλευση όλων των άλλων συχνοτήτων. Τα φίλτρα αυτά είναι ιδιαίτερα χρήσιμα όταν θέλουμε να απαλλάξουμε το σήμα από το θόρυβο ισχυρά εντοπισμένο και συγκεντρωμένο γύρω από μία συχνότητα  $f_0$ .

Τα φίλτρα αυτά είναι χρήσιμα στο να κόβουμε τα 50 Hz του δικτύου που πολλές φορές είναι ανεπιθύμητα στις ηλεκτρονικές ιατρικές συσκευές και γενικότερα χρησιμοποιούνται για διαχωρισμό του σήματος από το θόρυβο ανάλογα με το αν αυτός είναι υψηλής ή χαμηλής συχνότητας.




## 3.3. Μαθηματικά πρότυπα φίλτρων

Η συνάρτηση μεταφοράς για κάθε φίλτρο, στη γενική της μορφή είναι

$$H(s) = H_0 \frac{(s - Z_0) \cdot (s - Z_1) \cdot (s - Z_2) \cdot \dots \cdot (s - Z_n)}{(s - P_0) \cdot (s - P_1) \cdot (s - P_2) \cdot \dots \cdot (s - P_n)} \quad (3.1)$$

όπου  $Z_n, P_n$  είναι μιγαδικοί αριθμοί που αντιπροσωπεύουν “μηδενικά” και “πόλους” και  $s = j\omega$ . Δηλαδή  $Z_n$  είναι ρίζες της συνάρτησης του αριθμητή και  $P_n$  ρίζες της συνάρτησης του παρονομαστή, ενώ  $s$  η μιγαδική έκφραση της συχνότητας  $\omega$ .

Ο σχεδιαστής ενός φίλτρου πρέπει να γνωρίζει τουλάχιστον τις ακόλουθες προδιαγραφές:

-  Τη συχνότητα ή τις συχνότητες αποκοπής
-  Την εξασθένιση σε dB στη ζώνη απόρριψης
-  Την επιτρεπόμενη ή όχι κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης.

Στη μαθηματική ανάλυση των φίλτρων έχουν αναπτυχθεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα (πρότυπα) και κυκλώματα, με τα οποία προσπαθούμε να πετύχουμε μία όσο το δυνατό καλύτερη προσομοίωση της συμπεριφοράς των ιδανικών φίλτρων. Τα μοντέλα αυτά

ταξινομούνται στις ακόλουθες οικογένειες: Butterworth, Chebyshev, Ελλειπτικά (Cauer), Bessel-Thompson, Gaussian, Raised-Cosine, Pole-Zero, Polynomial. Ακολουθεί ανάλυση για τις τρεις πρώτες κατηγορίες.

### 3.3.1. Φίλτρα Butterworth (Μέγιστου Επίπεδου Κέρδους)

Τα φίλτρα Butterworth είναι πρότυπα φίλτρα τα οποία προσομοιώνουν ικανοποιητικά την πτώση της καμπύλης απόκρισης στη μεταβατική ζώνη, αλλά δεν εμφανίζουν την κυμάτωση του κέρδους που παρατηρείται στη ζώνη διέλευσης και τη ζώνη αποκοπής των άλλων φίλτρων. Στα φίλτρα αυτά η απόκριση στη ζώνη διέλευσης εμφανίζεται σταθερά επίπεδη καθ' όλη την έκτασή της. Η καμπύλη του σχήματος 3.6 προκύπτει από τα πολυώνυμα Butterworth της σχέσης 3.2.

$$B_n(s) = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[ s^2 - 2s \cos\left(\frac{2k+n-1}{2n}\pi\right) + 1 \right] \quad \text{για } n \text{ άρτιο} \quad (3.2)$$

$$B_n(s) = (s+1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[ s^2 - 2s \cos\left(\frac{2k+n-1}{2n}\pi\right) + 1 \right] \quad \text{για } n \text{ περιττό}$$

Τα πολυώνυμα Butterworth εκφράζονται με τη σύνθετη συνάρτηση της εξίσωσης 3.2, αλλά συνήθως γράφονται με πραγματικούς συντελεστές πολλαπλασιάζοντας ζεύγη πόλων οι οποίοι είναι συζυγείς, όπως ο  $s_1$  και ο  $s_n$ .

$$B_n(\omega) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \quad (3.3)$$

Κανονικοποιούμε τη συχνότητα, θέτοντας  $w = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Τα κανονικοποιημένα πολυώνυμα Butterworth έχουν την ακόλουθη γενική μορφή:

$$B_n(w) = \sqrt{1 + w^{2n}} \quad (3.4)$$

Ο πίνακας 3.1 δίνει τους παράγοντες των πολυωνύμων για  $n=1$  έως 8.

Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του  $n$ , τόσο πιο ιδανικό είναι το μέτωπο απόσβεσης και επομένως καλύτερο το φίλτρο. Στα φίλτρα αυτά, ως κάτω άκρο της μεταβατικής ζώνης, δηλαδή ως συχνότητα  $f_p$ , θεωρείται η συχνότητα στην οποία (στο πραγματικό φίλτρο) το ύψος της καμπύλης απόκρισης (παρεχόμενο από το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς), πέφτει από τη στάθμη των 0 dB κατά  $A_{\max} = -3\text{dB}$ . Η άλλη άκρη της μεταβατικής ζώνης είναι η συχνότητα  $f_s$  για την οποία το επίπεδο της καμπύλης απόκρισης πέφτει κατά  $A_{\min}$  (από τη στάθμη των 0dB - στην αρχή της ζώνης αποκοπής).

Βαθμός Φίλτρου n	Παράγοντες των πολυωνύμων B <sub>n</sub> (s)
1ου βαθμού	(s + 1)
2ου βαθμού	(s <sup>2</sup> + 1,414s + 1)
3ου βαθμού	(s + 1) · (s <sup>2</sup> + s + 1)
4ου βαθμού	(s <sup>2</sup> + 0,765s + 1) · (s <sup>2</sup> + 0,848s + 1)
5ου βαθμού	(s + 1) · (s <sup>2</sup> + 1,618s + 1) · (s <sup>2</sup> + 1,618s + 1)
6ου βαθμού	(s <sup>2</sup> + 0,518s + 1) · (s <sup>2</sup> + 1,414s + 1) · (s <sup>2</sup> + 1,932s + 1)
7ου βαθμού	(s + 1) · (s <sup>2</sup> + 0,445s + 1) · (s <sup>2</sup> + 1,247s + 1) · (s <sup>2</sup> + 1,802s + 1)
8ου βαθμού	(s <sup>2</sup> + 0,390s + 1) · (s <sup>2</sup> + 1,111s + 1) · (s <sup>2</sup> + 1,663s + 1) · (s <sup>2</sup> + 1,962s + 1)

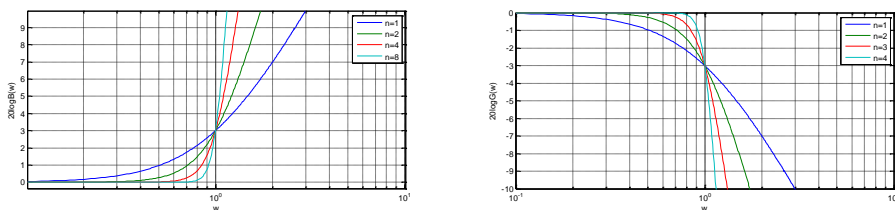
Πίνακας 3.1. Πολυώνυμα Butterworth

Αντιστρέφοντας τη συνάρτηση της εξίσωσης (3.3) προκύπτει το κέρδος (το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς) ενός παθητικού βαθυπερατού φίλτρου 1ης τάξης

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}} \quad (3.5)$$

Το τετράγωνο του κέρδους για ένα βαθυπερατό ενεργό φίλτρο 1ης τάξης είναι:

$$G^2(\omega) = |H(j\omega)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \quad (3.6)$$



Σχήμα 3.6. Αποκρίσεις των συναρτήσεων των εξισώσεων 3.4 και 3.5.

Προκειμένου να εκφράσουμε τη συνάρτηση της εξίσωσης (3.5) συναρτήσει της συχνότητας, μπορούμε να γράψουμε

$$|H(s)| \cdot |H(-s)| = |H(j\omega)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{-s^2}{\omega_c^2}\right)^n} \quad (3.7)$$

Στην παράγραφο 6.4 σχεδιάζουμε ενεργά φίλτρα Butterworth n-οστής τάξης (άρτιας ή περιττής) βαθυπερατά και υψιπερατά.

### 3.3.2. Φίλτρα Chebyshev

#### Φίλτρα Chebyshev τύπου I

Τα φίλτρα Chebyshev, αντίθετα με όλους του άλλους τύπους φίλτρων, δίνουν τη δυνατότητα ύπαρξης και υπολογισμού κυμάτων μέσα στη ζώνη διέλευσης. Έχουν όμως αυξομείωση του κέρδους μέσα στη μεταβατική ζώνη και πιο απότομη απ' ό τι τα φίλτρα Butterworth. Η καμπύλη προκύπτει από τα πολυώνυμα Chebyshev.

$$C_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \cos\left(n \cdot \cos^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right) \quad 0 \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 1 \quad \text{και} \quad C_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \cosh\left(n \cosh^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right) \quad \frac{\omega}{\omega_0} > 1$$

όπου  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  είναι το υπερβολικό συνημίτονο και  $e^{jx} = \cos x - j \sin x$

Τα φίλτρα Chebyshev τύπου I είναι τα πλέον διαδεδομένα Chebyshev φίλτρα. Η απόκριση του κέρδους (μέτρου της συνάρτησης μεταφοράς) ως συνάρτηση της γωνιακής συχνότητας  $\omega$  για ένα βαθυπερατό φίλτρο n-οστής τάξης, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$G_n(\omega) = |H_n(s)| = \frac{G_0}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}} \quad (3.8)$$

όπου  $\varepsilon$  είναι ο συντελεστής κυμάτων,  $\omega_0$  η γωνιακή συχνότητα αποκοπής και  $C_n()$  είναι το πολυώνυμο Chebyshev n-οστής τάξης. Η γραφή C προέρχεται από το όνομα Chebyshev, αλλού θα το βρούμε  $T_n()$  από τη διαφορετική γραφή – Tschebysheff) .

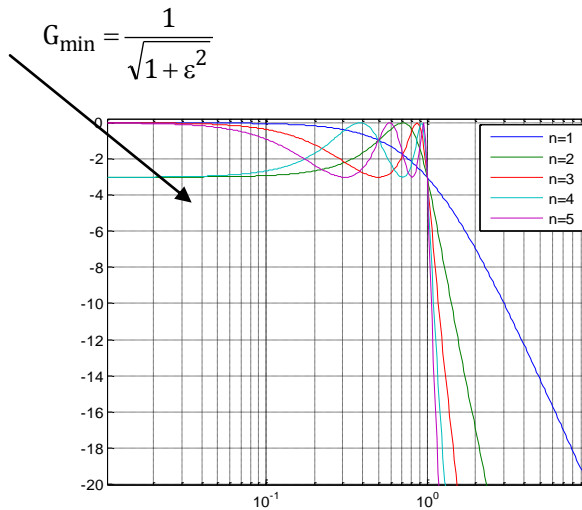
Θεωρώντας ότι  $\omega_0=1$  (κανονικοποιώντας τη γωνιακή συχνότητα), η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$G_n(\omega) = |H_n(s)| = \frac{G_0}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2(\omega)}} \quad (3.9)$$

με

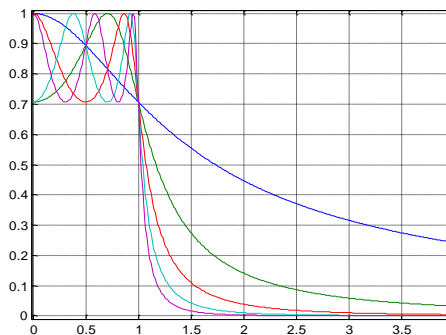
$$\begin{aligned} C_0(\omega) &= 1 \\ C_1(\omega) &= \omega \\ C_{n+1}(\omega) &= 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Στη ζώνη μετάδοσης (χαμηλές συχνότητες  $\omega \rightarrow 0$ ) το πολυώνυμο Chebyshev εναλλάσσεται μεταξύ 0 και 1, και επομένως το κέρδος του φίλτρου, αν θεωρήσουμε  $G_0=1$ , εναλλάσσεται μεταξύ ενός μέγιστου  $G_{\max}=1$  και ενός ελάχιστου  $G_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ . Στη συχνότητα αποκοπής  $\omega=\omega_0$  (με την κανονικοποίηση  $\omega=1$ ) το κέρδος πάλι έχει τιμή  $G_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ , αλλά συνεχίζει να πέφτει στη ζώνης αποκοπής καθώς η συχνότητα αυξάνεται ( $\omega \rightarrow \infty$ ). Αυτή η συμπεριφορά παρουσιάζεται στο σχήμα 3.7.



(α)

```
w=-0:0.01:4;
F1=(1./(1+e.^2*(w).^2).^^(1./2));
F2=(1./(1+e.^2*(2*w.^2-1).^2).^^(1./2));
F3=(1./(1+e.^2*(4*w.^3-3*w).^2).^^(1./2));
F4=(1./(1+e.^2*(8*w.^4-8*w.^2+1).^2).^^(1./2));
F5=(1./(1+e.^2*(16*w.^5-20*w.^3+5*w).^2).^^(1./2));
plot(w,F1,w,F2,w,F3,w,F4,w,F5)
grid on
```



(β)

Σχήμα 3.7: (α) Απόκριση φίλτρου Chebyshev τύπου 1( $\varepsilon=1$ ) (β) Πρόγραμμα Matlab( $\varepsilon=1$ ).

Σημειώνουμε ότι ο γνωστός ορισμός της συχνότητας αποκοπής ως συχνότητα των  $-3\text{dB}$  εδώ δεν ισχύει. Η τάξη του φίλτρου αυτού είναι ισοδύναμη με τον αριθμό των άεργων στοιχείων (για παράδειγμα πηνίων), τα οποία χρειάζονται για να υλοποιηθεί το φίλτρο με αναλογικά ηλεκτρονικά. Η κυμάτωση συνήθως δίνεται σε dB.

$$\text{Ripple} = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \right) \quad (3.11)$$

Επομένως, για  $\varepsilon=1$  προκύπτει πλάτος κυμάτωσης 3 dB. Για να βρούμε τους πόλους του κέρδους του φίλτρου Chebyshev, θα πρέπει να βρούμε πού μηδενίζεται ο παρονομαστής της εξίσωσης (3.9):  $1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2(\omega) = 0$ .

Ορίζοντας  $\omega = \cos\theta$ , προκύπτει  $1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2(\cos\theta) = 1 + \varepsilon^2 \cdot \cos^2(n\theta) = 0$ . Εδώ χρησιμοποιήσαμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες  $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$  και  $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ . Λύνοντας ως προς  $\theta$  προκύπτει  $\theta = \frac{1}{n} \arccos\left(\frac{\pm j}{\varepsilon}\right) + \frac{k\pi}{n}$

Επομένως, οι πόλοι της συνάρτησης κέρδους Chebyshev είναι:

$$s_{k\pi} = j\omega = j\cos\theta = j\cos\left(\frac{1}{n} \arccos\left(\frac{\pm j}{\varepsilon}\right) + \frac{k\pi}{n}\right) \quad (3.12)$$

### Φίλτρα Chebyshev τύπου II (Αντίστροφα Chebyshev)

Αυτού του τύπου τα φίλτρα δεν είναι πολύ διαδεδομένα λόγω του ότι είναι αρκετά αργά στη ζώνη μετάβασης και απαιτούν πολλά στοιχεία. Δεν έχουν καθόλου κυμάτωση στη ζώνη μετάδοσης, αλλά έχουν κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής. Το κέρδος είναι:

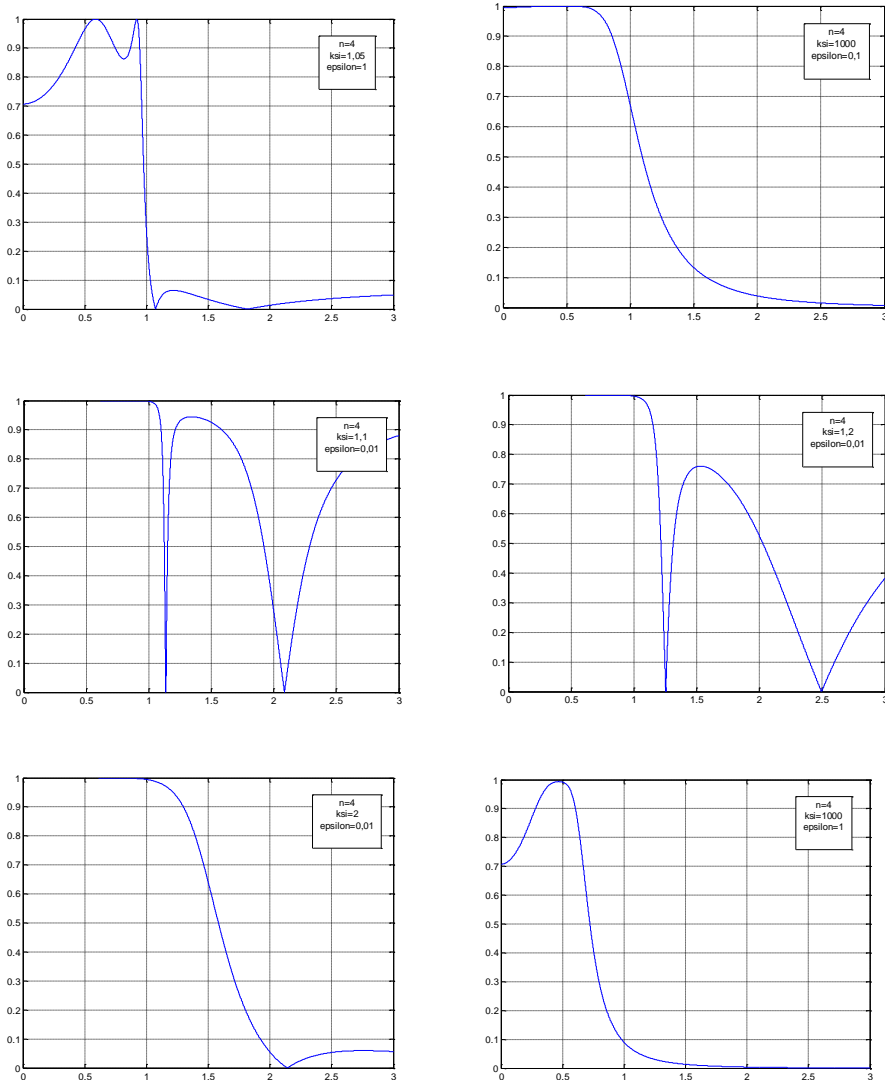
$$G_n(\omega, \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot C_n^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)}}} \quad (3.13)$$

Στη ζώνη αποκοπής το πολυώνυμο Chebyshev κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1 και επομένως το κέρδος θα κυμαίνεται μεταξύ 1 και  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$  και η ελάχιστη συχνότητα στην οποία

μπορεί να επιτευχθεί αυτό το μέγιστο, είναι η συχνότητα αποκοπής  $\omega_0$ .

### 3.3.3. Φίλτρα Cauley (Ελλειπτικά)

Μπορούμε να αποκτήσουμε πιο απότομη κλίση της ζώνης αποκοπής αν επιτρέψουμε κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής. Αυτό γίνεται επιτρέποντας μηδενικά στον άξονα  $\omega$  του μιγαδικού επιπέδου. Αυτό όμως θα προκαλέσει μικρότερη καταστολή στη ζώνη αποκοπής. Το αποτέλεσμα ονομάζεται ελλειπτικό φίλτρο, που είναι γνωστό και ως Cauley φίλτρο.



Σχήμα 3.9. Αποκρίσεις ελλειπτικών φίλτρων για διάφορες τιμές των  $\epsilon$  και  $\xi$ .



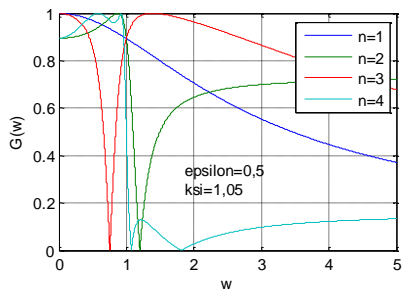
Ελλειπτικό φίλτρο ή φίλτρο Caueer είναι ένα φίλτρο επεξεργασίας σήματος με ισορροπημένη συμπεριφορά κυμάτωσης μεταξύ της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής. Το ποσοστό κυμάτωσης της κάθε ζώνης ρυθμίζεται ανεξάρτητα και κανένα άλλο φίλτρο ίδιας τάξης δεν μπορεί να έχει ταχύτερη μετάβαση στο κέρδος μεταξύ της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής για δεδομένες τιμές κυμάτωσης (ανεξάρτητα από το αν η κυμάτωση είναι ισορροπημένη ή όχι). Εναλλακτικά, υπάρχει η δυνατότητα να ρυθμίσουμε ανεξάρτητα την κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης και στη ζώνη αποκοπής και να σχεδιάσουμε ένα φίλτρο το οποίο δεν είναι ευαίσθητο στις μεταβολές των στοιχείων του.

Όταν το ποσοστό κυμάτωσης της ζώνης αποκοπής πλησιάζει στο μηδέν, τότε το φίλτρο γίνεται φίλτρο Chebyshev τύπου I. Όταν το ποσοστό κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης πλησιάζει στο 0, τότε το φίλτρο γίνεται φίλτρο Chebyshev τύπου II και τέλος, καθώς και τα δύο ποσοστά κυμάτωσης πλησιάζουν στο μηδέν, το φίλτρο γίνεται φίλτρο Butterworth.

Το κέρδος ενός βαθυπερατού ελλειπτικού φίλτρου, ως συνάρτηση της γωνιακής συχνότητας, είναι:

$$G_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\xi, \omega/\omega_0)}} \quad (3.14)$$

```
w=0:0.0001:5;
e=0.5;
ksi=1.05;
G=(4*ksi.^2+(4*ksi.^2*(ksi.^2-1)).^(2./3)).^(1./2);
xp2=2*ksi.^2*G.^(1./2)/(8*ksi.^2*(ksi.^2+1)+12*G*ksi.^2
-G.^3-G.^(3./2)).^(1./2);
xk2=ksi.^2./xp2;
t=(1-(1./ksi.^2)).^(1./2);
F1=(1./(1+e.^2*(w).^2)).^(1./2);
F2=(1./(1+e.^2*((t+1)*w.^2-1)./((t-1)*w.^2+1)).^(1./2));
F3=1./(1+e.^2*(w*(1-xp2).*(w.^2-xk2)./((1-xk2)*(w.^2-
xp2))).^(1./2);
F4=1./(1+e.^2*((1+t)*(1+t./1./2)).^2*w.^4-
2*(1+t)*(1+t./1./2)*w.^2+1)./((1+t)*(1-
t./1./2)).^2*w.^4-2*(1+t)*(1-
t./1./2)*w.^2+1)).^(1./2);
plot(w,F1,w,F2,w,F3,w,F4)
```

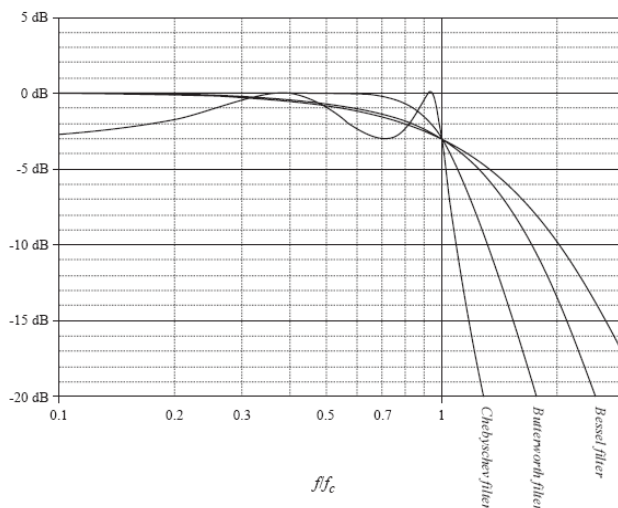


Σχήμα 3.8: Απόκριση Ελλειπτικού Φίλτρου (Matlab)

Τα φίλτρα Bessel δεν παρουσιάζουν κυμάτωση στην καμπύλη απόκρισης και η μεταβατική μετάπτωση του κέρδους είναι η χειρότερη απ' ότι στις άλλες οικογένειες φίλτρων. Το πλεονέκτημά τους είναι ότι έχουν γραμμική φάση και χρησιμοποιούνται σε συστήματα που επεξεργάζονται παλμούς, επειδή, λόγω της ιδιότητας αυτής, δεν αλλοιώνουν τη μορφή του παλμού.

Τέλος, τα ελλειπτικά φίλτρα εμφανίζουν κυμάτωση της καμπύλης απόκρισης τόσο στη ζώνη διέλευσης όσο και στη ζώνη αποκοπής, ενώ η μετάπτωση κέρδους στη μεταβατική ζώνη είναι πιο απότομη απ' ό τι σε όλες τις άλλες οικογένειες των φίλτρων.

### 3.3.4. Σύγκριση Αποκρίσεων Φίλτρων 5ης Τάξης



Σχήμα 3.10. Σύγκριση αποκρίσεων διαφορετικού τύπου φίλτρων: Ιδανικού, Chebyshev, Butterworth και Bessel

## 3.4. Κέρδος διαδοχικών συστημάτων

Ένα ηλεκτρονικό σύστημα, συνήθως αποτελείται από σε σειρά συνδεδεμένα (γλιμακωτά) υποσυστήματα, το κάθε ένα από τα οποία έχει συγκεκριμένες προδιαγραφές, μεταξύ αυτών και το κέρδος του. Τα υποσυστήματα αυτά μπορεί να είναι απλά ή σύνθετα κυκλώματα όπως ταλαντωτής, ενισχυτής, μίκτης, κύκλωμα προσαρμογής, μονωτήρας, καλώδιο, φίλτρο κ.ο.κ.

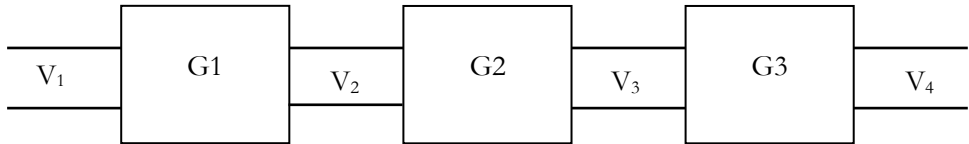
Το κέρδος κάθε υποσυστήματος του σχήματος 3.11 σε καθαρό αριθμό είναι  $G_1 = \frac{V_2}{V_1}$ ,

$G_2 = \frac{V_3}{V_2}$  και  $G_3 = \frac{V_4}{V_3}$ . Για να βρούμε το συνολικό κέρδος του συστήματος

$G_{\text{total}} = \frac{V_4}{V_1} = \frac{V_4}{V_3} \cdot \frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_1}$ , αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τα επιμέρους κέρδη  $G_1, G_2, G_3$ .

$$G_{\text{total}} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \quad (3.15)$$

Το κέρδος κάθε υποσυστήματος σε dB είναι  $G_i \text{ (dB)} = 20 \cdot \log\left(\frac{V_{i+1}}{V_i}\right)$  όπου  $i=1,2,3$ . Το συνολικό κέρδος του συστήματος είναι  $G_{\text{total}} \text{ (dB)} = 20 \cdot \log\left(\frac{V_4}{V_1}\right)$ . Όμως, από την 3.15  $G_{\text{total}} = 20 \cdot \log(G_1 \cdot G_2 \cdot G_3) = 20 \cdot \log(G_1) + 20 \cdot \log(G_2) + 20 \cdot \log(G_3)$  και επομένως

$$G_{\text{total}} \text{ (dB)} = G_1 + G_2 + G_3 \quad (3.16)$$


Σχήμα 3.11. Τρία υποσυστήματα συνδεδεμένα σε σειρά προς υπολογισμό συνολικού κέρδους

Υποθέτοντας ότι έχουμε  $N$  υποσυστήματα σε σειρά. Όλα τα υποσυστήματα έχουν το ίδιο κέρδος  $G$ , τότε η (3.15) γίνεται

$$G_{\text{total}} = G^N \quad (3.17)$$

όπου το κέρδος  $G$  είναι εκφρασμένο σε καθαρό αριθμό.

Αν λοιπόν το κέρδος έχει εκφραστεί σε dB τότε πρέπει να προσθέσουμε τα επιμέρους κέρδη  $G$ , όπως προέκυψε στην (3.16):

$$G_{\text{tot}} = N \cdot G \quad (3.18)$$

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό και μία ιδιότητα των λογαρίθμων:

$$\log_{\beta} a = A \Rightarrow a = \beta^A$$

$$\log_{\beta}(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \log_{\beta} \alpha_1 + \log_{\beta} \alpha_2 \Rightarrow \log_{\beta} \alpha^N = N \cdot \log_{\beta} \alpha$$

### 3.5. Βαθμός ή τάξη φίλτρου

$\Sigma$  το κεφάλαιο 4 θα αποδείξουμε ότι για ένα βαθυπερατό παθητικό φίλτρο 1<sup>ης</sup> τάξης, το τετράγωνο του κέρδους του δίνεται από τη σχέση (παράγραφος 4.1.3)

$$G^2(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} \quad (4.20)$$

Η συχνότητα  $\omega$  είναι η κανονικοποιημένη μορφή  $w = \omega / \omega_0$  όπου θεωρήσαμε την κρίσιμη συχνότητα αποκοπής  $\omega_0 = 1$  rad/sec. Συνήθως το κέρδος (gain) εκφράζεται σε dB:

$$G = 20 \log G(\omega) = 10 \log\left(\frac{1}{1 + \omega^2}\right) = -10 \log(1 + \omega^2) \text{ dB} \quad (3.19)$$

όπου ο λογάριθμος της σχέσης 3.19 είναι δεκαδικός λογάριθμος (η βάση ισούται με 10).

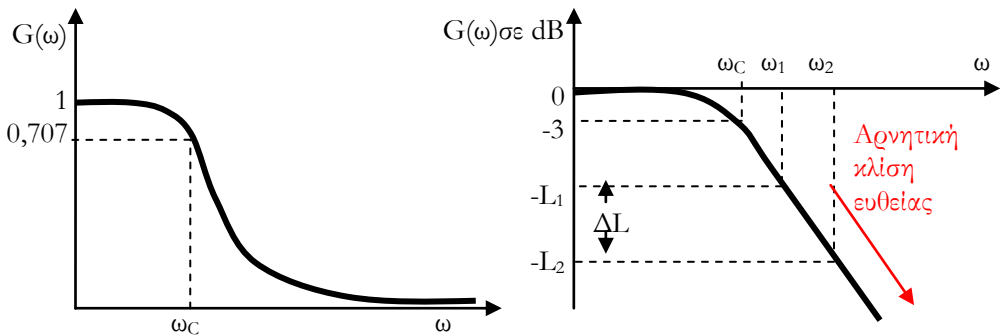
Παρατηρώντας ότι το κέρδος είναι αρνητικό, μπορούμε να το εκφράσουμε σε μορφή απωλειών (loss). Οι απώλειες του βαθυπερατού φίλτρου είναι

$$L = 10\log(1 + \omega^2) \text{ (dB)} \quad (3.20)$$

Στη ζώνη αποκοπής και **πολύ μακριά από τη συχνότητα αποκοπής**  $\omega \gg 1 \text{ rad/sec}$  (για να είμαστε ακριβείς,  $\omega \gg \omega_0$ ) η σχέση 3.20 γίνεται

$$L = 20\log\omega \text{ (dB)} \quad (3.21)$$

και εκφράζει τις απώλειες στη ζώνη αποκοπής.



Σχήμα 3.12. Κλίση βαθυπερατού παθητικού φίλτρου στη ζώνη αποκοπής

Ορίζουμε την κλίση στη ζώνη αποκοπής (roll-off) για το βαθυπερατό φίλτρο 1ης τάξης

$$\Delta L = -L_2 + L_1 = 20\log\omega_1 - 20\log\omega_2 = 20\log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \text{ dB/διαστημα}(\omega_1, \omega_2) \quad (3.22)$$

**Δεκάδα** είναι το διάστημα μεταξύ δύο συχνοτήτων από τις οποίες η μεγαλύτερη είναι 10-πλάσια της μικρότερης:  $\omega_2 = 10\omega_1$

**Οκτάβα** είναι το διάστημα στο οποίο η μεγαλύτερη συχνότητα είναι 2-πλάσια της μικρότερης:  $\omega_2 = 2\omega_1$

Αντικατάσταση των εννοιών δεκάδα και οκτάβα στη σχέση 3.22, δίνει:

Για μία **Δεκάδα** (δεκαπλασιασμός συχνότητας) η κλίση της ζώνης αποκοπής είναι

$$\Delta L = 20\log\frac{1}{10} = -20 \text{ dB/decade} \quad (3.23)$$

και για μια **Οκτάβα** (διπλασιασμός συχνότητας), η κλίση είναι

$$\Delta L = 20\log\frac{1}{2} = -6 \text{ dB/octave} \quad (3.24)$$

Οι σχέσεις (3.23) και (3.23) ισχύουν για το βαθυπερατό φίλτρο 1<sup>ης</sup> τάξης. Παρατηρούμε ότι η κλίση είναι αρνητική. Πράγματι, η κλίση της ευθείας του διαγράμματος Bode του σχήματος 3.12, είναι αρνητική.

$$\tan\phi = \frac{\Delta L}{\omega_2 - \omega_1} \quad (3.25)$$

Όπως αποδείχθηκε στην (3.18), το κέρδος εκφρασμένο ως απώλειες για N όμοια βαθυπερατά φίλτρα 1<sup>ης</sup> τάξης, γίνεται

$$L_{\text{total}} = N \cdot L \quad (3.26)$$

και η κλίση της ζώνης αποκοπής (roll-off)

$$(\Delta L)_{\text{total}} = N \cdot \Delta L \quad (3.27)$$

Αντικαθιστώντας τις 3.23 και 3.24 στην 3.27, θα προκύψουν οι σχέσεις 3.28 και 3.29. Δηλαδή, η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης μεταφοράς για ένα βαθυπερατό φίλτρο τάξης N είναι

$$(\Delta L)_{\text{total}} = -(N \cdot 20) \text{dB/decade} \quad (3.28)$$

$$(\Delta L)_{\text{total}} = -(N \cdot 6) \text{dB/octave} \quad (3.29)$$

Στα φίλτρα, η συνάρτηση μεταφοράς H(s) της εξίσωσης (3.1) εκφράζεται από μία παράσταση στην οποία ο **παρονομαστής** είναι ένα πολυώνυμο ως προς s=jω ή jf. Ο αλγεβρικός βαθμός αυτού του πολυωνύμου ονομάζεται βαθμός ή τάξη n του φίλτρου. Στο σχήμα 3.13 παρουσιάζεται η απόκριση βαθυπερατών παθητικών φίλτρων 1<sup>ης</sup> τάξης (N=1) και 2<sup>ης</sup> τάξης (N=2).

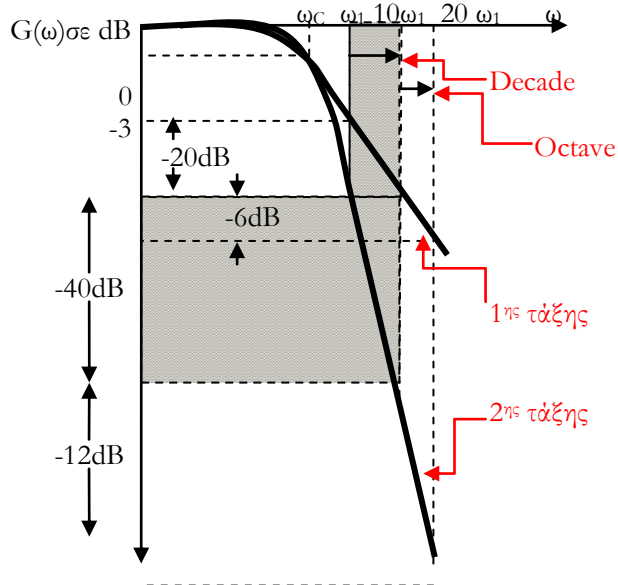
Για να έχουμε λοιπόν ένα φίλτρο 2<sup>ης</sup> τάξης, αρκεί :

- να τοποθετήσουμε σε σειρά δύο φίλτρα 1<sup>ης</sup> τάξης ή
- να υλοποιήσουμε ένα κύκλωμα (που να περιλαμβάνει ακριβώς δύο άεργα στοιχεία, πυκνωτή ή πηνίο) του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς να έχει παρονομαστή το οποίο να είναι πολυώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού

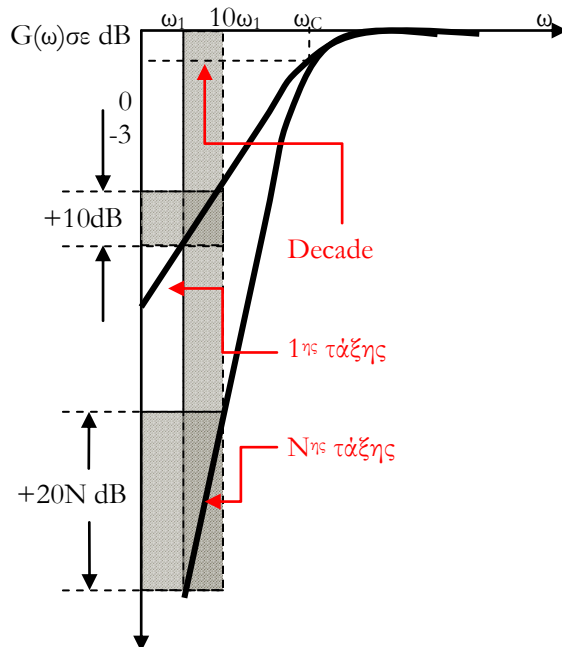
Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι για ένα υπερπερατό φίλτρο Nης τάξης, η κλίση της συνάρτησης μεταφοράς στις συχνότητες αποκοπής (χαμηλές συχνότητες) είναι:

$$(\Delta L)_{\text{total}} = +(N \cdot 20) \text{dB/decade} \quad (3.30)$$

$$(\Delta L)_{\text{total}} = +(N \cdot 6) \text{dB/octave} \quad (3.31)$$



Σχήμα 3.13. Κλίση καμπύλης απόκρισης στη ζώνη αποκοπής (πολύ μακριά από τη συχνότητα αποκοπής) για βαθυπερατά φίλτρα 1ης και 2ης τάξης



Σχήμα 3.14. Κλίση καμπύλης απόκρισης στη ζώνη αποκοπής (πολύ μακριά από τη συχνότητα αποκοπής) για υψιπερατά φίλτρα 1ης και Nης τάξης (roll-off)

Το + στην εξίσωση (3.31) υποδηλώνει θετική κλίση, άρα ανερχόμενη καμπύλη όπως φαίνεται στο σχήμα 3.14. Σε ένα φίλτρο υψηλών συχνοτήτων 2ης τάξης η κλίση της γραφικής παράστασης στη ζώνη αποκοπής θα είναι  $\Delta L = +2 \cdot 20 = 40$  dB/δεκάδα ή  $\Delta L = -2 \cdot 6 = 12$  dB/οκτάβα.

**Παράδειγμα 3.1:** Να βρεθεί η συχνότητα αποκοπής του κυκλώματος του σχήματος 2.5. Στη συνέχεια, να βρεθεί το κέρδος του κυκλώματος για τις ακόλουθες συχνότητες: 6,3 Hz – 63Hz – 252 Hz.

**Λύση:** Όπως αποδείχθηκε στο παράδειγμα 2.6, το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς (κέρδος του κυκλώματος), είναι

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}} \Rightarrow G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^6}}$$

Για τη συχνότητα  $f=6,3\text{Hz}$ , το κέρδος είναι

$$G(6,3) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi \cdot 6,3)^6}} = 1,6 \cdot 10^{-5} = -96\text{dB} \quad (20\log 1,6 \cdot 10^{-5})$$

Το φίλτρο είναι 3ης τάξης. Στη δεκαπλάσια συχνότητα το κέρδος θα πέσει κατά  $3 \cdot 20 = 60\text{dB}$ . Άρα στα 63Hz το κέρδος θα είναι  $-156\text{dB}$ .

Τα 252 Hz απέχουν 2 οκτάβες από τα 63Hz. Το κέρδος θα πέσει κατά  $12\text{dB} \cdot 3 = 36\text{dB}$ . Δηλαδή θα είναι  $-192\text{dB} = 2,52 \cdot 10^{-10}$

### 3.6. Εφαρμογές φίλτρων

**T**α αναλογικά φίλτρα χρησιμοποιούνται ευρέως για τη σύζευξη, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο.

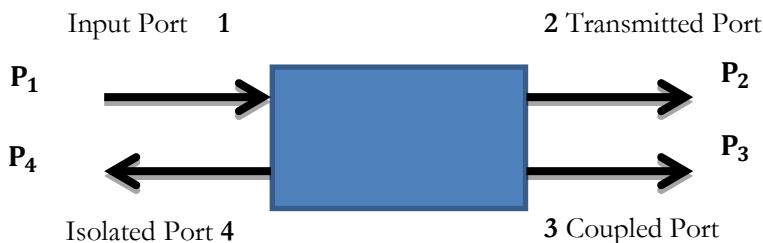
Τα βαθυπερατά φίλτρα χρησιμοποιούνται στα ηχεία ήχου (subwoofers) για να εμποδίσουν τη διέλευση υψηλών συχνοτήτων οι οποίες δεν μπορούν να αποδοθούν ικανοποιητικά. Στους τηλεπικοινωνιακούς πομπούς χρησιμοποιούνται φίλτρα για να εμποδίσουν τις εκπομπές αρμονικών συχνοτήτων που παράγονται και πιθανά να παρεμβαίνουν σε άλλες επικοινωνίες. Την έννοια των αρμονικών θα τη δούμε στο κεφάλαιο 8. Το κουμπί τόνος σε πολλές ηλεκτρικές κιθάρες είναι ένα low-pass φίλτρο που χρησιμοποιείται για να μειώσει τα πρίμα στον ήχο. Ο ολοκληρωτής είναι είναι μια άλλη εφαρμογή που χρησιμοποιείται σε αισθητήρες. Επίσης, οι τηλεφωνικές γραμμές που έχουν DSL splitters, χρησιμοποιούν βαθυπερατά και υψιπερατά φίλτρα για να διαχωρίσουν τα σήματα DSL (πρόσβαση στο Internet) και POTS (υπηρεσία μετάδοσης φωνής) τα οποία μοιράζονται το ίδιο καλώδιο.

Ενώ ένα βαθυπερατό φίλτρο μπορεί να εξομαλύνει το DC σήμα ενός τροφοδοτικού καταπιέζοντας όλες τις AC συνιστώσες (Κεφάλαιο 5, Βιβλίο «Στοιχεία Ηλεκτρονικής»), ένα υψιπερατό φίλτρο μπορεί να επιτρέψει το σήμα να διέρχεται μέσω της εισόδου προς την έξοδο ενός ενισχυτή, χωρίς να επηρεάζει την DC τροφοδοσία του τρανζίστορ, όπως μάθαμε στους ενισχυτές (πυκνωτές αποσύζευξης-coupling capacitors).

### 3.7. Σύζευξη

#### 3.7.1. Κατευθυντικός Συζεύκτης

**Ε**νας κατευθυντικός συζεύκτης είναι μία παθητική συσκευή που μπορεί να συζεύξει (συνδυάσει, μοιράσει, ταιριάζει) ένα μέρος της εκπεμπόμενης ισχύος, με δεδομένο ποσοστό, προς μια άλλη θύρα, χρησιμοποιώντας δύο γραμμές μεταφοράς (καλώδια) οι οποίες είναι αρκετά κοντά η μία στην άλλη, έτσι ώστε η ενέργεια που διαχέεται στη μία γραμμή μεταφοράς να μπορεί να μεταφερθεί και στην άλλη γραμμή μεταφοράς.



Σχήμα 3.15: A coupler

Όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.15, η συσκευή έχει 4 θύρες: Τη θύρα εισόδου (input-1), τη θύρα εκπομπής (transmitted-2), τη θύρα σύζευξης (coupled-3) και τη θύρα απομόνωσης (isolated-4). Ο όρος «κύρια γραμμή μεταφοράς» αναφέρεται στη στο τμήμα σύζευξης μεταξύ των θυρών 1 και 2. Σε μερικούς κατευθυντικούς συζεύκτες, η κύρια γραμμή σχεδιάζεται για λειτουργία υψηλής ισχύος (μεγάλοι σύνδεσμοι), ενώ η θύρα σύζευξης χρησιμοποιεί έναν μικρό SMA σύνδεσμο. Συνήθως, η θύρα απομόνωσης τερματίζεται με ένα εσωτερικό ή εξωτερικό φορτίο για μέγιστη μεταφορά ισχύος (matched load) τιμής 50 ohms. Σημειώνεται ότι, εφόσον ο κατευθυντικός συζεύκτης είναι μία γραμμική συσκευή, οι συμβολισμοί του σχήματος 3.15 είναι αυθαίρετοι. Οποιαδήποτε θύρα μπορεί να είναι η είσοδος, το οποίο θα έχει ως αποτέλεσμα, η απευθείας συνδεδεμένη θύρα να είναι η θύρα εκπομπής, η γειτονική θύρα θα είναι η θύρα σύζευξης και η αντιδιαμετρική θύρα θα είναι η θύρα απομόνωσης.

Αν τροφοδοτήσουμε τη θύρα 1 με ισχύ, η ισχύς θα διαχωριστεί και θα διαχυθεί στις θύρες 2 και 3. Η ισχύς θα διαρρέει την κύρια και τη βοηθητική γραμμή μεταφοράς, μόνο κατά την μία κατεύθυνση. Καθόλου ισχύς δεν θα διαχυθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση, προς τη θύρα 4. Παρόμοια, αν τροφοδοτήσουμε με ισχύ τη θύρα 2, η ισχύς



θα διαχυθεί προς τις θύρες 4 και 3 και καθόλου προς την 1. Όλες οι θύρες είναι προσαρμοσμένες. Προσαρμογή σημαίνει ότι οι θύρες έχουν τα κατάλληλα ωμικά φορτία για μέγιστη μεταφορά ισχύος. Αν οι τρεις θύρες είναι προσαρμοσμένες σε τετραγωνικό φορτίο, τότε και η τέταρτη θύρα θα είναι προσαρμοσμένη. Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο θυρών εξόδου είναι 90°.

Τα χαρακτηριστικά του κατευθυντικού συζευκτη εκφράζονται με τρεις παραμέτρους: Κατευθυντικότητα (directivity), Απομόνωση (isolation) και Σύζευξη (coupling) που ορίζονται ως ακολούθως:

Ο συντελεστής Σύζευξης **Coupling** (C) ορίζεται ως ο λόγος εκφρασμένος σε dB της ισχύος που εισέρχεται στην είσοδο της κύριας γραμμής προς την ισχύ που συζεύγνυται από την έξοδο της βοηθητικής γραμμής.

$$C = 10 \log \frac{P_1}{P_3} = -10 \log \frac{P_3}{P_1} (\text{dB})$$

Ο συντελεστής Απομόνωσης **Isolation** (I) είναι ο λόγος της ισχύος στη θύρα εισόδου προς την ισχύ εξόδου στη θύρα απομόνωσης, εκφρασμένος σε dB.

$$I = 10 \log \frac{P_1}{P_4} = -10 \log \frac{P_4}{P_1} (\text{dB})$$

Ο συντελεστής κατευθυντικότητας **Directivity** (D) ενός κατευθυντικού συζευκτη ορίζεται ως ο λόγος εκφρασμένος σε dB της ισχύος εξόδου στη συζευγμένη θύρα προς την ισχύ εξόδου που ρέει προς την μη συζευγμένη θύρα

$$D = 10 \log \frac{P_3}{P_4} = -10 \log \frac{P_4}{P_3} (\text{dB})$$

Θεωρητικά, ο συντελεστής D πρέπει να είναι άπειρος διότι δεν διαχέεται ισχύς στη θύρα 4. Ο συντελεστής αυτός πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος. Η κατευθυντικότητα δεν είναι μετρήσιμο μέγεθος και υπολογίζεται από μετρήσεις των συντελεστών I και C με τη βοήθεια ενός μετρητή ισχύος (power meter) μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$\text{Directivity} = \text{Isolation} - \text{Coupling}$$

### 3.7.2. Κύκλωμα προσαρμογής κεραίας

Ένας συζευκτης κεραίας (antenna coupler) είναι μια συσκευή η οποία επιτρέπει σε μία ή δύο κεραίες να κάνουν την ηλεκτρική δουλειά πολλών κεραιών αντί να χρησιμοποιείται ξεχωριστή κεραία για κάθε μεμονομένη εκπομπή (συχνότητα). Ιδανικά, κάθε κανάλι (εκπομπή) που λειτουργεί σε συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων, θα έπρεπε να έχει τη δική του, ατομική κεραία, τέλεια μετρομημένη και κατασκευασμένη να συντονίζεται στη συχνότητα του πομπού (καναλιού). Στην πραγματικότητα όμως, υπάρχουν εκατοντάδες μήκη κύματος και επομένως είναι πρακτικά αδύνατο να εξοπλίσουμε ένα όχημα ή ένα πλοίο με τόσες πολλές κεραίες!! Έτσι στην πράξη, με τη χρήση των συζευκτών,

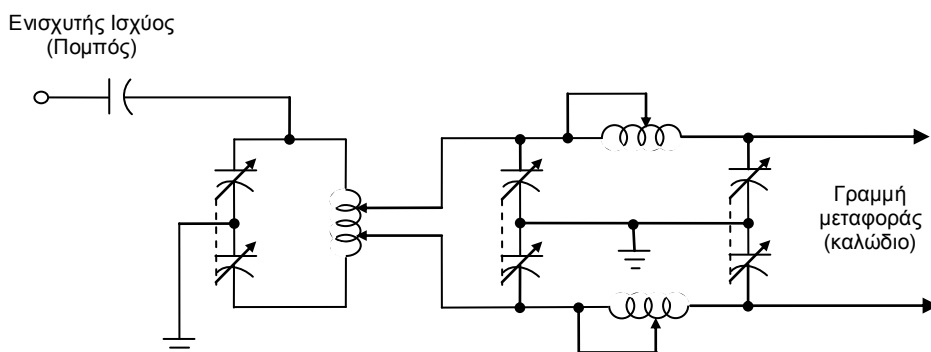
μπορούμε να αλλάζουμε το ηλεκτρικό μήκος των κεραιών, αντί να αλλάζουμε το φυσικό μήκος των κεραιών.

Η διαδικασία αλλαγής των ηλεκτρονικών χαρακτηριστικών μια κεραιάς είναι γνωστή ως “προσαρμογή κεραιάς” ή “antenna tuning”. Η προσαρμογή της κεραιάς περιλαμβάνει την αλλαγή του ηλεκτρικού μήκους της κεραιάς καθώς επίσης και τη συμβατότητα αυτής με διαφόρων τύπων πομπών και δεικτών. Για να προσαρμοστεί μια κεραιά, χρησιμοποιούμε κυκλώματα προσαρμογής (tuners), πολλαπλούς συζεύκτες (multi-couplers) και συζεύκτες (antenna couplers). Οι “antenna tuners” και “antenna couplers” εκτελούν την ίδια βασική λειτουργία. Κάθε συζεύκτης είναι ικανός να ταιριάζει μία κεραιά με έναν πομπό ή έναν δέκτη κάθε φορά. Περισσότερο πολύπλοκες λειτουργίες τυπικά ταιριάζουν καλύτερα σε έναν πολλαπλό συζεύκτη (multi-coupler), ο οποίος, όπως υποδηλώνει το όνομά του, μπορεί ταυτόχρονα να προσαρμόσει πολλές κεραιές στους αντίστοιχους πομπούς και δέκτες.

Ο συζεύκτης και το κύκλωμα προσαρμογής είναι ουσιαστικά κυκλώματα προσαρμογής σύνθετων αντιστάσεων το οποίο ελαχιστοποιεί τις απώλειες από έλειψη προσαρμογής (θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος). Δεν προσαρμόζει την κεραιά στην πραγματικότητα αλλά το κάνει αποδοτικά. Περισσότερο αποδοτικό είναι ένα σύστημα που έχει τον συζεύκτη στην είσοδο της κεραιάς παρά ένα σύστημα το οποίο έχει το συζεύκτη στην έξοδο του πομπού.

Όμως, η σύνθετη αντίσταση εισόδου μιας κεραιάς, αλλάζει όταν αλλάζει η συχνότητα και ένας συζεύκτης δεν μπορεί να προσαρμόζει αυτή τη σύνθετη αντίσταση για όλες τις συχνότητες. Είναι προφανές ότι ένας ευρυζώνιος συζεύκτης έχει μειωμένη ικανότητα προσαρμογής και στις δύο ακραίες συχνότητες της ζώνης. Επίσης, η ίδια κεραιά δεν μπορεί να καλύψει αποτελεσματικά όλες τις επιθυμητές συχνότητες με ένα επιθυμητό SWR.

Οι συζεύκτες συνήθως κατασκευάζονται με άεργα στοιχεία. Χρησιμοποιούμε άεργα στοιχεία (πηνίο ή πυκνωτή) διότι δεν καταναλώνουν ισχύ και έχουν υψηλό Q.



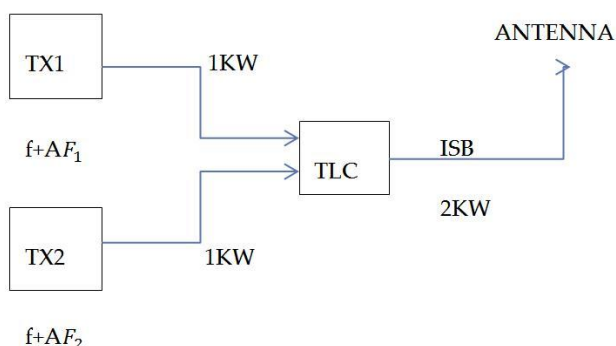
Σχήμα 3.16: Antenna Coupler

Με την εξέλιξη της τεχνολογίας, κατασκευάζονται διάφοροι νέοι τύποι συζευκτώ κεραιών. Σε μερικές περιπτώσεις, στο σύστημα της κεραιάς, τοποθετείται ένα σύστημα

αυτόματου συζεύκτη το οποίο είναι μια συσκευή που μπορεί να «αισθανθεί» τις ανάγκες προσαρμογής της κεραίας και πραγματοποιεί μόνη της και αυτόματα αυτή τη λειτουργία. Μπορεί επίσης να προσαρμοστεί ώστε να είναι συμβατή με διάφορους τύπους πομπών. Συνήθως όμως, ένας αυτόματος συζεύκτης κεραίας διαθέτει και χειροκίνητη λειτουργία ώστε σε περίπτωση δυσλειτουργίας, να μπορεί να λειτουργεί με τη βοήθεια ενός τεχνικού.

Προκειμένου να αποφευχθούν οι παρεμβολές, κατά τη διάρκεια της προσαρμογής (tuning), τα συστήματα κεραίων μεταβαίνουν σε κατάσταση εκπομπής πολύ χαμηλού σήματος. Ως γενικό δεδομένο χρησιμοποιούμε την παραδοχή ότι κατά τη διάρκεια του tuning ο πομπός πρέπει να εκπέμπει ισχύ μικρότερη από 250 Watt.

Στο σχήμα 3.17 παρουσιάζεται ένας συζεύκτης διπλής λήψης (Twin Loaded TX Coupler -TLC) ο οποίος συνδέεται μετά τον πομπό. Αυτό το ιδιαίτερο κύκλωμα επιτρέπει σε μία ευρυζώνια κεραία να χρησιμοποιείται από δύο διαφορετικούς πομπούς οι οποίοι λειτουργούν σε διαφορετικές συχνότητες. Η αποσύζευξη μεταξύ των πομπών πρέπει να είναι ικανή ώστε να εξασφαλίζεται ότι η ενδοδιαμόρφωση (κεφάλαιο 8) μεταξύ τους δεν θα ξεπεράσει τις απαιτήσεις ISB.



Σχήμα 3.17: Παράδειγμα TLC-ISB λειτουργίας με δύο SSB πομπούς



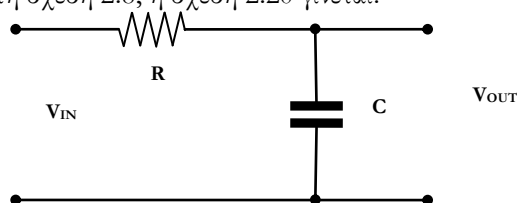
## Παθητικά Φίλτρα και Γραμμές Μεταφοράς

### 4.1. Παθητικά Βαθυπερατά Φίλτρα

#### 4.1.1. Το παθητικό βαθυπερατό RC φίλτρο

Σ

το κύκλωμα του σχήματος 4.1 παρατηρούμε ότι είναι παρόμοιο με αυτό του σχήματος 2.3, μόνο που η σύνθετη αντίσταση  $Z_1$  έχει αντικατασταθεί από τον αντιστάτη  $R$  και η  $Z_2$  έχει αντικατασταθεί από τον πυκνωτή  $C$ . Δεδομένου ότι η σύνθετη αντίσταση ενός πυκνωτή δίνεται στη σχέση 2.8, η σχέση 2.20 γίνεται:



Σχήμα 4.1: Το παθητικό βαθυπερατό RC φίλτρο

$$H(s) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (4.1)$$

Στην απλούστερη περίπτωση όπου θέσουμε  $R=1\Omega$  και  $C=1F$ , η σχέση (4.1) γίνεται

$$H(s) = \frac{1}{1+s} \quad (4.2)$$

στην οποία παρατηρούμε την ύπαρξη ενός πολωνύμου πρώτου βαθμού στον παρονομαστή. Με αντικατάσταση της 2.5 στην 4.1 προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς συναρτήσει της συχνότητας

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} \quad (4.3)$$

$$H(jf) = \frac{1}{1+j2\pi fRC} \quad (4.4)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς ως μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή, στην οποία το **μέτρο** θα το ονομάζουμε **κέρδος (gain)** και θα το συμβολίζουμε  $G(f)$ .

$$|H(f)| = G(f) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi \cdot f \cdot RC)^2}} \quad (4.5)$$

$$\phi = -\arctan(2\pi f \cdot RC) \quad (4.6)$$

Διερεύνηση: Όταν  $f \rightarrow 0$  τότε  $G(f)=1$  και  $\phi=0^\circ$

Όταν  $f \rightarrow \infty$  τότε  $G(f)=0$  και  $\phi=-90^\circ$

Όταν  $f \rightarrow f_c$  τότε  $G(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  και  $\phi=45^\circ$

Δηλαδή, για να βρούμε την **κρίσιμη συχνότητα αποκοπής**  $f_c$ , χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.5) λύνουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$G(f_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f_c RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (2\pi f_c RC)^2 = 1 \Rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (4.7)$$

Η συχνότητα αποκοπής του βαθυπερατού φίλτρου εξαρτάται αντιστρόφως ανάλογα από τις τιμές του πυκνωτή και της αντίστασης. Είναι μία **σταθερά** του κυκλώματος. Αν για παράδειγμα θέσουμε αντίσταση  $R_1=1K\Omega$  και πυκνωτή  $C=3.14pF$  τότε η συχνότητα αποκοπής προκύπτει περίπου ίση με  $f_c=500MHz$ .

Οι σχέσεις 4.4, 4.5 και 4.6, αντικαθιστώντας την 4.7, γίνονται

$$H(jf) = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_c}} \quad (4.8)$$

$$|H(f)| = G(f) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \quad (4.9)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{f}{f_C}\right) \quad (4.10)$$

Ας παρατηρήσουμε το σχήμα 4.1. Από τα γνωστά στοιχεία της λυσειακής φυσικής «ο πυκνωτής λειτουργεί ως κλειστός διακόπτης για το AC και ως ανοικτός διακόπτης για το DC». Επομένως το κύκλωμα του σχήματος 4.1 είναι ισοδύναμο με τα σχήματα 4.2(α) και 4.2(β) για το DC και AC αντίστοιχα.



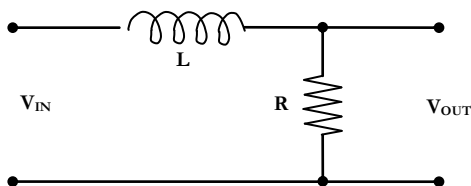
Σχήμα 4.2: Τροποποίηση του κυκλώματος του σχήματος 4.8 (α) Συμπεριφορά στο DC όπου  $U_{OUT}=U_{IN}$  και (β) συμπεριφορά στο AC όπου  $U_{OUT}=0$  (βραχυκύκλωμα αιροδεκτών εξόδου)

Μιλώντας με ακριβείς όρους, DC είναι το σήμα μηδενικής συχνότητας. Στην περίπτωση των τηλεπικοινωνιών όμως, DC είναι ένα σήμα συχνότητας 1 KHz αν το συγκρίνουμε με ένα σήμα συχνότητας 10 GHz! Αυτή η παραδοχή δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα αν αναλογιστούμε ότι το σήμα χαμηλής συχνότητας έχει περίοδο 10.000.000 φορές μεγαλύτερη από την περίοδο του σήματος υψηλής συχνότητας. Δηλαδή, για 5.000.000 εναλλαγές του σήματος υψηλής συχνότητας, το σήμα χαμηλής συχνότητας είναι συνεχές!

Επανερχόμαστε στη συχνότητα αποκοπής των 500 MHz για το βαθυπερατό μας φίλτρο. Αν στην είσοδο του φίλτρου εισέλθει ένα ημίτονο συχνότητας  $f=500$  MHz – περιόδου  $T=2$ ns (σχέση 1.2) , τότε στην έξοδο θα πάρουμε ένα μετατοπισμένο ημίτονο (κατά  $450=0.5$  ns – από τη σχέση 4.10) με πλάτος 70.7% του πλάτους του σήματος εισόδου, αφού η μισή ισχύς του σήματος εισόδου χάνεται. Ομοίως, αν εισέλθει σήμα συχνότητας 510 MHz, τότε θα χαθεί πάνω από τη μισή ισχύ του κατά τη μεταφορά του προς της έξοδο και επομένως, θα θεωρήσουμε ότι το σήμα «κόπηκε» (παράγραφος 2.2). Το βαθυπερατό φίλτρο αφήνει τη διέλευση χαμηλών συχνοτήτων, ενώ απαγορεύει τη διέλευση υψηλών συχνοτήτων. Ο ορισμός του «χαμηλού» και «υψηλού» είναι σχετικός και πάντα έχει να κάνει με τη συχνότητα αποκοπής. Η συχνότητα 490MHz είναι ΧΑΜΗΛΗ (!!) για το εν λόγω φίλτρο.

#### 4.1.2. Αντίσταση Εισόδου και Εξόδου

Αντικαθιστώντας τα δύο στοιχεία του κυκλώματος του σχήματος 2.3 με ένα πηνίο ( $Z_1$ ) και μια αντίσταση ( $Z_2$ ), προκύπτει το βαθυπερατό φίλτρο RL του σχήματος 4.3.



Σχήμα 4.3: Το παθητικό βαθυπερατό RL φίλτρο

Η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος είναι

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}} \quad (4.11)$$

Το μέτρο και η φάση της συνάρτησης μεταφοράς δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \omega \frac{L}{R} \right)^2}} \quad (4.12)$$

$$\phi = -\arctan\left( \omega \frac{L}{R} \right) \quad (4.13)$$

Όταν η συχνότητα πλησιάζει στο μηδέν, τότε το κέρδος (το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς) γίνεται ίσο με τη μονάδα (0 dB), και η διαφορά φάσης μεταξύ σήματος εισόδου και εξόδου μηδενίζεται. Δηλαδή η τάση εξόδου είναι όμοια με την τάση εξόδου και σε μέτρο και σε φάση.

Όταν η συχνότητα πάει προς το άπειρο τότε το κέρδος μηδενίζεται ( $-\infty$  dB), εφόσον το κέρδος πλησιάζει το μηδέν από θετικές τιμές και η διαφορά φάσης μεταξύ σημάτων εισόδου και εξόδου πλησιάζει τις  $-90^\circ$

Από τις δύο προηγούμενες παρατηρήσεις προκύπτει ότι το φίλτρο είναι βαθυπερατό, δηλαδή επιτρέπει τη διέλευση χαμηλών συχνοτήτων.

Για να βρούμε τη συχνότητα αποκοπής, αναζητούμε την  $f$  (ή την  $\omega$ ) για την οποία η ισχύς εξόδου είναι η μισή της ισχύος εισόδου. Δηλαδή, θα λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{P_{OUT}}{P_{IN}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \omega_C \frac{L}{R} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + \left( \omega_C \frac{L}{R} \right)^2 = 2 \Rightarrow \omega_C \frac{L}{R} = 1 \Rightarrow \omega_C = \frac{R}{L}$$

ή

$$\omega_C = \frac{R}{L} \Rightarrow f_C = \frac{R}{2\pi L} \quad (4.14)$$



Η **αντίσταση εισόδου** αυτού του κυκλώματος βρίσκεται αν ανοικτοκυκλώσουμε την έξοδο

$$Z_{IN} = \frac{V_{IN}}{I_{IN}} = j\omega L + R \quad (4.15)$$

Η τιμή της αντίστασης εισόδου εξαρτάται από τη συχνότητα. Προκειμένου να εξασφαλίσουμε καλή **προσαρμογή** με την προηγούμενη βαθμίδα, πρέπει να βεβαιωθούμε ότι η αντίσταση εισόδου του φίλτρου είναι μεγαλύτερη από την αντίσταση εξόδου της προηγούμενης βαθμίδας, για όλες τις συχνότητες. Επομένως, μία παράμετρος που μας ενδιαφέρει είναι η ελάχιστη τιμή της αντίστασης εισόδου  $Z_{IN,MIN}$  που προφανώς θα συμβεί όταν  $\omega \rightarrow 0$ :  $Z_{IN,MIN} = R$ .

Η **αντίσταση εξόδου** του φίλτρου είναι η τιμή της αντίστασης που «φαίνεται» από την έξοδο αν βραχυκυκλώσουμε την πηγή. Τότε (παράλληλος συνδυασμός αντιστάσεων), προκύπτει:

$$Z_{OUT} = \frac{j\omega L R}{j\omega L + R} \quad (4.16)$$

**Παράδειγμα 4.1:** Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα Bode (μέτρο και φάση της συνάρτησης μεταφοράς) για το κύκλωμα του σχήματος 4.4. Στη συνέχεια να βρεθούν οι σύνθετες αντιστάσεις εισόδου και εξόδου.

**Αναλυτική Λύση:** Στο σχήμα 4.4 παρουσιάζεται ένα LR με τιμές  $L=160\text{mH}$  και  $R=10\text{K}\Omega$ .

Αντικαθιστώντας στη σχέση 4.14 αυτές τις τιμές, η συχνότητα αποκοπής προκύπτει να είναι περίπου  $f_c=10\text{KHz}$  (για την ακρίβεια είναι  $9,947\text{ KHz}$ ). Σε αυτή τη συχνότητα περιμένουμε το σήμα εξόδου να είναι το  $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$  του σήματος εισόδου. Με σήμα εισόδου πλάτους  $1\text{ V}$  περιμένουμε το σήμα εξόδου να είναι  $0,707\text{ V}$  (σχήμα 4.5 και 4.6) ή  $-3\text{ dB}$  (σχήμα 4.7).

Αντικαθιστώντας στην (4.13) τις τιμές προκύπτει ότι η φάση για τη συχνότητα αποκοπής  $\omega=\omega_c$  είναι  $-45^\circ$  ή  $135^\circ$ . Δηλαδή, το σήμα εξόδου προηγείται κατά  $-45^\circ$  (δηλαδή καθυστερεί κατά  $45^\circ$ ) να πάρει την ίδια τιμή με αυτή του σήματος εισόδου.

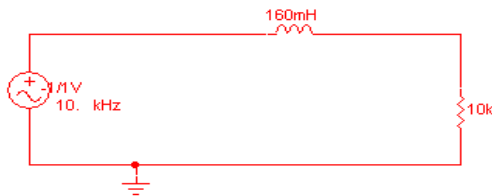
Στο σχήμα (4.5) παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου λαμβάνει μία τιμή κορυφής στο χρόνο  $124,7\ \mu\text{s}$ , ενώ το σήμα εξόδου λαμβάνει την ίδια τιμή στο χρόνο  $136,7\ \mu\text{s}$ . Το σήμα εξόδου καθυστερεί κατά  $12\ \mu\text{s}$  σε σχέση με το σήμα εισόδου. Ας προσπαθήσουμε να μεταφράσουμε το χρόνο σε μοίρες.

Μία περίοδος	T	αντιστοιχεί σε	360°
Ο χρόνος καθυστέρησης	t	αντιστοιχεί σε	φ°

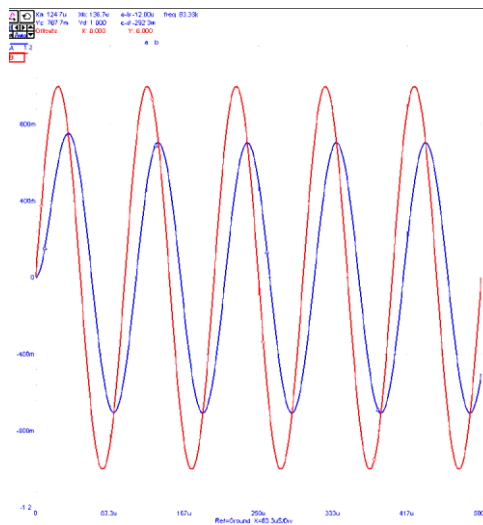
Επομένως

$$\phi = \frac{360^{\circ}}{T}t \quad (4.17)$$

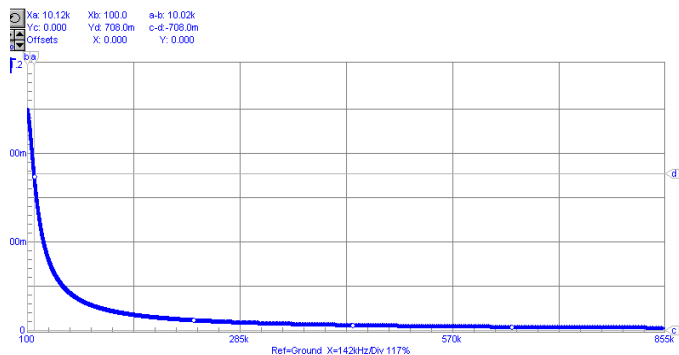
Για σήμα εισόδου συχνότητας 10KHz, η περίοδος είναι 0,1ms=100μs. Επομένως, ο χρόνος 12 ms αντιστοιχεί σε 43,2°, τιμή η οποία είναι πολύ κοντά στην αναμενόμενη των 45°. Το σφάλμα οφείλεται στην ακρίβεια της τιμής της συχνότητας αποκοπής και πιθανότατα σε σφάλμα κατά την ανάγνωση του .



Σχήμα 4.4: Ένα παθητικό βαθυπερατό RL φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 10 KHz.



Σχήμα 4.5: Οι κυματομορφές εισόδου (κόκκινη – πλάτους 1V) και εξόδου (μπλέ – πλάτους 0,707 V). Παρατηρούμε ότι το σήμα εξόδου έπεται του σήματος εισόδου κατά 12 μs (45°) ή προηγείται του σήματος εισόδου κατά 135°.



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα απόκρισης συχνότητας παθητικού βαθυπερατού φίλτρου. Οι δύο άξονες είναι σε γραμμική κλίμακα.

Στη συνέχεια, θα κάνουμε την ακόλουθη διερεύνηση, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 4.12 και 4.13 οι οποίες, με αντικατάσταση της 4.14 μπορούν να γραφούν ως 4.9 και 4.10.

$$\left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{f}{f_C} \right)^2}} \quad (4.9)$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{f}{f_C}\right) \quad (4.10)$$

$$\Gamma\alpha \ f \rightarrow 0 \Rightarrow \left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = 1 \Rightarrow 20\log\left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = 0\text{dB} \text{ και } \varphi = 0^0$$

$$\Gamma\alpha \ f = \frac{1}{10}f_C = 1\text{KHz} \Rightarrow \left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2}} = 0.995 = -0.04\text{dB}, \varphi = -\tau\alpha\zeta\epsilon\varphi(0.1) = -5.7^0$$

$$\Gamma\alpha \ f = f_C = 10\text{KHz} \Rightarrow \left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 = -3\text{dB}, \varphi = -\tau\alpha\zeta\epsilon\varphi 1 = -45^0$$

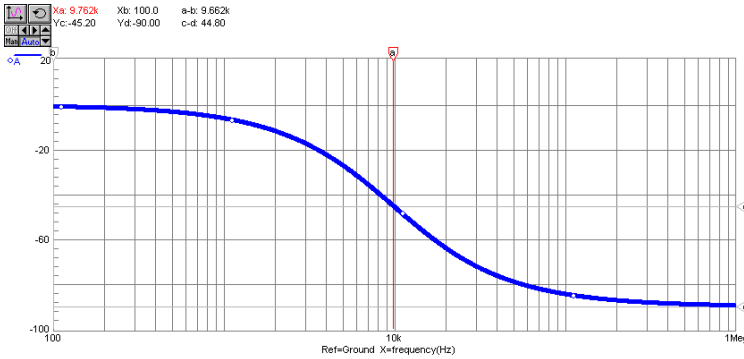
$$\Gamma\alpha \ f = 2f_C = 20\text{KHz} \Rightarrow \left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{20}{10}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447 = -6.99\text{dB} \quad \varphi = -\tau\alpha\zeta\epsilon\varphi 2 = -63,4^0$$

$$\Gamma\alpha \ f = 5f_C = 50\text{KHz} \Rightarrow \left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}} = 0.196 = -14.15\text{dB}, \varphi = -\tau\alpha\zeta\epsilon\varphi 5 = -78,7^0$$

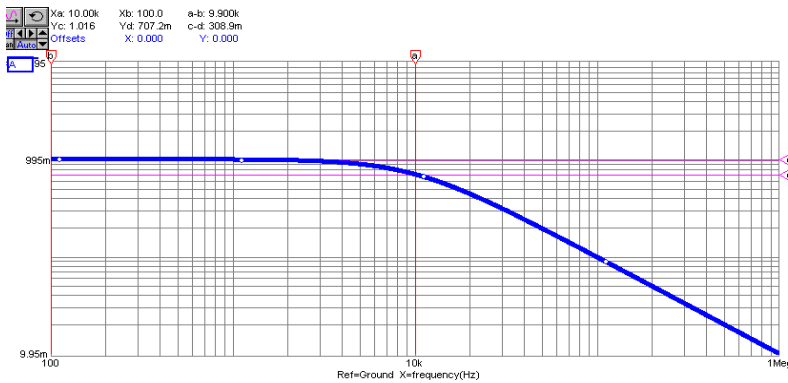
$$\Gamma\alpha \ f = 10f_C = 100\text{KHz} \Rightarrow \left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 10^2}} = 0.099 = -20\text{dB}, \varphi = -\tau\alpha\zeta\epsilon\varphi 10 = -84,3^0$$

$$\text{Για } f = 20f_c = 200\text{KHz} \Rightarrow \left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+20^2}} \approx \frac{1}{20} = 0.05 = -26\text{dB}, \quad \varphi = -\tau\omega \xi \varphi 20 = -87,1^\circ$$

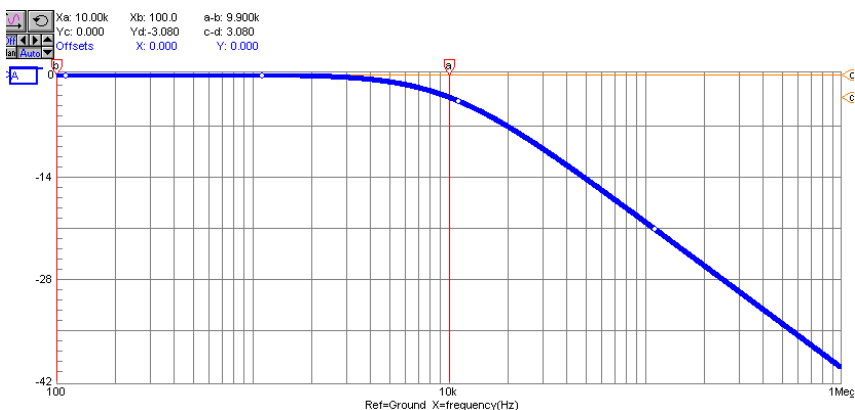
$$\text{Για } f = 100f_c = 20\text{KHz} \Rightarrow \left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| \approx \frac{1}{100} = 0.001 = -40\text{dB}, \quad \varphi = -\tau\omega \xi \varphi 100 = -89,4^\circ$$



Σχήμα 4.7: Διάγραμμα φάσης συναρτήσει συχνότητας (σε λογαριθμική κλίμακα) για το παθητικό βαθυπερατό φίλτρο (Διάγραμμα Bode φάσης)



Σχήμα 4.8: Διάγραμμα απόκρισης συχνότητας παθητικού βαθυπερατού φίλτρου. Οι συχνότητες είναι σε λογαριθμική κλίμακα.



Σχήμα 4.9: Διάγραμμα απόκρισης συχνότητας παθητικού βαθυπερατού φίλτρου. Και οι δύο άξονες είναι λογαριθμική κλίμακα (Διάγραμμα Bode κέρδους)

Παρατηρούμε ότι για συχνότητες πολύ μεγαλύτερες από τη συχνότητα αποκοπής  $f \gg f_c$ , ή αλλιώς για τη ζώνη αποκοπής, η κλίση της γραμμικής περιοχής είναι  $-6$  dB ανά οκτάβα. Δηλαδή για κάθε διπλασιασμό συχνότητας πέφτουμε κατά  $6$  dB. Για κάθε δεκαπλασιασμό συχνότητας πέφτουμε κατά  $20$  dB. Αυτή η παρατήρηση επιβεβαιώνει τη σχέση (3.1) στην παράγραφο 3.4 (όπου  $n=1$  για τα φίλτρα πρώτης τάξης δηλαδή γι' αυτά που περιέχουν μόνο ένα στοιχείο L ή C) «Η κλίση της συνάρτησης μεταφοράς στη ζώνη αποκοπής, για ένα βαθυπερατό φίλτρο 1ης τάξης, είναι  $-6$ dB/οκτάβα ή  $-20$ dB/δεκάδα».

### 4.1.3. Γενικευμένο Βαθυπερατό Φίλτρο 1<sup>ης</sup> Τάξης

Όπως έχουμε προαναφέρει, οι συναρτήσεις μεταφοράς χαρακτηρίζουν ένα δίθυρο. Επομένως, θα ήταν χρήσιμο να ομαδοποιήσουμε σε οικογένειες όλα τα δίθυρα, ανάλογα με τις συναρτήσεις μεταφοράς των τάσεων εισόδων και εξόδων. Για το λόγο αυτό, πρέπει να απλοποιήσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς με τέτοιο τρόπο, ώστε **το πραγματικό μέρος του παρονομαστή να είναι μονάδα** (π.χ. ο παρονομαστής να είναι  $1+jX$  ή  $1-jX$ ). Θα δείξουμε ότι αυτή η ομαδοποίηση βοηθάει επίσης στο να μειωθεί η μαθηματική ανάλυση που κάνουμε προκειμένου να αναλύσουμε διάφορα κυκλώματα.

Το βαθυπερατό φίλτρο που μελετήσαμε στις δύο προηγούμενες παραγράφους είναι μέρος της οικογένειας των βαθυπερατών φίλτρων πρώτης τάξης. Πρώτη τάξη σημαίνει (πέραν του ορισμού που δώσαμε στην παράγραφο 4.1) ότι η συχνότητα  $\omega$  εμφανίζεται στον παρονομαστή με εκθέτη 1 ή  $-1$ . Γενικά, η συνάρτηση μεταφοράς ενός βαθυπερατού φίλτρου 1ης τάξης είναι της μορφής

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{K}{1 + \frac{s}{\omega_c}} = \frac{K \cdot \omega_c}{s + \omega_c} \quad \text{ή} \quad H(s) = \frac{K}{1 + as} \quad \text{όπου} \quad a = \frac{1}{\omega_c} \quad (4.18)$$

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης μεταφοράς  $|H(j\omega)| = |K|$ , ονομάζεται **κέρδος φίλτρου** που για τα παθητικά φίλτρα ισούται με 1. Σημειώνουμε ότι ο εκθέτης του  $\omega$  στον

παρονομαστή είναι +1 και επομένως, το  $|H(j\omega)|$  μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας (γι' αυτό και είναι βαθυπερατό φίλτρο):

$$|H(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad (4.19)$$

Θεωρώντας την κανονικοποιημένη τιμή της γωνιακής συχνότητας  $w$ , θέτοντας  $w = \frac{\omega}{\omega_c}$ ,

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$G^2(w) = \frac{G_0}{1 + w^2} \quad (4.20)$$

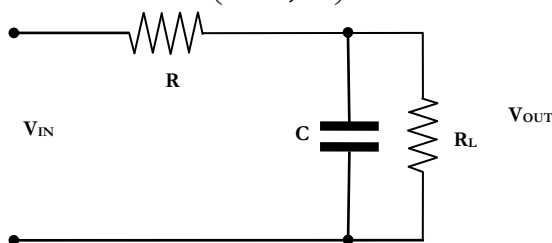
$$\angle H(j\omega) = \frac{|K|}{K} \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (4.21)$$

Σημειώνουμε ότι το  $K$  μπορεί να είναι αρνητικό. Τότε, το σύμβολο μείον προσθέτει ολίσθηση φάσης  $180^\circ$  στη συνάρτηση μεταφοράς όπως προκύπτει από την (4.21).

#### 4.1.4. Τετρατισμός Στα Παθητικά Βαθυπερατά Φίλτρα 1<sup>ης</sup> Τάξης

Προκειμένου να παρατηρήσουμε την επίδραση του φορτίου τετρατισμού σε ένα RC φίλτρο, τοποθετούμε παράλληλα με τον πυκνωτή ένα φορτίο  $R_L$ . Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$H(j\omega) = \frac{R_L // \frac{1}{j\omega C}}{R + \left(R_L // \frac{1}{j\omega C}\right)} \quad (4.22)$$



Σχήμα 4.10. Τετρατισμένο δίθυρο (παθητικό βαθυπερατό φίλτρο RC 1ης τάξης).

Θέτοντας μία υποθετική αντίσταση  $R' = R // R_L = \frac{RR_L}{R + R_L}$ , η σχέση (4.22) γίνεται

$$H(j\omega) = \frac{\frac{R'}{R}}{1 + j\omega R' C} \quad (4.23)$$

Η σχέση αυτή είναι όμοια με την (4.3) αν θέσουμε όπου  $R'$  την  $R$ . Επομένως,

$$H(j\omega) = \frac{\frac{R'}{R}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_C}} \quad (4.24)$$

όπου

$$\omega_C = \frac{1}{R'C} = \frac{R + R_L}{RR_L C} \quad (4.25)$$

Παρατηρούμε ότι η επίδραση του φορτίου είναι να μειώσει το κέρδος του φίλτρου ( $K=R'/R < 1$ ) και να ολισθήσει τη συχνότητα αποκοπής σε υψηλότερη συχνότητα εφόσον  $R' < R$ .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ των συναρτήσεων μεταφοράς ανοικτού βρόχου  $H_0(j\omega)$  και τετρατισμένου δίθυρου  $H(j\omega)$ , οι συναρτήσεις μεταφοράς του δίθυρου, ικανοποιούν τη σχέση:

$$H(j\omega) = \frac{Z_L}{Z_L + Z_0} H_0(j\omega) = \frac{R_L}{R_L + R // \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

### 4.1.3. Το Παθητικό Φίλτρο RLC (2<sup>ης</sup> Τάξης)

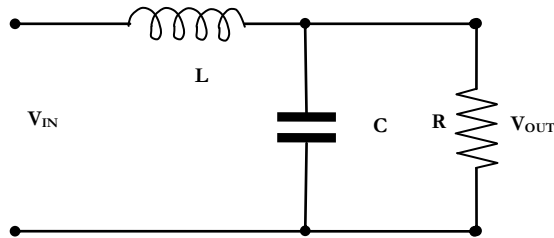
Το πηνίο και ο παράλληλος συνδυασμός RC του σχήματος 4.11, διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε διαιρέτη τάσης

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{\frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}}{\frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}}} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R \cdot \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \cdot \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right)} = \frac{R}{R + (j\omega)^2 RLC + j\omega L} \Rightarrow$$

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{1}{1 + s\frac{L}{R} + s^2 LC} \Rightarrow \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad (4.26)$$

ή  $\Rightarrow \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}$ . Το μέτρο της συνάρτησης αυτής δίνεται από τη σχέση:

$$\left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2}} \quad (4.27)$$



Σχήμα 4.11. Παθητικό βαθυπερατό LC φίλτρο (2ης τάξης)

Η συχνότητα αποκοπής είναι η συχνότητα όπου ισχύει

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \omega_c^2 LC\right)^2 + \left(\omega_c \frac{L}{R}\right)^2}} \Rightarrow \left(1 - \omega_c^2 LC\right)^2 + \left(\omega_c \frac{L}{R}\right)^2 = 2$$

$$1 - 2\omega_c^2 LC + \omega_c^4 (LC)^2 + \omega_c^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2 = 2 \Rightarrow -2\omega_c^2 LC + \omega_c^4 (LC)^2 + \omega_c^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2 = 1$$

$$\omega_c^4 (LC)^2 + \omega_c^2 \left(\frac{L^2}{R^2} - 2LC\right) - 1 = 0 \Rightarrow \omega_c^2 = \frac{-\left(\frac{L^2}{R^2} - 2LC\right) \pm \sqrt{\left(\frac{L^2}{R^2} - 2LC\right)^2 + 4L^2 C^2}}{2L^2 C^2}$$

$$\omega_c^2 = \frac{2LCR^2 - L^2 \pm RL \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4LC + 8R^2 C^2}}{2L^2 R^2 C^2}$$

Η τελευταία σχέση έχει 4 λύσεις για την  $\omega_c$ . Οι δύο από αυτές απορρίπτονται ως αρνητικές και μη έχουσες φυσική σημασία. Επομένως, το φίλτρο μας παρόλο που είναι βαθυπερατό, μοιάζει με ζωνοπερατό, αφού έχει 2 συχνότητες αποκοπής:

$$\omega_{c1} = \sqrt{\frac{2LCR^2 - L^2 + RL \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4LC + 8R^2 C^2}}{2L^2 R^2 C^2}} \quad (4.28)$$

και την

$$\omega_{c2} = \sqrt{\frac{2LCR^2 - L^2 - RL \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4LC + 8R^2 C^2}}{2L^2 R^2 C^2}} \quad (4.29)$$

Ο γεωμετρικός μέσος αυτών των συχνοτήτων

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}} \quad (4.30)$$

μας δίνει την **Κεντρική Συχνότητα** του φίλτρου. Το εύρος ζώνης αυτού B είναι το διάστημα μεταξύ των συχνοτήτων  $\omega_{c1}$  και  $\omega_{c2}$ . (Σχήμα 4.12)

$$B = \omega_{c1} - \omega_{c2} \quad (4.31)$$



#### 4.1.4. Συντελεστές ποιότητας και απόσβεσης

Ο **Συντελεστής Ποιότητας** καθορίζει το ύψος και το πλάτος της κορυφής στην απόκριση συχνότητας. Αν το Q είναι υψηλό, τότε το φίλτρο τείνει να κάνει «καμπάνα» σε μια συχνότητα συντονισμού κοντά στη συχνότητα αποκοπής. Ο ορισμός του είναι

$$Q = \frac{\omega_0}{B} \quad (4.32)$$

όπου  $\omega_0$  η κεντρική συχνότητα που προαναφέραμε και B το εύρος ζώνης (bandwidth) μεταξύ των 2 συχνοτήτων αποκοπής. Επίσης

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad (4.33)$$

όπου  $\zeta$  ο **συντελεστής απόσβεσης**

Αντικαθιστώντας τις 4.28 και 4.29 στην 4.30 αποδεικνύεται ότι

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.34)$$

Πράγματι, δεδομένης της 4.27, το μέγιστο του κέρδους συμβαίνει στη συχνότητα όπου ο παρονομαστής γίνεται ελάχιστος. Η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2 \text{ συμβαίνει όταν } 1 - \omega^2 LC = 0, \text{ δηλαδή όταν } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \text{ Έτσι,}$$

επιβεβαιώνεται η 4.34 με απλές σκέψεις, χωρίς να χρειαστεί να βρούμε με χρονοβόρους υπολογισμούς τις συχνοτητες αποκοπής.

Αντικαθιστώντας τις 4.28 και 4.29 στην 4.31 αποδεικνύεται ότι

$$B = \frac{1}{RC} \quad (4.35)$$

Από τις 4.32, 4.34 και 4.35 προκύπτει ο συντελεστής ποιότητας του φίλτρου

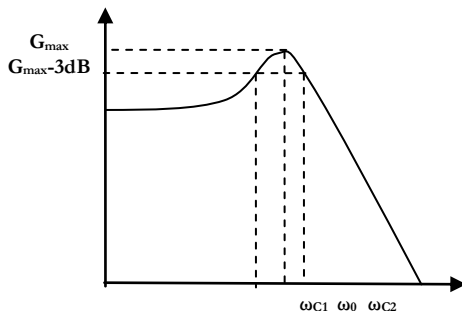
$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4.36)$$

Με τα δεδομένα αυτά, η σχέση 4.26 γίνεται

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + Bs + \omega_0^2} \quad (4.37)$$

Γενικά, η συνάρτηση μεταφοράς ενός βαθυπερατού φίλτρου 2ης τάξης είναι της μορφής της σχέσης 4.37 η οποία γράφεται και ως εξής

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (4.38)$$



Σχήμα 4.12. Βαθυπερατό φίλτρο με «καμπάνα»

Μία άλλη προσέγγιση η οποία περιλαμβάνει και τα παθητικά και τα ενεργά φίλτρα, είναι η ακόλουθη: Η γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς ενός βαθυπερατού φίλτρου 2ης τάξης είναι:

$$H(s) = \frac{K}{1 + \alpha_1 \left(\frac{s}{\omega_c}\right) + \alpha_2 \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2} = \frac{K}{1 + a_1 s + a_2 s^2} \quad (4.39)$$

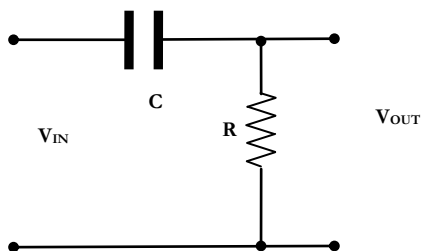
Όπου  $a_1 = \frac{2\zeta}{\omega_0}$ ,  $a_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$ ,  $\alpha_1 = 2\zeta$  και  $\alpha_2 = 1$ ,  $K$  είναι το DC κέρδος και  $\omega_c$  η συχνότητα αποκοπής. Σε περίπτωση που το φίλτρο δεν παρουσιάζει «καμπάνα» τότε

$$\omega_0 = \omega_c \quad (4.40)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση του παραδείγματός μας  $H(s) = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}s + LCs^2}$

## 4.2. Παθητικά Υψιπερατά Φίλτρα

### 4.2.1. Το Παθητικό Υψιπερατό Φίλτρο RC (1ης Τάξης)



Σχήμα 4.13. Το RC παθητικό υψιπερατό φίλτρο

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = H(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (4.41)$$

$$\left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = |H(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (4.42)$$

$$\varphi = \text{τοξεφ}(\infty) - \text{τοξεφ}(\omega RC) = 90^0 - \text{τοξεφ}(\omega RC) \quad (4.43)$$

Διερεύνηση:

☒ Αν  $\omega=0$  τότε  $\left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = 0$  και  $\varphi=90^0$

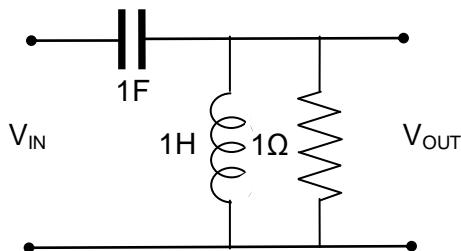
☒ Αν  $\omega \rightarrow \infty$  τότε  $\left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2} + (RC)^2}} = 1$  και  $\varphi=0^0$

☒ Αναζητούμε τη συχνότητα αποκοπής, λύνοντας την εξίσωση:

$$\left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + (\omega RC)^2 = 2(\omega RC)^2 \Rightarrow (\omega RC)^2 = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC}$$

Στη συχνότητα αποκοπής η φάση είναι  $\varphi = \text{τοξεφ}(\infty) - \text{τοξεφ}(1) = 90^0 - 45^0 = 45^0$

#### 4.2.2. Ένα υψιπερατό φίλτρο RLC (2ης Τάξης)



Σχήμα 4.14. Ένα παθητικό υψιπερατό φίλτρο 2ης τάξης

Η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος είναι

$$H(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{όπου } Z_1 = \frac{1}{sC} \quad \text{και } Z_2 \text{ είναι ο παράλληλος συνδυασμός του πηνίου } 1H$$

$$\text{και της αντίστασης } 1\Omega: Z_2 = \frac{Z_L \cdot Z_R}{Z_L + Z_R} \quad \text{όπου } Z_L = sL \quad \text{και } Z_R = R. \text{ Επομένως } Z_2 = \frac{sRL}{R + sL}$$

και

$$H(s) = \frac{\frac{sRL}{R+sL}}{\frac{1}{sC} + \frac{sRL}{R+sL}} = \frac{s^2RLC}{R+sL+s^2RLC} = \frac{s^2}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad (4.44)$$

Με αντικατάσταση των τιμών των στοιχείων η τελευταία σχέση γίνεται

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + s + 1} \quad (4.45)$$

Το κύκλωμα του σχήματος είναι φίλτρο δευτέρης τάξης εφόσον αποτελείται από δύο στοιχεία τύπου L ή C. Αυτό επιβεβαιώνεται και με τη συνάρτηση μεταφοράς της οποίας ο παρονομαστής είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Επομένως, αναμένουμε ότι η κλίση της καμπύλης κέρδους για τη ζώνη αποκοπής θα είναι 40 dB/δεκάδα ή 12dB/οκτάβα. Θέτοντας  $s=j\omega$  προκύπτει

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2RLC}{R+j\omega L+(j\omega)^2RLC} = -\frac{\omega^2RLC}{(R-\omega^2RLC)+j\omega L} \quad (4.46)$$

Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή το κέρδος του φίλτρου, θα είναι

$$G(\omega) = \frac{\omega^2RLC}{\sqrt{(R-\omega^2RLC)^2 + \omega^2L^2}}$$

Όταν  $\omega \rightarrow 0$  τότε  $G(\omega) \rightarrow \frac{0}{\sqrt{R}} = 0$

Όταν  $\omega \rightarrow \infty$  τότε  $G(\omega) = \frac{RLC}{\sqrt{\frac{R^2 - 2\omega^2R^2LC + \omega^4(RLC)^2}{\omega^4} + \frac{L^2}{\omega^2}}} \rightarrow \frac{RLC}{RLC} = 1$

Εκ πρώτης, αναγνωρίζουμε ότι πρόκειται για υψιπερατό φίλτρο. Τέλος, θα αναζητήσουμε τη συχνότητα αποκοπής  $\omega_c$ . Δηλαδή τη συχνότητα όπου ο λόγος της τάσης εξόδου προς την τάση εισόδου ισούται με 0.707. Η συχνότητα αποκοπής βρίσκεται με λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow \frac{\omega_c^2RLC}{\sqrt{(R-\omega_c^2RLC)^2 + \omega_c^2L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\ (R-\omega_c^2RLC)^2 + \omega_c^2L^2 &= 2(\omega_c^2RLC)^2 \Rightarrow \\ \omega_c^4(RLC)^2 + \omega_c^2(2R^2LC - L^2) - R^2 &= 0 \\ \Delta = 8(R^2LC)^2 + L^3(L - 4R^2C) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των στοιχείων προκύπτει  $\Delta=5$  και επομένως

$$\omega_c^2 = \frac{-(2R^2LC - L^2) \pm \sqrt{\Delta}}{2(RLC)^2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

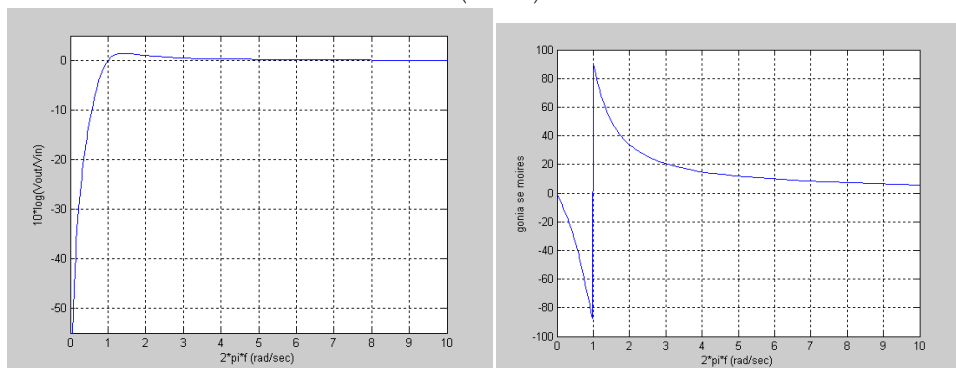
Η εξίσωση έχει 4 λύσεις, 3 εκ των οποίων δεν έχουν φυσική σημασία για τη συχνότητα αποκοπής και επομένως, η συχνότητα αποκοπής προκύπτει  $\omega_c = 0.62 \text{ rad/sec}$

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι το κύκλωμα είναι ένα παθητικό υψιπερατό φίλτρο 2ης τάξης με συχνότητα αποκοπής 0.125 Hz και κλίση 40dB/δεκάδα για τις χαμηλές συχνότητες.

Ας επιβεβαιώσουμε διαγραμματικά τα παραπάνω.

Με αντικατάσταση των τιμών των στοιχείων, το κέρδος του κυκλώματος είναι

$$G(\omega) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$



Σχήμα 4.15. Απόκριση κέρδους και φάσης του κυκλώματος του σχήματος 4.14

Για να ολοκληρώσουμε τη μελέτη της συνάρτησης μεταφοράς, μένει ο υπολογισμός της γωνίας  $\varphi$ . Από τη σχέση (4.46), με αντικατάσταση των τιμών των στοιχείων, προκύπτει

$$\varphi = 180^0 - \arctan \frac{\omega}{1 - \omega^2}$$

Το  $180^0$  προκύπτει από τη φάση του αριθμητή, ο οποίος είναι ένας αρνητικός πραγματικός αριθμός.

### 4.2.3. Γενικευμένο Υψιπερατο φίλτρο

Η συνάρτηση μεταφοράς τάσης ενός υψιπερατού φίλτρου πρώτης τάξης στη γενική της μορφή είναι:

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - j\frac{\omega_C}{\omega}} = \frac{K}{1 + \frac{\omega_C}{s}} = \frac{K \cdot s}{s + \omega_C} = \frac{K \cdot j\frac{\omega}{\omega_C}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_C}} \quad (4.47)$$

Χαρακτηρίζεται ως φίλτρο πρώτης τάξης, γιατί το  $\omega$  εμφανίζεται στον παρονομαστή με εκθέτη (-1). Είναι υψιπερατό διότι  $|H|=0$  για  $\omega=0$  και για πολύ υψηλές συχνότητες το  $|H|$  είναι σταθερό.

Τα υψιπερατά φίλτρα 1ης τάξης (ανεξάρτητα αν είναι παθητικά ή ενεργά) έχουν συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$H(s) = \frac{K}{1 + \frac{a_1}{s}}$$

Για το παράδειγμα της παραγράφου 4.2.1 ισχύει  $K=1$  και  $a_1 = \frac{1}{RC} = \omega_c$

Τα υψιπερατά φίλτρα 2ης τάξης (ανεξάρτητα αν είναι παθητικά ή ενεργά) έχουν συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

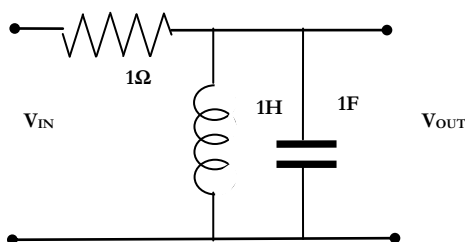
$$H(s) = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + a_1 \cdot s + b_1} \quad (4.48)$$

Για το παράδειγμα της παραγράφου 4.2.2 είναι  $a_1 = B = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$ ,  $b_1 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

### 4.3. Παθητικά Ζωνοπερατά Φίλτρα

**Φ**ίλτρο ευρείας ζώνης (wide-band filter) τυπικά χαρακτηρίζεται αυτό στο οποίο η άνω συχνότητα αποκοπής  $\omega_2$  είναι πολύ μεγαλύτερη από την κάτω συχνότητα αποκοπής ( $\omega_2 > 10\omega_1$ ). Αποδεικνύεται ότι για το συντελεστή ποιότητας ισχύει  $Q < 0.35$ . Φίλτρο στενής ζώνης (narrow-band filter) χαρακτηρίζεται αυτό του οποίου το εύρος ζώνης είναι πολύ μικρότερο από την κεντρική συχνότητα ( $B < 0.1\omega_0$ ). Σε αυτή την περίπτωση, αποδεικνύεται ότι  $Q > 10$ .

#### 4.3.1. Ένα Παθητικό Ζωνοπερατό Φίλτρο RLC



Σχήμα 4.16: Ένα ζωνοπερατό φίλτρο RLC

Η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος είναι

$H(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$ , όπου  $Z_1 = R$  και  $Z_2$  είναι ο παράλληλος συνδυασμός του πηνίου  $1H$

και του πυκνωτή  $1F$ :  $Z_2 = \frac{Z_L \cdot Z_C}{Z_L + Z_C}$ , όπου  $Z_L = sL$  και  $Z_C = \frac{1}{sC}$ . Επομένως:

$$Z_2 = \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{sC} + sL} = \frac{sL}{1 + s^2LC} \quad \text{και} \quad H(s) = \frac{\frac{sL}{1 + s^2LC}}{R + \frac{sL}{1 + s^2LC}} = \frac{sL}{R + sL + s^2RLC} \quad \eta$$

$$H(s) = \frac{s \frac{1}{RC}}{s^2 + s \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad (4.48)$$

Με αντικατάσταση των τιμών των στοιχείων η 4.48 γίνεται

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} \quad (4.49)$$

Το κύκλωμα του σχήματος είναι φίλτρο δεύτερης τάξης εφόσον αποτελείται από δύο στοιχεία τύπου  $L$  ή  $C$ . Αυτό επιβεβαιώνεται και με τη συνάρτηση μεταφοράς της οποίας ο παρονομαστής είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Επομένως, αναμένουμε ότι η κλίση της καμπύλης κέρδους για τη ζώνη αποκοπής θα είναι  $40 \text{ dB/δεκάδα}$  ή  $12 \text{ dB/οκτάβα}$ .

$$H(j\omega) = \frac{j\omega \frac{1}{RC}}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\omega \frac{1}{RC}} \quad (4.50)$$

$$G(\omega) = |H(\omega)| = \frac{\omega \frac{1}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{1}{RC}\right)^2}} \quad (4.51)$$

$$\varphi = 90^\circ - \arctan \frac{\omega \frac{1}{RC}}{\frac{1}{LC} - \omega^2} \quad (4.52)$$

Από την 4.51 παρατηρούμε ότι: Όταν  $\omega \rightarrow 0$  τότε  $G(\omega) \rightarrow \frac{0}{\sqrt{R}} = 0$ . Όταν  $\omega \rightarrow \infty$  τότε

$G(\omega) \rightarrow 0$ . Εκ πρώτης, αναγνωρίζουμε ότι πρόκειται για ζωνοπερατό φίλτρο. Θα αναζητήσουμε τη συχνότητα  $\omega_0$  όπου το κέρδος γίνεται μέγιστο. Η μέγιστη δυνατή τιμή του κέρδους είναι η μονάδα. Επομένως, για να βρούμε την κεντρική συχνότητα λύνουμε την εξίσωση

$$1 = \frac{\omega \frac{1}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{1}{RC}\right)^2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε τις συχνότητες αποκοπής λύνοντας την εξίσωση

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega \frac{1}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{1}{RC}\right)^2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{1}{RC}\right)^2 = 2\left(\omega \frac{1}{RC}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 = \left(\omega \frac{1}{RC}\right)^2 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 = \pm \omega \frac{1}{RC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^2 + \frac{1}{RC}\omega - \omega_0^2 = 0 \\ \omega^2 - \frac{1}{RC}\omega - \omega_0^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 + 4\omega_0^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega = -\frac{1}{2RC} \left(1 \pm \sqrt{1 + (2RC\omega_0)^2}\right) \\ \omega = \frac{1}{2RC} \left(1 \pm \sqrt{1 + (2RC\omega_0)^2}\right) \end{cases}$$

Από τις 4 λύσεις για την  $\omega$ , μόνο οι δύο έχουν φυσική σημασία (δεν είναι αρνητικές):

$\omega_1 = \frac{1}{2RC} \left(-1 + \sqrt{1 + (2RC\omega_0)^2}\right)$   $\omega_2 = \frac{1}{2RC} \left(1 + \sqrt{1 + (2RC\omega_0)^2}\right)$ . Αυτές είναι οι συχνότητες αποκοπής. Το γινόμενο τους μας δίνει το γεωμετρικό μέσο  $\omega_0^2$  και η απόστασή τους θα μας δώσει το εύρος ζώνης

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}$$

Επομένως, η σχέση 4.48 μπορεί να γραφεί ως εξής

$$H(s) = \frac{s \frac{\omega_0}{Q}}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} = \frac{s \cdot B}{s^2 + s \cdot B + \omega_0^2} \quad (4.53)$$

και η 4.50 γίνεται

$$H(j\omega) = \frac{j\omega B}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega B} \quad (4.54)$$

όπου  $B$  το εύρος ζώνης (bandwidth) και  $\omega_0$  η κεντρική συχνότητα.

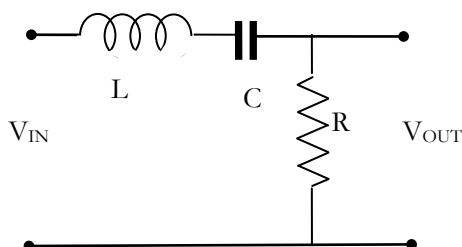


### 4.3.2. Ένα Παθητικό Ζωνοπερατό φίλτρο LCR

Χρησιμοποιώντας διαιρέτη τάσης για το κύκλωμα του σχήματος 4.17, προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(j\omega) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{s^2LC + sRC + 1} \quad (4.55)$$

Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για να βρούμε τις παραμέτρους του φίλτρου  $\omega_0$ ,  $\omega_{c1}$  και  $\omega_{c2}$ . Μέθοδος 1: Μετατρέπουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε μία μορφή όμοια με τη μορφή της εξίσωσης (4.53).



Σχήμα 4.17. Ένα ζωνοπερατό φίλτρο LCR

$$H(j\omega) = \frac{s \frac{R}{L}}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \quad (4.56)$$

Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για να βρούμε τις παραμέτρους του φίλτρου  $\omega_0$ ,  $\omega_{c1}$  και  $\omega_{c2}$ . Μέθοδος 1: Μετατρέπουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε μία μορφή όμοια με τη μορφή της εξίσωσης (4.53).

Συγκρίνοντας τις σχέσεις 4.56 και 4.53 προκύπτει ότι το εύρος ζώνης είναι  $B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$ , και η κεντρική συχνότητα  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  και επομένως ο

συντελεστής ποιότητας θα είναι  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων 
$$\begin{cases} \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \\ \omega_2 \cdot \omega_1 = \frac{1}{LC} \end{cases}$$

προκύπτουν οι συχνότητες αποκοπής

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} \left( \sqrt{\left( \frac{4L}{R^2 C} + 1 \right)} - 1 \right) \text{ και } \omega_2 = \frac{R}{2L} \left( \sqrt{\left( \frac{4L}{R^2 C} + 1 \right)} + 1 \right)$$

Μέθοδος 2: (α) Ξεκινώντας από την 4.54, βρίσκουμε το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς. (β) Βρίσκουμε τις τιμές του κέρδους για ακραίες συχνότητες. (γ) Βρίσκουμε πού παρουσιάζει μέγιστο η συνάρτηση του κέρδους. (δ) Βρίσκουμε τη μέγιστη αυτή τιμή  $G_{\max}$ . (ε) Λύνουμε την εξίσωση  $G = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$  και βρίσκουμε τις συχνότητες αποκοπής.

**Σύνθετες αντιστάσεις εισόδου και εξόδου στο ζωνοπερατό φίλτρο**

$$Z_i = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \Rightarrow Z_i |_{\min} = R$$

$$Z_o = \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) // R \Rightarrow Z_o |_{\max} = R$$

### 4.3.3. Βαθυπερατό και Υψιπερατό Φίλτρο σε Σειρά

Συνδέοντας σε σειρά ένα βαθυπερατό φίλτρο συχνότητας αποκοπής  $f_H = 1$  KHz, με ένα υψιπερατό φίλτρο συχνότητας αποκοπής  $f_L = 10$  KHz, στην είσοδο του υψιπερατού θα εισέρχονται μόνο αυτές οι συχνότητες που κατάφεραν να περάσουν από το βαθυπερατό, δηλαδή οι συχνότητες κάτω από 1 KHz. Το υψιπερατό φίλτρο με τη σειρά του, θα κόψει τις χαμηλές συχνότητες, δηλαδή αυτές που είναι κάτω από 10 KHz και στην έξοδο δεν θα λάβουμε τίποτα!

Κατανοούμε λοιπόν, ότι για να έχουμε ένα ζωνοπεραστό φίλτρο θα πρέπει να συνδέσουμε σε σειρά ένα βαθυπερατό φίλτρο με ένα υψιπερατό, όμως, η συχνότητα αποκοπής του βαθυπερατού θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα αποκοπής του υψιπερατού φίλτρου. Το κύκλωμα του σχήματος 4.18 δίνει αυτή την τοπολογία, αλλά

πρέπει  $\frac{1}{R_1 C_1} > \frac{1}{R_2 C_2}$

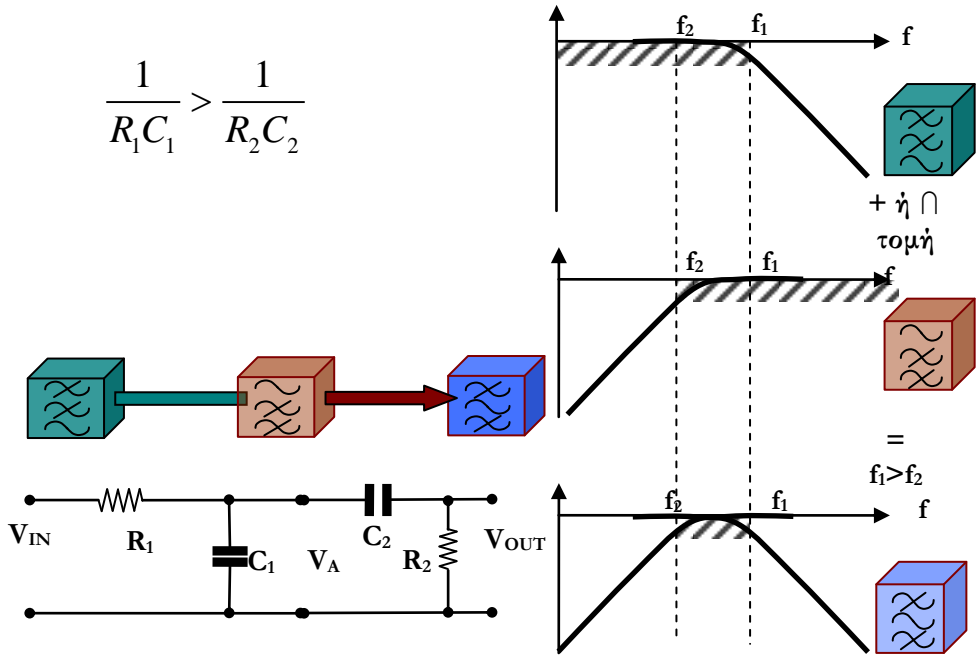
Παρατηρώντας ότι ο  $C_2$  και η  $R_2$  διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, εφαρμόζουμε διαίρετη τάσης:

$$\frac{V_{OUT}}{V_A} = \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{sR_2 C_2}{1 + sR_1 C_2} \quad (4.57)$$

Η σύνθετη αντίσταση που υπάρχει στα άκρα της  $V_A$  είναι ο παράλληλος συνδυασμός της  $Z_{C1}$  με την  $(R_2 + Z_{C2})$  και την ονομάζουμε  $Z$  και το κύκλωμα μετασχηματίζεται σε κύκλωμα που περιλαμβάνει την αντίσταση  $R_1$  και τη σύνθετη αντίσταση  $Z$ .

$$Z = \frac{\frac{1}{sC_1} \cdot \left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right)}{\frac{1}{sC_1} + \left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right)} = \frac{1 + sC_2 R_2}{s(C_1 + C_2) + s^2 C_1 C_2 R_2}$$

Τώρα, η  $Z$  και η  $R_1$  διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα και εφαρμόζουμε εκ νέου διαιρέτη τάσης



Σχήμα 4.18. Ένα ζωνοπερατό φίλτρο και η απόκριση αυτού.

$$\frac{V_{IN}}{V_A} = \frac{R_1 + \frac{1 + sC_2 R_2}{sC_2 + sC_1 + s^2 C_1 C_2 R_2}}{\frac{1 + sC_2 R_2}{sC_2 + sC_1 + s^2 C_1 C_2 R_2}} = \frac{sC_2 R_1 + sC_1 R_1 + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + 1 + sC_2 R_2}{1 + sC_2 R_2} \quad (4.58)$$

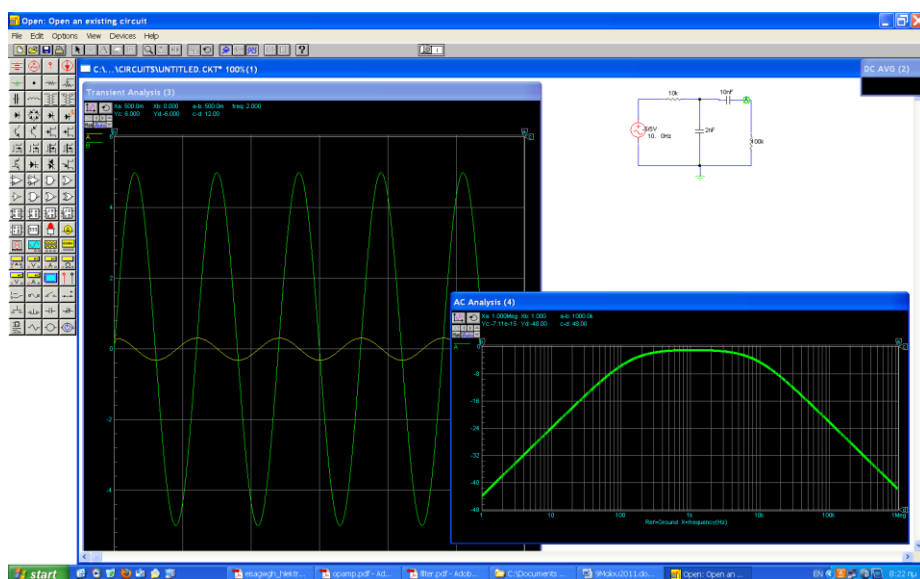
Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις 4.57 και 4.58 προκύπτει

$$\frac{V_{IN}}{V_{OUT}} = \frac{1 + sC_2 R_2}{sC_2 R_2} \frac{sC_2 R_1 + sC_1 R_1 + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + 1 + sC_2 R_2}{1 + sC_2 R_2}$$

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{sC_2 R_2}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s(C_2 R_1 + C_1 R_1 + C_2 R_2) + 1}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, τα ζωνοπερατά φίλτρα μπορούν να υλοποιηθούν τοποθετώντας ένα υπερατά και ένα βαθυπερατό φίλτρο σε σειρά. Το υπερατά φίλτρο θέτει τη χαμηλή συχνότητα αποκοπής, ενώ το βαθυπερατό φίλτρο θέτει την υψηλή συχνότητα αποκοπής.

Αυτού του τύπου τα φίλτρα χρησιμοποιούνται συχνότερα από τα RLC λόγω της έλλειψης των ογκωδών πηνίων. Προκειμένου να έχουμε μια καλή σύζευξη τάσης σ' αυτό το κύκλωμα, η σύνθετη αντίσταση εξόδου του βαθυπερατού φίλτρου ( $Z_{out,max}=R_1$ ) πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από τη σύνθετη αντίσταση εισόδου του υψιπερατού φίλτρου ( $R_{in,min}=R_2$ ). Δηλαδή  $R_1 \ll R_2$ .



Σχήμα 4.19. Η απόκριση ενός ζωνοπερατού φίλτρου (Προσομοίωση με το CircuitLogix).

#### 4.3.4. Γενικευμένο πρότυπο ζωνοπερατού φίλτρου

Τα ζωνοπερατά φίλτρα δεύτερης τάξης περιλαμβάνουν δύο άεργα στοιχεία (στοιχεία αποθήκευσης φορτίου: 2 πυκνωτές ή 2 πηνία ή ένα από το κάθε ένα). Η συνάρτηση μεταφοράς ενός ζωνοπερατού φίλτρου 2ης τάξης μπορεί να γραφεί ως εξής:

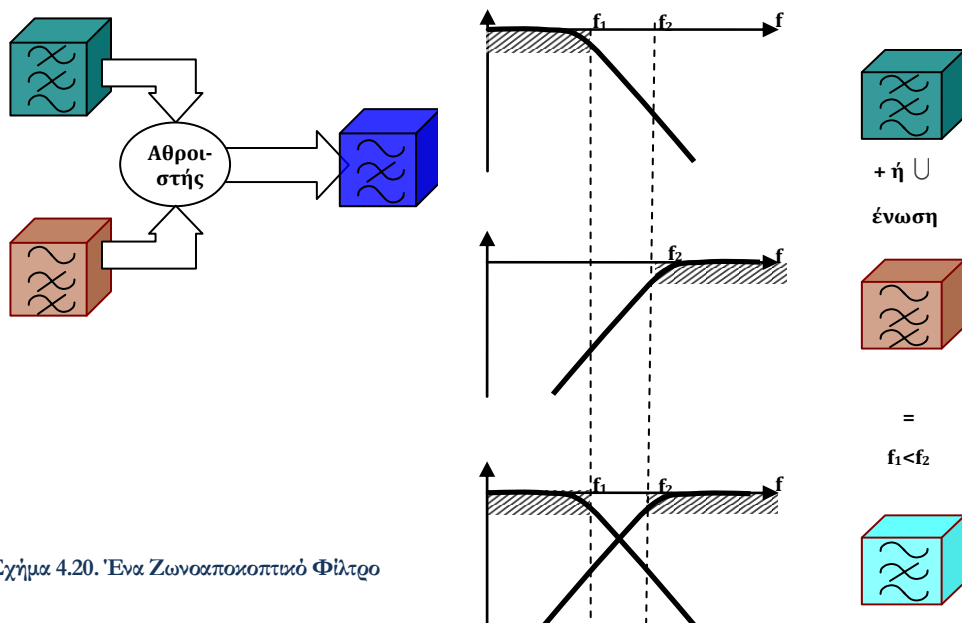
$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad \left\langle H(j\omega) = -\frac{|K|}{K} \tan^{-1} \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \right\rangle$$

Η μέγιστη τιμή του  $|H(j\omega)| = |K|$  καλείται κέρδος του φίλτρου. Η χαμηλή και η υψηλή συχνότητες αποκοπής μπορούν να υπολογιστούν θεωρώντας ότι  $|H(j\omega)|_{max} = K$  και

θέτοντας  $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$ . Λύνοντας ως προς  $\omega_c$  λαμβάνουμε δύο ρίζες:  $\omega_{CL}$  και  $\omega_{CH}$  που είναι οι άνω και η κάτω συχνότητες αποκοπής.

#### 4.4. Ζωνοαποκοπτικά Φίλτρα



Σχήμα 4.20. Ένα Ζωνοαποκοπτικό Φίλτρο

Όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 4.20, αν τις εξόδους ενός βαθυπερατού φίλτρου και ενός υψιπερατού τις θέσουμε ως εισόδους σε έναν αθροιστή, όπως αυτόν του σχήματος 5.6 ή 5.8, τότε θα έχουμε ένα ζωνοαποκοπτικό φίλτρο. Ο μόνος περιορισμός είναι: Η συχνότητα αποκοπής βαθυπερατού φίλτρου (κάτω συχνότητα για το ζωνοαποκοπτικό) να είναι μικρότερη από τη συχνότητα αποκοπής του υψιπερατού φίλτρου (πάνω συχνότητα για το ζωνοαποκοπτικό).

#### 4.5. Κυκλώματα Παραγωγίσισης και Ολοκλήρωσης

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός παθητικού υψιπερατού φίλτρου 1ης τάξης, χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.41 ή 4.47 είναι

$$\frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{s}{\omega_c + s} \quad (4.59)$$

Λύνοντας χιαστί, προκύπτει

$$\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) \cdot U_{OUT} = \frac{s}{\omega_c} \cdot U_{IN} \quad (4.60)$$

Σε πολύ χαμηλές συχνότητες  $\omega \rightarrow 0$  ισχύει  $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \rightarrow 1$  και η (4.60) γίνεται:

$$U_{OUT} = \frac{s}{\omega_c} \cdot U_{IN}$$

$$U_{OUT} = \frac{1}{\omega_c} \frac{d(U_{IN})}{dt} \quad (4.61)$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι **το υπερατό φίλτρο τις ΠΟΛΥ χαμηλές συχνότητες τις κόβει και τις παραγωγίζει**. Πράγματι, από τη φάση της συνάρτησης μεταφοράς αποδεικνύεται ότι για το παθητικό υπερατό φίλτρο 1ης τάξης, η φάση για πολύ χαμηλές συχνότητες γίνεται  $\varphi=90^\circ$ . Δηλαδή το σήμα εξόδου προηγείται του σήματος εισόδου κατά  $90^\circ$ . Ας αναλογιστούμε ένα απλό ημίτονο το οποίο μεταφέρεται κατά τον οριζόντιο άξονα προς τα αριστερά κατά  $\frac{1}{4}$  της περιόδου του. Το σήμα που προκύπτει είναι ένα συνημίτονο. Είναι γεγονός ότι η παράγωγος του ημιτόνου είναι το συνημίτονο.

Με την ίδια διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε ότι όπως το υπερατό φίλτρο είναι ένα κύκλωμα παραγωγίσιμης, έτσι και **το βαθυπερατό φίλτρο είναι ένα κύκλωμα ολοκλήρωσης για τις ΠΟΛΥ υψηλές συχνότητες**. Αρχεί κάθε φορά να επιλέγεται η κατάλληλη συχνότητα. Το βαθυπερατό φίλτρο ολοκληρώνει σήματα πολύ υψηλών συχνοτήτων (σε σχέση πάντα με τη συχνότητα αποκοπής). Από τις σχέσεις 4.11 ή 4.18, προκύπτει

$$\frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} \quad (4.62)$$

$$\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right) \cdot U_{OUT} = U_{IN} \quad (4.63)$$

$$\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) \cdot U_{OUT} = U_{IN}$$

Σε πολύ υψηλές συχνότητες όπου  $\omega \rightarrow \infty$  θα ισχύει:  $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) \rightarrow j\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{s}{\omega_c}$  και επομένως η (4.63) γίνεται

$$\frac{s}{\omega_c} \cdot U_{OUT} = U_{IN} \quad (4.64)$$

$$U_{OUT} = \frac{\omega_c}{s} U_{IN} \quad (4.65)$$

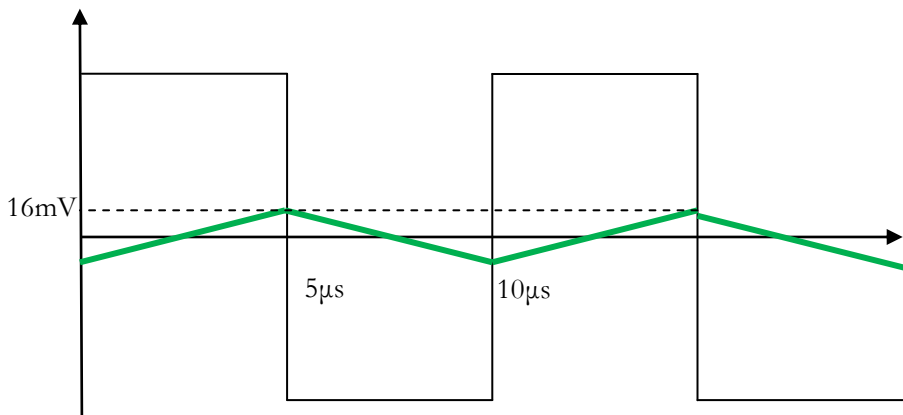
$$U_{OUT} = \omega_c \cdot \int U_{IN} \quad (4.66)$$

Πράγματι η φάση της συνάρτησης μεταφοράς του βαθυπερατού φίλτρου αποδείχθηκε ότι είναι  $\phi = -\arctan\left(\frac{f}{f_c}\right)$ . Για πολύ υψηλές συχνότητες ( $f \rightarrow \infty$ ) προκύπτει ότι  $\phi = -90^\circ$ .

Δηλαδή η έξοδος έπεται της εισόδου κατά  $90^\circ$ . Ας φανταστούμε ένα ημίτονο το οποίο το «σέρνουμε» προς τα δεξιά κατά  $1/4$  της περιόδου του. Το σήμα που θα προκύψει είναι ένα συνημίτονο ανεστραμένο κατά τον άξονα των χρόνων. Πράγματι το ολοκλήρωμα του  $\eta\mu(x)$  είναι το  $-\sigma\upsilon\upsilon(x)$ .

**Παράδειγμα 4.2:** Έστω βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 159 Hz. Στην είσοδό του εισέρχεται τετραγωνικός παλμός με περίοδο 10 $\mu$ s, πλάτος 10V και μηδενικό DC. Να βρεθεί το σήμα στην έξοδο του φίλτρου.

**Λύση:** Το σήμα εισόδου έχει συχνότητα  $f = \frac{1}{10} \text{ MHz} = 100 \text{ KHz}$ . Η συχνότητα αυτή είναι πολύ υψηλή σε σχέση με τη συχνότητα αποκοπής του βαθυπερατού φίλτρου. Ως συνέπεια, το σήμα θα ολοκληρωθεί και θα καταπιεστεί. Ο τετραγωνικός παλμός έχει συνάρτηση  $f_1(x) = 10$  για το πρώτο μισό της περιόδου και  $f_2(x) = -10$  για το δεύτερο μισό της περιόδου. Χονδρικά, το ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $f_1$  είναι η συνάρτηση  $g_1(x) = 10x$ , ενώ το ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $f_2$  είναι η  $g_2(x) = -10x$ . Επομένως, ο τετραγωνικός παλμός θα μετατραπεί σε τριγωνικό.



Σχήμα 4.21. Το βαθυπερατό φίλτρο κόβει και ολοκληρώνει τις υψηλές συχνότητες

Όσον αφορά στο πλάτος του τριγωνικού παλμού, αυτό θα προκύψει από τη σχέση 4.9, όπου  $f=100\text{KHz}$  και  $f_c=159\text{Hz}$ . Με απλή αντικατάσταση προκύπτει ότι  $U_{\text{OUT}}/U_{\text{IN}}=1.6 \cdot 10^{-3}$ . Εφόσον το μέγιστο πλάτος του σήματος εισόδου είναι 10 V, το μέγιστο πλάτος του σήματος εξόδου θα είναι περίπου 16mV.

## 4.6. Γραμμές μεταφοράς

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία των γραμμών μεταφοράς εφόσον αυτές είναι που θα παίξουν το ρόλο των καλωδίων ή των κυματοδηγών στα ηλεκτρονικά συστήματα υψηλών συχνοτήτων και στην πράξη είναι βαθυπερατά φίλτρα.

Ένα τυπικό πρόβλημα μηχανικού είναι η αντιμετώπιση του προβλήματος μεταφοράς ενός σήματος από μία γεννήτρια σε ένα φορτίο. Μια γραμμή μεταφοράς είναι το κομμάτι ενός κυκλώματος που δίνει απευθείας ζεύξη μεταξύ πηγής και φορτίου.

Γραμμές μεταφοράς μπορούν να υλοποιηθούν με διαφορετικούς τρόπους και παρουσιάζονται στο σχήμα 4.22. Τυπικά παραδείγματα είναι η γραμμή παράλληλων αγωγών και το ομοαξονικό καλώδιο. Για ευκολία, για την αναπαράσταση των συνδέσεων του κυκλώματος χρησιμοποιούμε στις περισσότερες κυκλωματικές αναπαραστάσεις τη γραμμή παράλληλων αγωγών, αλλά αυτή η θεωρία εφαρμόζεται σε όλους τους τύπους γραμμών μεταφοράς.

### 4.6.1. Συγκεντρωμένα και Κατανεμημένα Κυκλώματα

Σε κυκλώματα χαμηλών συχνοτήτων, έχουμε μάθει να αντιμετωπίζουμε όλες τις γραμμές μεταφοράς (σύρματα που συνδέουν τα διάφορα στοιχεία του κυκλώματος) σαν ιδανικές γραμμές, χωρίς πτώση τάσης και χωρίς ενδογενή σύνθετη αντίσταση (συγκεντρωμένα κυκλώματα). Η προσέγγιση αυτή είναι πολύ λογική εφόσον το μήκος των γραμμών είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος του σήματος. Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, το μετρούμενο δυναμικό και ρεύμα είναι τα ίδια, σε οποιοδήποτε σημείο του ίδιου αγωγού, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 4.24.

$$V_R = V_G \frac{Z_R}{Z_G + Z_R}$$

Για παράδειγμα, ας δούμε το σήμα της ΔΕΗ που παίρνουμε στα σπίτια μας. Αυτό το σήμα είναι ένα ημιτονικό σήμα, υψηλής ισχύος, συχνότητας 50 Hz ή 60 Hz (αναλόγως τη χώρα). Υποθέτοντας ότι ο μονωτής μεταξύ των καλωδίων είναι ο αέρας ( $\epsilon=\epsilon_0$ ), το μήκος κύματος για τα 50 Hz είναι:

$$\lambda = \frac{c}{f} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 \text{ m} = 6000\text{km}$$

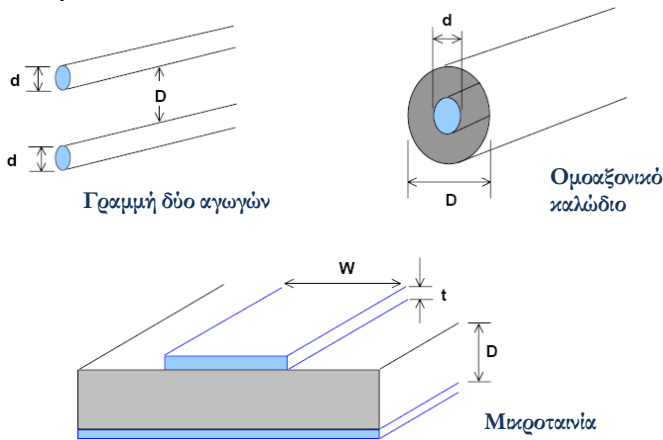
Περίπου όσο είναι η ακτίνα της γης.



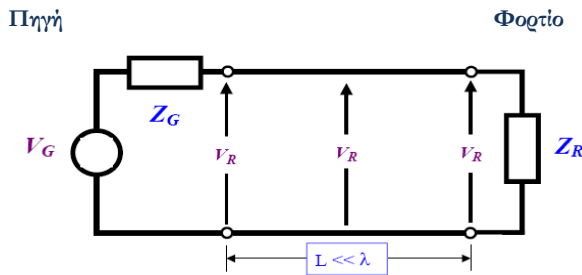
Ας συγκρίνουμε το προηγούμενο με μία μικροκυματική συχνότητα, για παράδειγμα 50 GHz. Το μήκος κύματος θα είναι

$$\lambda = \frac{c}{f} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{50 \cdot 10^9} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 6 \text{ mm}$$

το οποίο είναι συγκρίσιμο με το μέγεθος ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος.

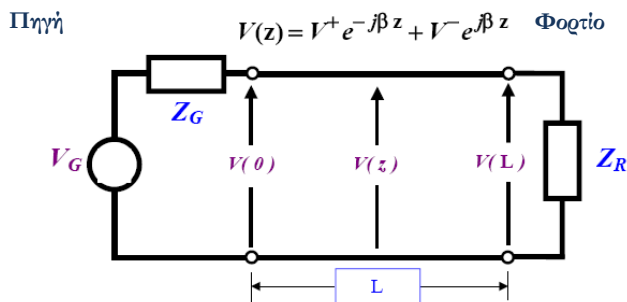


Σχήμα 4.23: Γραμμές μεταφοράς



Σχήμα 4.24: Εφαρμογή διακριτής τάσης για κυκλώματα με μήκη πολύ μικρότερα του  $\lambda$ .

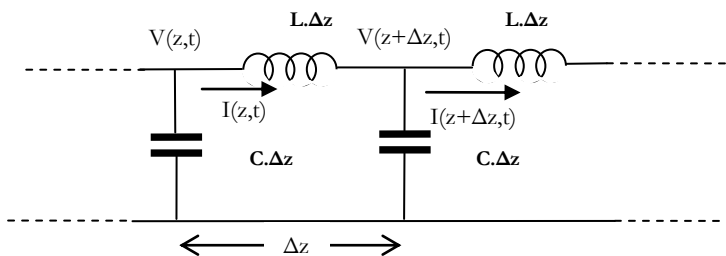
Επομένως, μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα: Για αρκετά υψηλές συχνότητες, το μήκος κύματος είναι συγκρίσιμο με το μήκος των διασυνδέσεων στη γραμμή μεταφοράς. Επομένως, δεν μπορούμε να αγνοήσουμε τις ιδιότητες της σύνθετης αντίστασης των αγωγών (καταναμημένα κυκλώματα).



Σχήμα 4.25: Κατανεμημένο κύκλωμα με διαστάσεις συγκρίσιμες με το  $\lambda$ .

#### 4.6.2. Γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες

Μια ομοιόμορφη γραμμή μεταφοράς είναι ένα «κατανεμημένο κύκλωμα», όπως αυτό του σχήματος 4.25, το οποίο μπορούμε να περιγράψουμε σαν μια σειρά από πανομοιότυπα κελιά με απειροελάχιστο μήκος.



Σχήμα 4.26: Γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες με κατανεμημένες παραμέτρους

Υποθέτουμε ότι μια γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες διαθέτει κατανεμημένη αυτεπαγωγή και χωρητικότητα, όπως παριστάνεται στο σχήμα 4.26. Αν έχουμε αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους  $L$  (H/m), από τον ορισμό του πηνίου στη θεωρία κυκλωμάτων, προκύπτει:

$$V(z, t) - V(z + \Delta z, t) = L \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}$$

ή, όταν  $\Delta z \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = L \cdot \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad (4.67)$$

Με τον ίδιο τρόπο, από τον ορισμό του πυκνωτή προκύπτει η εξίσωση

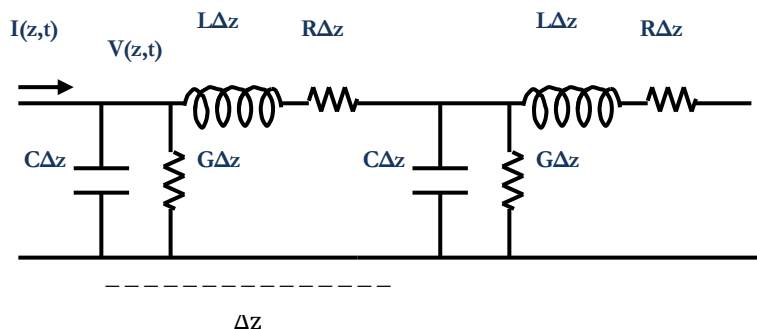
$$-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = C \cdot \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad (4.68)$$

### 4.6.3. Γραμμή μεταφοράς με απώλειες

Μια σημαντική ιδιότητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι ότι μπορούν να κυματοδηγούν, δηλαδή να μεταφέρουν ηλεκτρομαγνητική ενέργεια ακόμα και για μηδενική συχνότητα. Οι εξισώσεις (4.67) και (4.68) προέκυψαν θεωρώντας ότι οι αγωγοί έχουν άπειρη ειδική αγωγιμότητα ( $\sigma$ ) δηλαδή ότι δεν έχουν απώλειες και ότι το μέσο μεταξύ των αγωγών έχει μηδενική ειδική αγωγιμότητα. Όμως, στην πράξη, πάντα έχουμε απώλειες στις γραμμές μεταφοράς που οφείλονται στο ότι δεν ικανοποιούνται οι ιδανικές συνθήκες που προαναφέραμε. Οι απώλειες αυτές μπορούν να ληφθούν υπόψη με προσεγγιστικό τρόπο, προσθέτοντας στις καταναμημένες παραμέτρους  $L$  και  $C$  του σχήματος 4.26, την καταναμημένη αντίσταση  $R(\Omega/m)$  κατά μήκος των αγωγών και την καταναμημένη αγωγιμότητα  $G(S/m)$  μεταξύ των αγωγών, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.27. Γράφοντας τους νόμους του Kirchhoff για μια στοιχειώδη «αυφέλη» της γραμμής μεταφοράς και υπολογίζοντας τα όρια για  $\Delta z \rightarrow 0$ , έχουμε

$$-\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = R \cdot I(z,t) + L \cdot \frac{\partial I(z,t)}{\partial t}$$

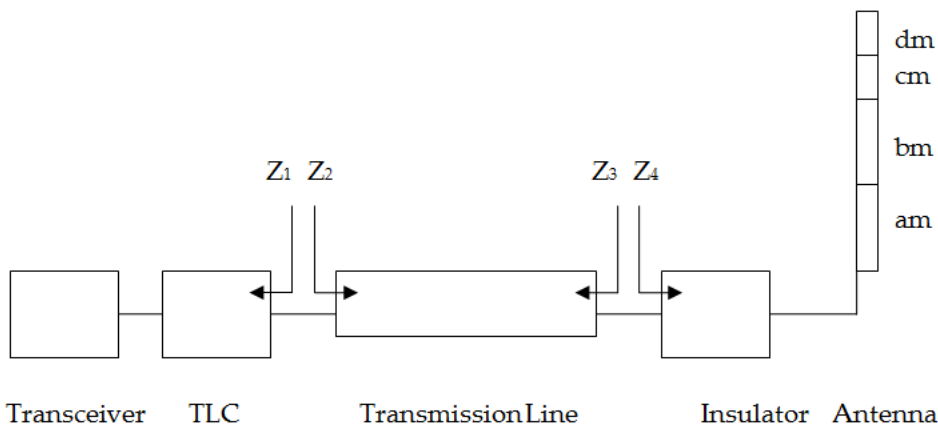
$$-\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = G \cdot V(z,t) + C \cdot \frac{\partial V(z,t)}{\partial t}$$



Σχήμα 4.27. Γραμμή μεταφοράς με απώλειες με καταναμημένες παραμέτρους

Η τιμή της αντίστασης  $R$  εξαρτάται από τις απώλειες ανά μονάδα μήκους που έχει η γραμμή μεταφοράς και μόνο για  $\omega=0$  είναι ίση με την ωμική αντίσταση των αγωγών. Η αγωγιμότητα  $G$  αντιστοιχεί με στις ωμικές απώλειες.

#### 4.6. Στάσιμα κύματα σε γραμμή μεταφοράς



Σχήμα 4.22. Σύστημα Κεραίας

Στο σχήμα 4.22 φαίνεται ένα σύστημα μετάδοσης (πομπός, κυκλώματα προσαρμογής, καλώδιο και κεραία). Το σύστημα είναι αποδοτικό μόνο όταν η αντίσταση εξόδου του πομπού  $Z_1$  είναι ίση με την αντίσταση εισόδου του καλωδίου  $Z_2$  και η  $Z_2$  που προφανώς ισούται με την  $Z_3$  είναι ίση με την αντίσταση εισόδου του μονωτήρα της κεραίας  $Z_4$ . Θεωρήσαμε ότι οι αντιστάσεις είναι καθαρά ωμικές (κατασκευαστής – παράγραφος 2.3). Όταν δεν ισχύει αυτό, τότε μέρος της εκπεμπόμενης ισχύος ανακλάται προς τα πίσω, με αποτέλεσμα τη δημιουργία στάσιμων κυμάτων. Ορίζουμε ως λόγο στάσιμων κυμάτων (Standing Waves Ratio – SWR), το λόγο αυτών των δύο αντιστάσεων και είναι ένας καθαρός αριθμός πάντα μεγαλύτερος του 1. Έτσι, αν  $Z_3 > Z_4$  τότε  $SWR = \frac{Z_3}{Z_4}$ . Στην ειδική περίπτωση πολύ καλής

προσαρμογής, ισχύει  $Z_3 = Z_4$  και  $SWR=1$  και ο λόγος στάσιμων κυμάτων είναι 1:1. Τότε, όλη η εκπεμπόμενη ισχύς μεταφέρεται με τη βοήθεια της γραμμής μεταφοράς στην κεραία για να ακτινοβοληθεί. Δυστυχώς, η κεραία είναι σπάνια μόνο ωμική αφού αποτελείται από χωρητικά και επαγωγικά στοιχεία. Σαν αποτέλεσμα, δεν μπορούμε ποτέ να πετύχουμε  $SWR=1:1$ . Το SWR είναι πάντα μεγαλύτερο από τη μονάδα.

Στην περίπτωση που σε ένα καλώδιο υπάρχουν 2 κύματα ίδιας έντασης αλλά με αντίθετη κατεύθυνση, τα δύο κύματα προστίθενται μέσα στο καλώδιο δημιουργώντας ένα κύμα με πλάτος ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των δύο πλατών. Το κύμα που δημιουργείται δεν είναι ούτε ευθύ (εκπεμπόμενο) ούτε ανακλώμενο αλλά ένα κύμα στάσιμο που ταλαντώνει μεταξύ δύο ακραίων τιμών. Μετρώντας το δυναμικό και την ένταση του ρεύματος σε διαφορετικά σημεία του του καλωδίου, παρατηρούμε ότι το στάσιμο κύμα κυμαίνεται μεταξύ δύο ακραίων τιμών  $V_{max}$  και  $V_{min}$ . Ο λόγος αυτών των τιμών ορίζεται ως VSWR (Voltage Standing-Wave Ratio) και:

$$VSWR = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{V_{\text{transmitted}} + V_{\text{reflected}}}{V_{\text{transmitted}} - V_{\text{reflected}}} = \frac{1 + \frac{V_r}{V_t}}{1 - \frac{V_r}{V_t}} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

$$\left. \begin{aligned} SWR &= \frac{Z_1}{Z_2} \\ SWR &= \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{V_r}{V_t} = \sqrt{\frac{P_r}{P_t}}$$

Η σχέση που θα μας δώσει το λόγο στάσιμων κυμάτων συναρτήσει των ισχύων εκπομπής και επιστροφής, καθώς επίσης και η σχέση που θα μας δώσει την επιστρεφόμενη ισχύ, δίνονται στη συνέχεια

$$VSWR = \frac{\sqrt{P_t} + \sqrt{P_r}}{\sqrt{P_t} - \sqrt{P_r}}$$

$$P_r = P_t \left( \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1} \right)^2$$

Το VSWR το μετράμε με ειδικά όργανα που ονομάζονται βατόμετρα. (wattometers) ή ανακλασόμετρα (reflectometers) ή γέφυρες στάσιμου κύματος. Η μέτρηση μας δείχνει πόσο καλά μία γραμμή μεταφοράς (καλώδιο ή κυματοδηγός) συνεργάζεται (είναι προσαρμοσμένη) με τον πομπό και την κεραία. Στην περίπτωση ενός υψηλού VSWR, το μεγαλύτερο μέρος της παραγόμενης ισχύος προς εκπομπή διαχέεται ως θερμότητα στο καλώδιο.

Υπάρχουν δύο τύποι SWR μετρητικών συσκευών. Αυτές που μετρούν ξεχωριστά την εκπεμπόμενη και την ανακλώμενη ισχύ και αυτά που μετρούν απευθείας και τις δύο ισχύεις. Τονίζεται ότι το SWR δείχνει πόσο καλά τροφοδοτείται η κεραία με ισχύ, όχι την αποδοτικότητα της κεραίας.

Επίσης, μια τέτοια συσκευή μέτρησης μπορεί να εισαγάγει απώλειες. Μία άλλη σκέψη, είναι ότι αν διαπιστωθεί ένα υψηλό SWR πρέπει να χαμηλώσουμε την ισχύ εξόδου του πομπού (του ενισχυτή ισχύος) για να τον προστατέψουμε από πιθανά υψηλά ανακλώμενα κύματα, να μην καεί. Οι παλαιοί πομποί που χρησιμοποιούσαν λυχνίες επέβαλαν αυτή τη σκέψη χρησιμοποιώντας στην έξοδό τους ένα φίλτρο Π που αποτελείται από δύο μεταβλητούς πυκνωτές που μεταβάλλονται για να προστατέψουν τον πομπό, όμως οι σύγχρονοι πομποί διαθέτουν κυκλώματα αυτοπροστασίας από ανακλάσεις.

Η περίπτωση όπου το VSWR πέφτει τυχαία, είναι ασυνήθιστη. Η πλέον πιθανή αιτία είναι ότι οι απώλειες στο καλώδιο ή στο κυματοδηγό έχουν γίνει πολύ μεγάλες λόγω φθοράς από σκόνη ή από απορρόφηση νερού. Τα σημεία σύνδεσης και οι γραμμές μεταφοράς πρέπει να ελέγχονται τακτικά για την καλή τους κατάσταση.

**Παράδειγμα 4.3:** Έστω σύστημα κεραίας HF που χρησιμοποιείται για επικοινωνίες σε πλοία. Ο πομπός, ο οποίος αποτελείται από έναν ενισχυτή ισχύος έχει τις ακόλουθες προδιαγραφές: Μέση Ισχύς 100W, Μέγιστη ισχύς εκπομπής: 500W. Μέγιστη επιτρεπτή ανακλώμενη ισχύς: 50 W. Καλώδιο RG58 μεταφέρει το σήμα στην κεραία προς ακτινοβολία. Με εκπεμπόμενη ισχύ 500 W, μετρήθηκε σε σημείο του καλωδίου VSWR=3:1. Υπάρχει πιθανότητα να καεί ο πομπός;

$$P_r = \left( \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1} \right)^2 \cdot P_t = 125W. \text{ Αν ο πομπός δεν έχει σύστημα αυτοπροστασίας,}$$

θα υποστεί ζημιά, αφού η μέγιστη ανακλώμενη επιτρεπτή ισχύς είναι 50W. Πρέπει να κατεβάσουμε την ισχύ εκπομπής το πολύ στα 200W.

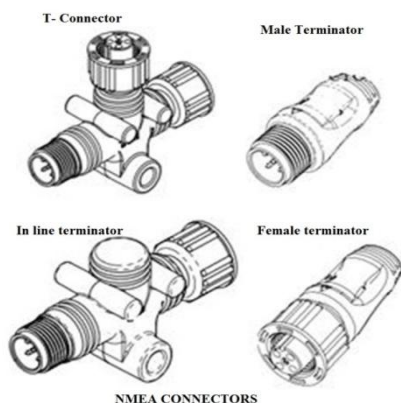
#### 4.7. Καλώδια και σύνδεσμοι

Τα σύγχρονα συστήματα καλωδίων πρέπει να είναι "NMEA 2000 Approved". Το διεθνές πρότυπο DeviceNet καθορίζει τα επίπεδα θωράκισης, το μέγεθος του αγωγού, την αντοχή στις καιρικές συνθήκες, την ευκαμψία.

Υπάρχουν δύο μεγέθη καλωδίωσης που καθορίζονται από το πρότυπο DeviceNet/NMEA 2000.

Το μεγαλύτερο από τα δύο μεγέθη ονομάζεται "Mini" (ή εναλλακτικά, "Thick") καλώδιο και μπορεί να αντέξει ως 8 Amperes. Αυτό χρησιμοποιείται σε δικτυώσεις μεγάλων πλοίων (μήκους πάνω από 20m)

Το μικρότερο ονομάζεται "Micro" (ή εναλλακτικά, "Thin") καλώδιο, και μπορεί να αντέξει μέχρι 3 Αμπέρ.



Σχήμα 4.23. Σύνδεσμοι NMEA connectors



## Κυκλώματα με Τελεστικό Ενισχυτή

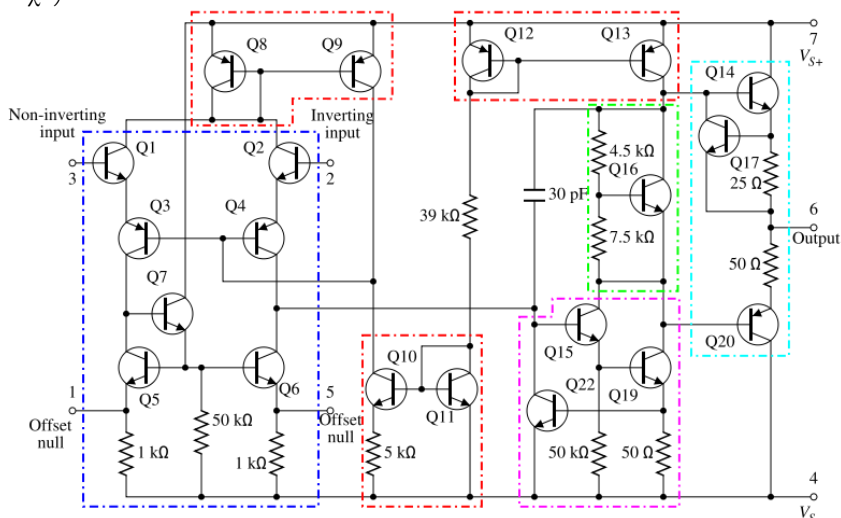
Ο τελεστικός ενισχυτής (Operational Amplifier) είναι ένα πολύπλοκο ηλεκτρονικό κύκλωμα, το οποίο - αποκλειστικά και μόνο για λόγους πληρότητας - παρουσιάζεται στο σχήμα 6.1. Για τη μελέτη των ενεργών φίλτρων μας είναι αδιάφορο τι περιλαμβάνει ο τελεστικός ενισχυτής, μας ενδιαφέρουν μόνο οι βασικές του λειτουργίες.

### 5.1. Γενικά

Από το όνομά του κατανοούμε ότι ο τελεστικός ενισχυτής είναι ένα ενεργό κύκλωμα και επομένως (σχετικά με τους ακροδέκτες που συνδέουν το ηλεκτρονικό κύκλωμα με τον «έξω» κόσμο) λογικό είναι, πέραν των ακροδεκτών για το σήμα RF εισόδου (ακροδέκτες 3 και 2 του σχήματος 5.1) και εξόδου (ακροδέκτης 6 του σχήματος 5.1), να υπάρχουν δύο τουλάχιστον επιπλέον ακροδέκτες για την DC τροφοδοσία του. Ένας για το υψηλό δυναμικό και ένας για το χαμηλό δυναμικό, δηλαδή τη «γη». Ας σημειώσουμε εδώ ότι «γη» δεν είναι απαραίτητα μηδενικό δυναμικό. Είναι το δυναμικό αναφοράς για το συνολικό σύστημα (όλα τα ηλεκτρονικά κυκλώματα που αποτελούν το τηλεπικοινωνιακό σύστημα) καθώς και για τα όργανα μέτρησης και τα τροφοδοτικά. Εφόσον λοιπόν είναι το δυναμικό αναφοράς μπορούμε άφοβα να το ΘΕΩΡΗΣΟΥΜΕ μηδενικό. Επίσης, αναφέρουμε ότι τα περισσότερα προβλήματα στη λειτουργία ηλεκτρονικών κυκλωμάτων οφείλονται στις μη ισοδυναμικές τάσεις αναφοράς (στη λάθος «γη»).

Στην περίπτωση του τελεστικού ενισχυτή, η πόλωση των τρανζίστορ επιτυγχάνεται με δύο διαφορετικές τροφοδοσίες  $V_+$  και  $V_-$ . Οι δύο αυτές DC τιμές είναι αντίθετες μεταξύ τους, δίνονται από τον κατασκευαστή, παρέχονται από δύο διαφορετικά τροφοδοτικά, με

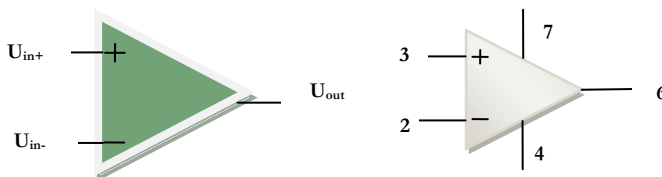
κοινή αναφορά και στο σχήμα 5.1. Συμβολίζονται με  $V_{S+}$  και  $V_{S-}$  (ακροδέκτες 7 και 4 αντίστοιχα).



Σχήμα 5.1: Ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα τελεστικού ενισχυτή. Πηγή: [http://en.wikipedia.org/wiki/Image:OpAmpTransistorLevel\\_Colored\\_Labeled.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/Image:OpAmpTransistorLevel_Colored_Labeled.svg)

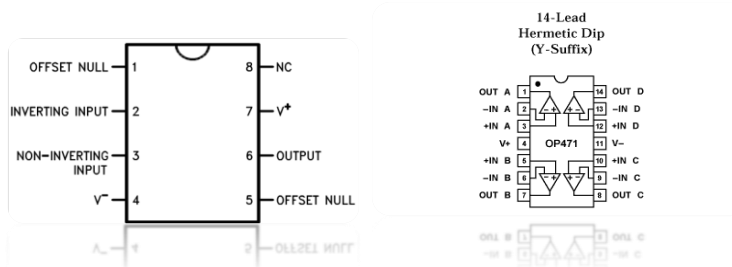
Το σύμβολο του τελεστικού ενισχυτή είναι ένα τρίγωνο, όπως εμφανίζεται στο σχήμα 5.2. Υπάρχει στο εμπόριο σε έτοιμο ολοκληρωμένο ηλεκτρονικό κύκλωμα (chip) 8 ακροδεκτών ή 16 ακροδεκτών. Ο κατασκευαστής του ολοκληρωμένου δίνει στα φύλλα δεδομένων του ολοκληρωμένου όλη την απαιτούμενη πληροφορία για τη χρήση των ακροδεκτών του. Παραδείγματα τέτοιων ολοκληρωμένων παρουσιάζονται στο σχήμα 5.3. Στο σχήμα 5.2(β) εμφανίζεται επιπλέον η DC τροφοδοσία καθώς και ο αριθμός του ακροδέκτη που αντιστοιχεί στο σχήμα 5.3(α). Στο σχήμα 5.2 παρατηρούμε τη μία είσοδο  $U_{in-}$  να συμβολίζεται με  $-$  και την άλλη  $U_{in+}$  με  $+$ . Η αντίστοιχη ονομασία τους είναι αναστρέφουσα και μη αναστρέφουσα είσοδος.

Η έννοια τελεστικός (operational) προήλθε από το γεγονός ότι το κύκλωμα αυτό μπορεί να κάνει πράξεις όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια. Όπως παρατηρούμε στα σχήματα 5.1 έως 5.3, ο τελεστικός ενισχυτής έχει δύο εισόδους RF και μία έξοδο. Επομένως, η λειτουργία του τελεστικού ενισχυτή απαιτεί τουλάχιστον 5 ακροδέκτες σε ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα, δεδομένου του γεγονότος ότι απαιτεί δύο πολώσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.4.



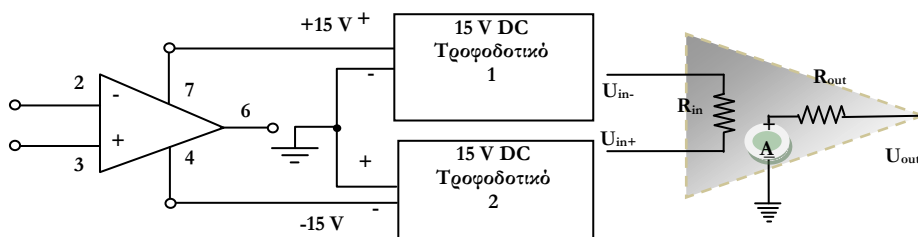
Σχήμα 5.2: (α) Το σύμβολο του τελεστικού ενισχυτή. (β) Η αντιστοίχια των ακροδεκτών με το ολοκληρωμένο LM741 όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 5.3(α).





Σχήμα 5.3: (α) Το ολοκληρωμένο LM741, 8 ακροδεκτών (pins) το οποίο περιλαμβάνει έναν τελεστικό ενισχυτή (β) Το ολοκληρωμένο OP471, 14 ακροδεκτών, το οποίο περιλαμβάνει 4 τελεστικούς ενισχυτές.

Το ισοδύναμο κύκλωμα ενός τελεστικού ενισχυτή παρουσιάζεται στο σχήμα 5.4(β).



Σχήμα 5.4: (α) Η διπλή τροφοδοσία του τελεστικού ενισχυτή (β)Το ισοδύναμο κύκλωμα.

## 5.2. Παραδοχές

Ο ιδανικός τελεστικός ενισχυτής έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- A. Οι δύο ακροδέκτες εισόδου έχουν το ίδιο δυναμικό:  $U_- = U_+$
- B. Τα ρεύματα που εισέρχονται στους δύο ακροδέκτες εισόδου θεωρούνται μηδενικά.

## 5.3. Ο ΤΕ σε αναστρέφουσα συνδεσμολογία

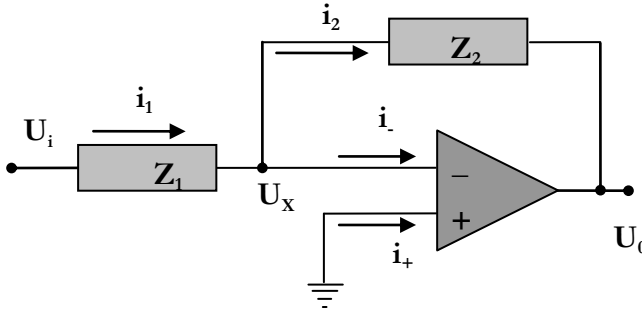
Όταν η είσοδος του κυκλώματος συνδέεται με την αναστρέφουσα είσοδο του τελεστικού ενισχυτή, τότε λέμε ότι η συνδεσμολογία είναι μη αναστρέφουσα. Ένα τέτοιο κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα 5.5.

Αν θεωρήσουμε ότι ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός, θα ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$U_- = U_+ \Rightarrow U_X = 0$$

$$i_- = i_+ = 0$$

$$i_1 = i_- + i_2 \stackrel{i_- = 0}{\Rightarrow} i_1 = i_2 \Rightarrow \frac{U_x - U_i}{Z_1} = \frac{U_o - U_x}{Z_2} \stackrel{U_x = 0}{\Rightarrow} A_V = \frac{U_o}{U_i} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (5.1)$$



Σχήμα 5.5: Ο τελεστικός ενισχυτής σε αναστρέφουσα συνδεσμολογία (Η εξωτερική είσοδος συνδέεται στην αναστρέφουσα είσοδο του Τ.Ε.).

### 5.3.1. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως ολοκληρωτής

Αν στη θέση του  $Z_1$  τοποθετήσουμε αντίσταση  $R$  και στη θέση του  $Z_2$  τοποθετήσουμε πυκνωτή  $C$ , τότε, η σχέση (6.1) με τη βοήθεια της (2.4) γίνεται:

$$\frac{U_o}{U_i} = -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R} = -\frac{1}{j\omega RC} \Rightarrow U_o = -\frac{1}{RC} \int U_i dt$$

### 5.3.2. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως διαφοριστής

Αν στη θέση του  $Z_2$  τοποθετήσουμε αντίσταση  $R$  και στη θέση του  $Z_1$  τοποθετήσουμε πυκνωτή  $C$ , τότε η σχέση (6.1) με τη βοήθεια της (2.4) γίνεται:

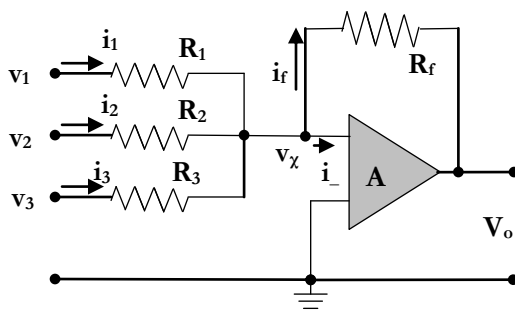
$$\frac{U_o}{U_i} = -\frac{R}{\frac{1}{j\omega C}} = -j\omega RC = -sRC \Rightarrow U_o = -sRCU_i = -RC \frac{\partial U_i}{\partial t}$$

### 5.3.3. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως αθροιστής

Αν τοποθετήσουμε περισσότερες από μία εισόδους, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6 τότε έχουμε αθροιστή

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots = i_- + i_f \stackrel{i_- = 0}{\Rightarrow} i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{U_x - U_1}{R_1} + \frac{U_x - U_2}{R_2} + \frac{U_x - U_3}{R_3} = \frac{U_o - U_x}{R_f} \stackrel{U_x = 0}{\Rightarrow}$$

$$-\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_3}{R_3} - \dots = \frac{U_o}{R_f} \stackrel{R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R_f}{\Rightarrow} -(U_1 + U_2 + U_3 + \dots) = U_o$$



Σχήμα 5.6: Ο τελεστικός ενισχυτής ως αθροιστής.

### 5.3.4. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως πολλαπλασιαστής

Στο σχήμα 5.5, στη θέση της  $Z_2$  θέσουμε μία αντίσταση  $R_2$  της οποίας η τιμή είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της τιμής μίας αντίστασης  $R_1$  ( $R_2=KR_1$ ) την οποία την τοποθετούμε στη θέση της  $Z_1$  τότε αποκτήσαμε έναν πολλαπλασιαστή αφού από την 5.1 προκύπτει

$$V_{OUT} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V_{IN} \Rightarrow V_{OUT} = -\frac{K \cdot R_1}{R_1} \cdot V_{IN} \Rightarrow V_{OUT} = -K \cdot V_{IN}$$

Ο πολλαπλασιαστής ενισχύει και αντιστρέφει το σήμα εισόδου (καθυστερήση  $180^\circ$ ).

### 5.4. Ο ΤΕ σε μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία

Όταν η είσοδος του κυκλώματος συνδέεται με τη μη αναστρέφουσα είσοδο του τελεστικού ενισχυτή, τότε λέμε ότι η συνδεσμολογία είναι μη αναστρέφουσα. Ένα τέτοιο κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα 5.6.

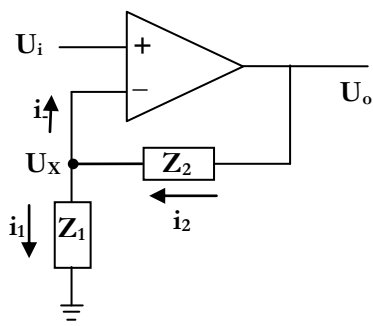
Αν θεωρήσουμε ότι ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός, θα ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$U_- = U_+ \Rightarrow U_x = U_i$$

$$i_- = i_+ = 0$$

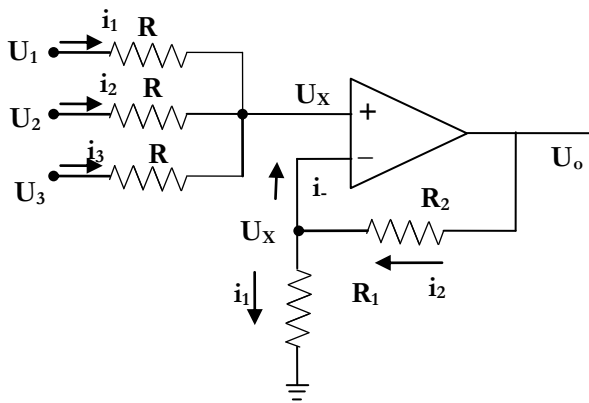
$$i_2 = i_- + i_1 \stackrel{i_-=0}{\Rightarrow} i_1 = i_2 \Rightarrow \frac{0 - U_x}{Z_1} = \frac{U_x - U_0}{Z_2} \stackrel{U_x=U_i}{\Rightarrow} -\frac{U_i}{Z_1} = \frac{U_i - U_0}{Z_2} \Rightarrow U_i \left( \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1} \right) = \frac{U_0}{Z_2}$$

$$A_V = \frac{U_0}{U_i} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1} \tag{5.2}$$



Σχήμα 5.7: Ο τελεστικός ενισχυτής σε μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία.

### 5.4.1. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως αθροιστής



Σχήμα 5.8. Ο τελεστικός ενισχυτής σε μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία ως αθροιστής.

$$i_- = 0 \Rightarrow i_2 = i_- + i_1 \Rightarrow i_1 = i_2 \Rightarrow \frac{0 - U_x}{R_1} = \frac{U_x - U_0}{R_2} \Rightarrow \frac{U_x}{R_1} = \frac{U_x - U_0}{R_2} \Rightarrow \frac{U_0}{U_x} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots = 0 \Rightarrow \frac{U_x - U_1}{R} + \frac{U_x - U_2}{R} + \frac{U_x - U_3}{R} + \dots = 0 \Rightarrow n \cdot U_x = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

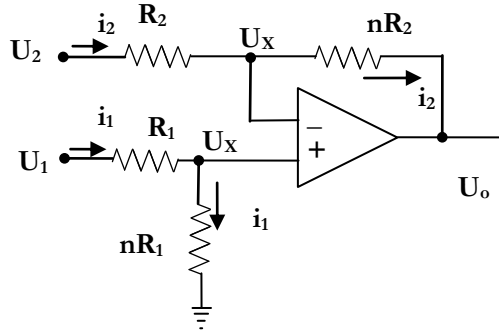
$$U_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{(U_1 + U_2 + U_3 + \dots)}{n}$$

Για παράδειγμα, αν  $n=3$  όπως φαίνεται στο σχήμα 5.8 και αν  $R_1=R_2$  τότε

$$U_0 = \frac{2}{3} \cdot (U_1 + U_2 + U_3)$$

Επίσης, αν  $n=3$  όπως φαίνεται στο σχήμα 5.8 και αν  $R_2=2R_1$  τότε  $U_0 = U_1 + U_2 + U_3$

5.4.2. Ο ΤΕ ως αφαιρέτης ή διαφορικός ενισχυτής



Σχήμα 5.9. Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως Αφαιρέτης

$$\frac{U_X}{U_1} = \frac{n \cdot R_1}{(n+1) \cdot R_1} \Rightarrow U_1 = \frac{n+1}{n} \cdot U_X$$

$$i_2 = i_2 \Rightarrow \frac{U_X - U_2}{R_2} = \frac{U_0 - U_X}{n \cdot R_2} \Rightarrow \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_X}{R_2} + \frac{U_X}{n \cdot R_2} - \frac{U_0}{n \cdot R_2} \Rightarrow U_2 = \frac{n+1}{n} \cdot U_X - \frac{U_0}{n}$$

$$U_1 - U_2 = \frac{U_0}{n} \Rightarrow U_0 = n \cdot (U_1 - U_2)$$



## Ενεργά Φίλτρα

### 6.1. Ενεργό Βαθυπερατό Φίλτρο 1<sup>ης</sup> Τάξης

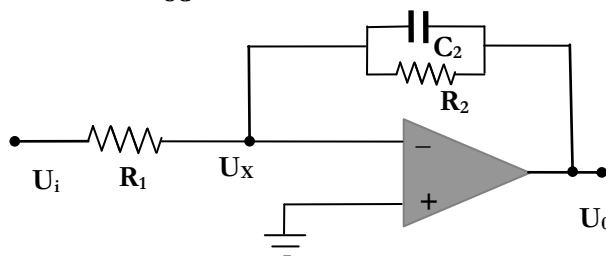
#### 6.1.1. Συνδεσμολογία Αναστρέφοντα Ενισχυτή

**Σ** το προηγούμενο κεφάλαιο, για το κύκλωμα του σχήματος 6.5 αποδείξαμε ότι

$$A_V = \frac{U_o}{U_i} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (6.1)$$

Αν στη θέση της σύνθετης αντίστασης  $Z_1$  τοποθετήσουμε πραγματική αντίσταση  $R_1$  και στη θέση της  $Z_2$  τον παράλληλο συνδυασμό  $R_2//C_2$  τότε προκύπτει το κύκλωμα του σχήματος 6.1. Η σύνθετη αντίσταση  $Z_2$  είναι:

$$Z_2 = \frac{\frac{1}{sC} R_2}{\frac{1}{sC} + R_2} = \frac{R_2}{1 + sCR_2} \quad (6.2)$$



Σχήμα 6.1. Ενεργό βαθυπερατό φίλτρο 1ης τάξης

Αντικαθιστώντας την (6.2) στην (6.1) προκύπτει

$$A_V = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1+sC_2R_2} \quad (6.3)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (6.3) με την (4.18) συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για βαθυπερατό φίλτρο με DC κέρδος  $K=R_2/R_1$  και συχνότητα αποκοπής  $\omega_C = \frac{1}{R_2 \cdot C}$ . Το πρόσημο  $-$  φανερώνει αναστροφή φάσης, ή καθυστέρηση κατά  $180^\circ$ .

Η αντίσταση εισόδου είναι  $R_{in}=R_1$  και η αντίσταση εξόδου  $R_{OUT}=0$  (λόγω του τελεστικού ενισχυτή). Άλλες μορφές της 6.3 είναι

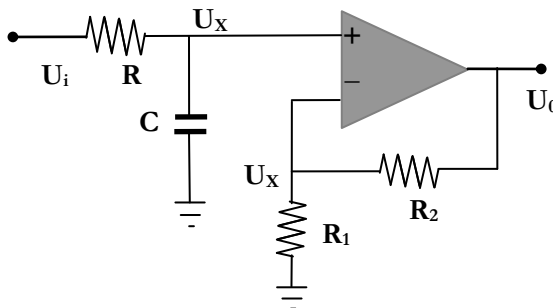
$$H(s) = \frac{-K}{1 + \frac{s}{\omega_C}} \quad \text{ή} \quad H(s) = \frac{-K \cdot \omega_C}{s + \omega_C} \quad (6.4)$$

### 6.1.2. Συνδεσμολογία Μη Αναστρέφοντα Ενισχυτή Ή Φίλτρο Shallen-Key

Στο κύκλωμα του σχήματος 6.2 παρουσιάζεται ένα ενεργό βαθυπερατό φίλτρο ή ένας ενισχυτής που επιτρέπει τη διέλευση DC. Ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός και η συνδεσμολογία του είναι μη αναστρέφουσα. Εφόσον τα ρεύματα εισόδου είναι μηδενικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε διαιρέτες τάσης για τους συνδυασμούς R, C και  $R_1, R_2$ . Τα δυναμικά στους ακροδέκτες εισόδου του τελεστικού ενισχυτή είναι ίσα μεταξύ τους και τα ονομάζουμε  $U_x$ .

$$\frac{U_x}{U_i} = \frac{Z_C}{Z_C + R} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (6.5)$$

$$\frac{U_x}{U_o} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (6.6)$$



Σχήμα 6.2: Ενεργό βαθυπερατό φίλτρο Shallen-Key.



Διαιρώντας κατά μέλη τις (6.5) και (6.6) προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1}}{1 + j\omega RC} = \frac{A_0}{1 + j\frac{f}{f_0}} \quad (6.7)$$

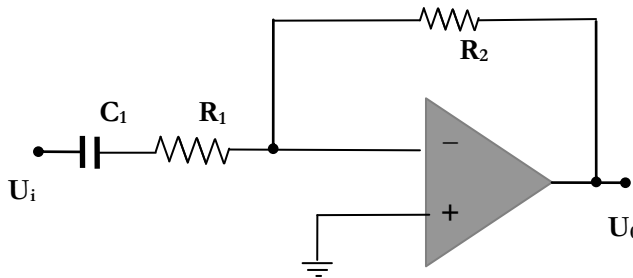
όπου

$$A_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad \text{και} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Παρατηρούμε ότι και στην 6.7 διατηρείται η μορφή της 6.4 που είναι η γενική μορφή βαθυπερατού φίλτρου 1<sup>ης</sup> τάξης.

## 6.2. Ενεργό Υψιπερατό Φίλτρο Πρώτης Τάξης

### 6.2.1. Συνδεσμολογία Αναστρέφοντα Ενισχυτή



Σχήμα 6.3: Ενεργό υψιπερατό φίλτρο 1ης τάξης σε αναστρέφουσα συνδεσμολογία

**A**ν στη θέση της σύνθετης αντίστασης  $Z_1$  τοποθετήσουμε πραγματική αντίσταση  $R_1$  σε σειρά με έναν πυκνωτή  $C$  και στη θέση της  $Z_2$  μια αντίσταση  $R_2$  τότε προκύπτει το κύκλωμα του σχήματος 6.3

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{sC_1} = \frac{1 + sC_1R_1}{sC} \quad (6.8)$$

Αντικαθιστώντας την 6.8 στην 6.1 προκύπτει

$$A_v = -\frac{sC_1R_2}{1 + sCR_1} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{sC_1R_1}} \quad (6.9)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση 6.9 με την 4.47 συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για υπερβατό φίλτρο με κέρδος υψηλών συχνοτήτων  $K = -R_2/R_1$  και συχνότητα αποκοπής

$$\omega_C = \frac{1}{R_1 \cdot C_1}$$

$$H(s) = -\frac{K}{1 + \frac{\omega_C}{s}} = -\frac{K \cdot s}{s + \omega_C} \quad (6.10)$$

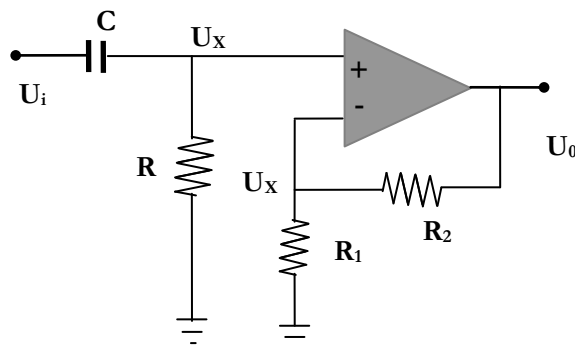
Η αντίσταση εισόδου είναι  $R_{in} = Z_1$ ,  $R_{in/min} = R_1$  και η αντίσταση εξόδου  $R_{out} = 0$  (λόγω του τελεστικού ενισχυτή).

### 6.2.2. Συνδεσμολογία Shallen-Key

Στο κύκλωμα του σχήματος 6.4 παρουσιάζεται ένα ενεργό βαθυπερατό φίλτρο ή ένας ενισχυτής που απαγορεύει τη διέλευση DC. Ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός και η συνδεσμολογία του είναι μη αναστρέφουσα. Εφόσον τα ρεύματα εισόδου είναι μηδενικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε διαίρετες τάσης για τους συνδυασμούς  $R$ ,  $C$  και  $R_1$ ,  $R_2$ . Τα δυναμικά στους ακροδέκτες εισόδου του τελεστικού ενισχυτή είναι ίσα μεταξύ τους και τα ονομάζουμε  $U_x$ .

$$\frac{U_x}{U_i} = \frac{R}{Z_C + R} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (6.10)$$

$$\frac{U_x}{U_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (6.11)$$



Σχήμα 6.4: Ενεργό βαθυπερατό φίλτρο Shallen-Key.

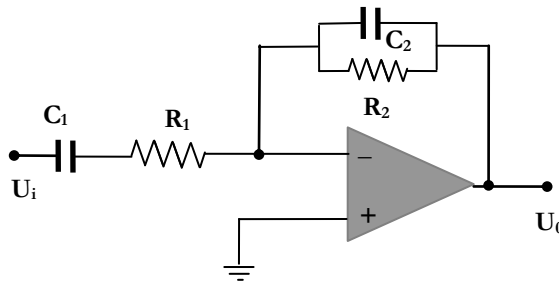
Διαιρώντας κατά μέλη τις 6.10 και 6.11 προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς

$$A = \frac{U_0}{U_i} = \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1} j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{A_0 j \frac{f}{f_c}}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad (6.12)$$

όπου

$$A_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \text{και} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

### 6.3. Ενεργό Ζωνοπερατό Φίλτρο Δευτερης Τάξης



Σχήμα 6.5. Ενεργό ζωνοπερατό φίλτρο 2ης τάξης

Α

ν στη θέση της σύνθετης αντίστασης  $Z_1$  τοποθετήσουμε πραγματική αντίσταση  $R_1$  σε σειρά με έναν πυκνωτή  $C_1$  και στη θέση της  $Z_2$  μια αντίσταση  $R_2$  παράλληλα με έναν πυκνωτή  $C_2$  τότε προκύπτει το κύκλωμα του σχήματος 6.5

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{sC_1} = \frac{1 + sC_1R_1}{sC_1} \quad (6.13)$$

$$Z_2 = \frac{\frac{1}{sC_2} R_2}{\frac{1}{sC_2} + R_2} = \frac{R_2}{1 + sC_2R_2} \quad (6.14)$$

Αντικαθιστώντας τις 6.13 και 6.14 στην 6.1 προκύπτει

$$A_V = - \frac{sC_1R_2}{(1 + sC_1R_1)(1 + sC_2R_2)} = \frac{sC_1R_2}{1 + sC_1R_1 + sC_2R_2 + s^2C_1R_1C_2R_2}$$

$$A_V = - \frac{sR_2C_1}{1 + s(R_1C_1 + R_2C_2) + s^2R_1C_1R_2C_2}$$

Αν θέσουμε την κεντρική συχνότητα ως το γεωμετρικό μέσο  $\omega_0^2 = \omega_1 \cdot \omega_2$ , όπου

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} \text{ και } \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}, \text{ η τελευταία σχέση γίνεται}$$

$$A = -\frac{sR_2 C_1 \omega_1 \omega_2}{\omega_1 \omega_2 + s(\omega_1 + \omega_2) + s^2} \quad (6.15)$$

Θέτοντας τον συντελεστή ποιότητας του φίλτρου Q ως το λόγο της κεντρικής συχνότητας  $\omega_0$  προς το εύρος ζώνης  $B = \omega_1 - \omega_2$ , το κέρδος γίνεται:

$$A_V = -\frac{sR_2 C_1 \omega_0^2}{\omega_0^2 + s(\omega_1 + \omega_2) + s^2} - \frac{sC_1 R_1 \cdot \frac{R_2}{R_1}}{1 + s\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_0^2}\right) + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

όπου  $B = \omega_1 - \omega_2$  και

$$(\omega_1 - \omega_2)^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 \Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = B^2 + 2\omega_1 \omega_2$$

επομένως

$$(\omega_1 + \omega_2)^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 = B^2 + 4\omega_1 \omega_2 = B^2 + 4\omega_0^2$$

Θέτοντας τον συντελεστή ποιότητας του φίλτρου Q ως το λόγο της κεντρικής συχνότητας  $\omega_0$  προς το εύρος ζώνης  $B = \omega_1 - \omega_2$ ,

$$Q = \frac{\omega_0}{B} \Rightarrow 2\zeta = \frac{1}{Q} = \frac{B}{\omega_0}$$

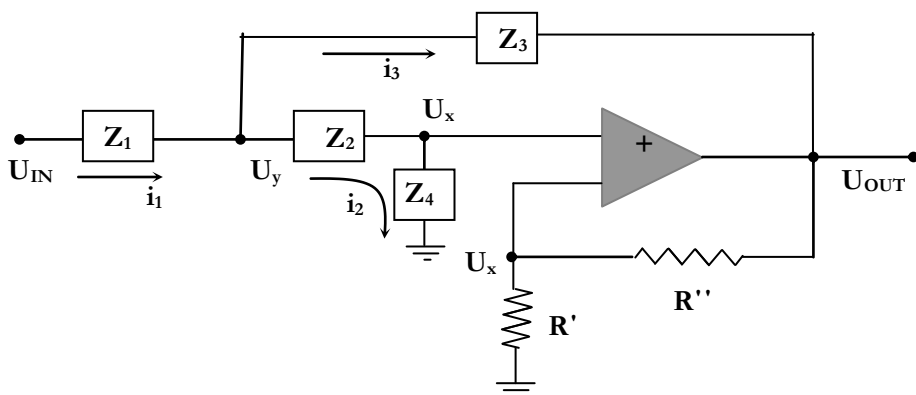
το κέρδος γίνεται:

$$A_V = -\frac{\frac{s}{\omega_1} \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{s}{\omega_0} \sqrt{\left(\left(\frac{B}{\omega_0}\right)^2 + 4\right)} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

$$A_V = -\frac{s \frac{R_2}{R_1} \omega_2}{\omega_0^2 + s \sqrt{\left(\left(\frac{1}{Q}\right)^2 + 4\right)} \omega_0 + s^2} = -\frac{\frac{s}{\omega_1} \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{s}{\omega_0} \sqrt{(2\zeta)^2 + 4} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

### 6.4. Γενικευμένο πρότυπο ενεργού φίλτρου 2<sup>ης</sup> τάξης

Το κύκλωμα του σχήματος 6.6 αποτελείται από τελεστικό ενισχυτή σε μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία. Θεωρώντας ότι τα ρεύματα που εισέρχονται στις δύο εισόδους του τελεστικού ενισχυτή είναι μηδενικά, οι  $Z_2$  και  $Z_4$  διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, οπότε εφαρμόζουμε διαιρέτη τάσης:



Σχήμα 6.6. Γενικευμένο πρότυπο ενεργού φίλτρου 2ης τάξης

$$\frac{U_x}{U_y} = \frac{Z_4}{Z_2 + Z_4} \quad (6.16)$$

Ομοίως για τις  $R'$  και  $R''$

$$\frac{U_x}{U_{OUT}} = \frac{R'}{R' + R''} \quad (6.17)$$

Από τις σχέσεις 6.16 και 6.17 με διαίρεση κατά μέλη, προκύπτει

$$\frac{U_y}{U_{OUT}} = \frac{R'}{R' + R''} \cdot \frac{Z_2 + Z_4}{Z_4} \quad (6.18)$$

Το ρεύμα  $i_1$  που διαρρέει τη  $Z_1$  διαχωρίζεται στο ρεύμα  $i_3$  που διαρρέει τη  $Z_3$  και στο ρεύμα  $i_2$  που διαρρέει την  $Z_2 + Z_4$

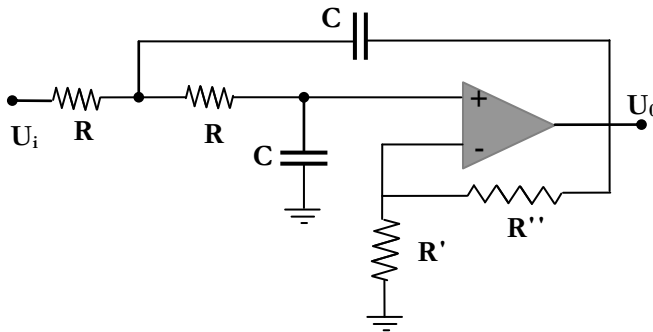
$$i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow \frac{U_{IN} - U_y}{Z_1} = \frac{U_y}{Z_2 + Z_4} + \frac{U_y - U_{OUT}}{Z_3}$$

Διαιρώντας την τελευταία σχέση με  $U_{OUT}$  προκύπτει

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Z_1} \cdot \frac{U_{IN}}{U_{OUT}} - \frac{1}{Z_1} \cdot \frac{U_Y}{U_{OUT}} &= \frac{1}{Z_2 + Z_4} \cdot \frac{U_Y}{U_{OUT}} + \frac{1}{Z_3} \cdot \frac{U_Y}{U_{OUT}} - \frac{1}{Z_3} \Rightarrow \quad (6.18) \\
 \frac{U_{IN}}{U_{OUT}} &= \frac{U_Y}{U_{OUT}} + \frac{Z_1}{Z_2 + Z_4} \cdot \frac{U_Y}{U_{OUT}} + \frac{Z_1}{Z_3} \cdot \frac{U_Y}{U_{OUT}} - \frac{Z_1}{Z_3} \Rightarrow \\
 \frac{U_{IN}}{U_{OUT}} &= \left( 1 + \frac{Z_1}{Z_2 + Z_4} + \frac{Z_1}{Z_3} \right) \cdot \frac{R'}{R' + R''} \cdot \frac{Z_2 + Z_4}{Z_4} - \frac{Z_1}{Z_3} \Rightarrow \quad A_{V0} \equiv \frac{R' + R''}{R'} \\
 \frac{U_{IN}}{U_{OUT}} &= \frac{(Z_2 Z_3 + Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4)(Z_2 + Z_4)}{Z_4 Z_3 (Z_2 + Z_4) A_{V0}} - \frac{Z_1}{Z_3} \Rightarrow \\
 \frac{U_{IN}}{U_{OUT}} &= \frac{(Z_2 Z_3 + Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4) - Z_1 Z_4 A_{V0}}{Z_4 Z_3 A_{V0}} \Rightarrow \\
 \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} &= \frac{A_{V0} Z_3 Z_4}{Z_3 (Z_2 + Z_4 + Z_1) + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 (1 - A_{V0})} \\
 A_V(s) = \frac{V_o}{V_i} &= \frac{A_{V0} Z_3 Z_4}{Z_3 (Z_1 + Z_2 + Z_4) + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 (1 - A_{V0})} \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

### 6.4.1. Φίλτρο Butterworth 2ης Τάξης

#### A) Λειτουργία Βαθυπερατού Φίλτρου



Σχήμα 6.7. Γενικευμένο πρότυπο ενεργού βαθυπερατού φίλτρου 2ης τάξης

Για να λειτουργήσει το κύκλωμα του σχήματος 6.6 ως βαθυπερατό φίλτρο, από την εμπειρία μας μπορούμε να θέσουμε  $Z_1 = Z_2 = R$  και  $Z_3 = Z_4 = \frac{1}{sC}$ . Θα προκύψει το κύκλωμα του σχήματος 6.7. Η σχέση 6.19 θα γίνει

$$\frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{A_{V0}}{\left(\frac{C_4}{C_3} + 1\right) + s^2 C_3 C_4 R_1 R_2 + s(C_4 R_2 + C_3 R_1(1 - A_{V0}))}$$

$$\frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = \frac{A_{V0} \frac{1}{s^2 C^2}}{\frac{1}{sC} \left(2R + \frac{1}{sC}\right) + R^2 + R \frac{1}{sC} (1 - A_{V0})} = \frac{A_{V0}}{s^2 R^2 C^2 + sRC(3 - A_{V0}) + 1}$$

$$A_V(s) = \frac{A_{V0}}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + (3 - A_{V0}) \frac{s}{\omega_0} + 1} \quad (6.20)$$

όπου  $A_{V0} \equiv \frac{R'+R''}{R'}$  και  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Το βαθυπερατό φίλτρο Butterworth μπορεί να δώσει το βέλτιστο επίπεδο μέγιστο κέρδος της ζώνης διέλευσης. Επομένως, τα φίλτρα αυτά χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές όπου απαιτείται ακρίβεια του επιπέδου του σήματος (μέσα σε όλο το φάσμα διέλευσης) κατά τη μεταφορά δεδομένων (anti-aliasing filters).

Συγκρίνοντας τον παρονομαστή της 6.19 με το πολυώνυμο  $B_2(s) = (s^2 + 1,414s + 1)$  του πίνακα 3.1 προκύπτει  $3 - A_{V0} = 1,414 \Rightarrow A_{V0} = 1,586 \Rightarrow \frac{R'+R''}{R'} = 1,586$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να επιλέξουμε τις τιμές των στοιχείων  $R'$  και  $R''$  ώστε να έχουμε απόκριση Butterworth. Τέλος, επιλέγοντας τις κατάλληλες τιμές για τα  $R, C$  ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ , για την επιθυμητή συχνότητα αποκοπής  $\omega_0$ , έχουμε σχεδιάσει το φίλτρο 2<sup>ης</sup> τάξης.

### **Β) Λειτουργία Υψιπερατού Φίλτρου**

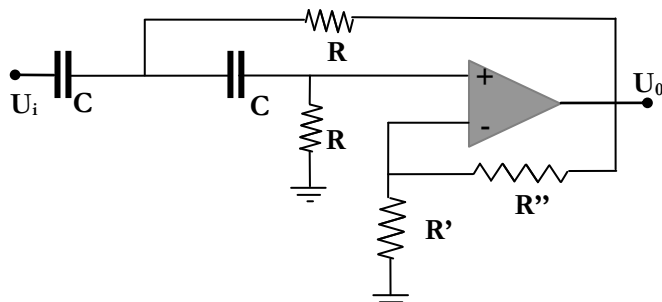
Για να λειτουργήσει το κύκλωμα του σχήματος 6.6 ως υψιπερατό φίλτρο, από την εμπειρία μας μπορούμε να θέσουμε  $Z_1 = Z_2 = \frac{1}{sC}$  και  $Z_3 = Z_4 = R$ . Θα προκύψει το κύκλωμα του σχήματος 6.8. Η σχέση 6.18 θα γίνει

$$A_V(s) = \frac{A_{V0} \cdot \left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2}{\left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2 + (3 - A_{V0}) \frac{s}{\omega_C} + 1} \quad (6.20)$$

Οι τιμές των στοιχείων του σχήματος 6.8 επιλέγονται με τον ίδιο τρόπο (όπως επιλέχθηκαν για το βαθυπερατό). Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιηθούν – με δεδομένη τη συχνότητα αποκοπής, είναι

$$\frac{R'+R''}{R'} = 1,586 \text{ και } \omega_C = \frac{1}{RC}$$

Το κέρδος ενός τέτοιου φίλτρου δεν μπορεί να ελεγχθεί. Είναι δεδομένο από τις τιμές των  $R'$  και  $R''$  που καθορίζονται από τη συνάρτηση Butterworth.



Σχήμα 6.8. Γενικευμένο πρότυπο ενεργού υπερπερατού φίλτρου 2ης τάξης

## 6.4.2. Φίλτρο Butterworth Περιττής Τάξης

### Α) Βαθυπερατό Φίλτρο Περιττής Τάξης

Για να σχεδιάσουμε βαθυπερατό φίλτρο περιττής τάξης αρκεί να συνδέσουμε ένα βαθυπερατό φίλτρο 1ου βαθμού σε σειρά με βαθμίδες βαθυπερατού φίλτρου 2ης τάξης.

Στο σχήμα 6.9 φαίνεται ένα ενεργό βαθυπερατό φίλτρο Butterworth 3ης τάξης. Αποτελείται από ένα ενεργό βαθυπερατό φίλτρο 1ης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς  $H_1(s)$  και ένα ενεργό φίλτρο Butterworth 2ης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς  $H_2(s)$ . Η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού κυκλώματος θα είναι

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{A_{V1}}{1 + \frac{s}{\omega_{C1}}} \cdot \frac{A_{V2}}{\left(\frac{s}{\omega_{C2}}\right)^2 + (3 - A_{V2})\frac{s}{\omega_{C2}} + 1} \quad (6.21)$$

όπου  $\omega_{C1} = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{RC}$ ,  $\omega_{C2} = \frac{1}{R_2 C_2} = \frac{1}{RC}$  και  $A_{V1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ ,  $A_{V2} = \frac{R' + R''}{R'}$

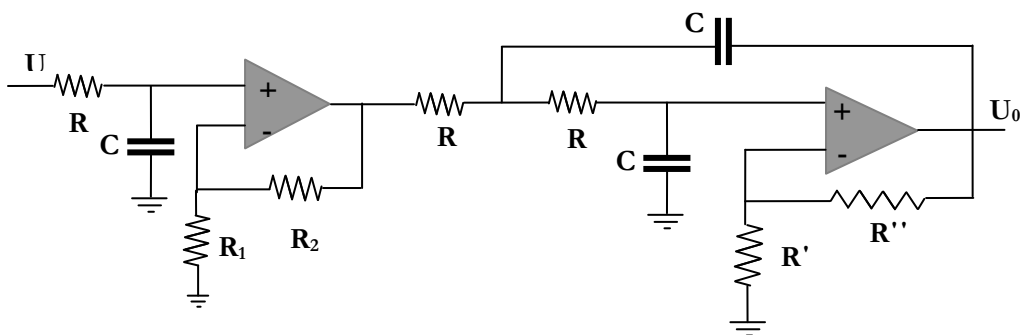
Επιλέγοντας  $\omega_{C1} = \omega_{C2}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 6.9, η 6.21 γίνεται

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{A_{V1} \cdot A_{V2}}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_C}\right)\right) \cdot \left[\left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2 + (3 - A_{V2})\left(\frac{s}{\omega_C}\right) + 1\right]} \quad (6.22)$$



Από τον πίνακα 3.1 λαμβάνουμε το πολυώνυμο Butterworth 3ου βαθμού  $\left(\frac{s}{\omega_C} + 1\right) \cdot \left(\left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2 + \frac{s}{\omega_C} + 1\right)$  το οποίο είναι ο παρονομαστής της 6.22 με

$$3 - A_{V2} = 1 \Rightarrow A_{V2} = \frac{R' + R''}{R'} = 2$$



Σχήμα 6.9. Βαθυπερατό Φίλτρο Butterworth 3ης τάξης

Δεδομένης της συχνότητας αποκοπής  $\omega_C$ , μπορούμε να επιλέξουμε τις τιμές των στοιχείων R και C. Αυτές επιλέγονται ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη  $\omega_C = \frac{1}{RC}$ .

Δεδομένου ότι το κέρδος του φίλτρου 2ης τάξης είναι συγκεκριμένο (και ισούται με 2 σε καθαρό αριθμό), μπορούμε να επιλέξουμε τις τιμές των στοιχείων R' και R'' ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη  $\frac{R' + R''}{R'} = 2$ . Τέλος, μπορούμε να ελέγξουμε το κέρδος του όλου

φίλτρου το οποίο θα είναι  $A_{V0} = A_{V2} \cdot A_{V1} = 2 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R}$ , τοποθετώντας κατάλληλες

αντιστάσεις R1 και R2. Η αυθαίρετη επιλογή αυτών μας δίνει περιθώρια για να επιλέξουμε το επιθυμητό κέρδος.

## Β) Υψιπερατό Φίλτρο Περιττής Τάξης

Στο σχήμα 6.10 φαίνεται ένα ενεργό υψιπερατό φίλτρο Butterworth 5ης τάξης. Αποτελείται από ένα ενεργό βαθυπερατό φίλτρο 1ης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς  $H1(s)$  και δύο ενεργά υψιπερατά φίλτρα Butterworth 2ης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς  $H2(s)$  και  $H3(s)$ . Η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού κυκλώματος θα είναι

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s) =$$

$$\frac{A_{V1} \cdot \frac{s}{\omega_C} \cdot A_{V2} \cdot \left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2 \cdot A_{V3} \cdot \left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2}{1 + \frac{s}{\omega_C} \left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2 + (3 - A_{V2}) \frac{s}{\omega_C} + 1 \left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2 + (3 - A_{V3}) \frac{s}{\omega_C} + 1} \quad (6.23)$$

όπου

$$\omega_C = \frac{1}{RC} \quad A_{V1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad A_{V2} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} \quad A_{V3} = \frac{R_5 + R_6}{R_5}$$

Από τον πίνακα 3.1 λαμβάνουμε το πολυώνυμο Butterworth 5ου βαθμού  $\left(\frac{s}{\omega_C} + 1\right) \cdot \left(\left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2 + 0,618 \frac{s}{\omega_C} + 1\right) \cdot \left(\left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2 + 1,618 \frac{s}{\omega_C} + 1\right)$  το οποίο είναι ο

παρονομαστής της 6.23 με  $3 - A_{V2} = 0,618 \Rightarrow A_{V2} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} \approx 2,4$  και

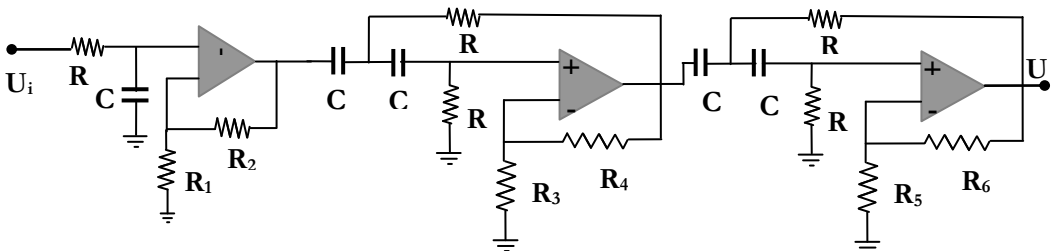
$$3 - A_{V3} = 1,618 \Rightarrow A_{V3} = \frac{R_5 + R_6}{R_5} \approx 1,4$$

Δεδομένης της συχνότητας αποκοπής  $\omega_C$ , μπορούμε να επιλέξουμε τις τιμές των στοιχείων R και C. Αυτές επιλέγονται ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη  $\omega_C = \frac{1}{RC}$ .

Δεδομένου ότι τα κέρδη των φίλτρων 2ης τάξης είναι συγκεκριμένα, μπορούμε να επιλέξουμε τις τιμές των στοιχείων R3, R4, R5 και R6 ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες  $\frac{R_3 + R_4}{R_3} \approx 2,4$  και  $\frac{R_5 + R_6}{R_5} \approx 1,4$ . Τέλος, μπορούμε να ελέγξουμε το κέρδος

του όλου φίλτρου το οποίο θα είναι  $A_{V0} = A_{V2} \cdot A_{V3} \cdot A_{V1} = 2,4 \cdot 1,4 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ ,

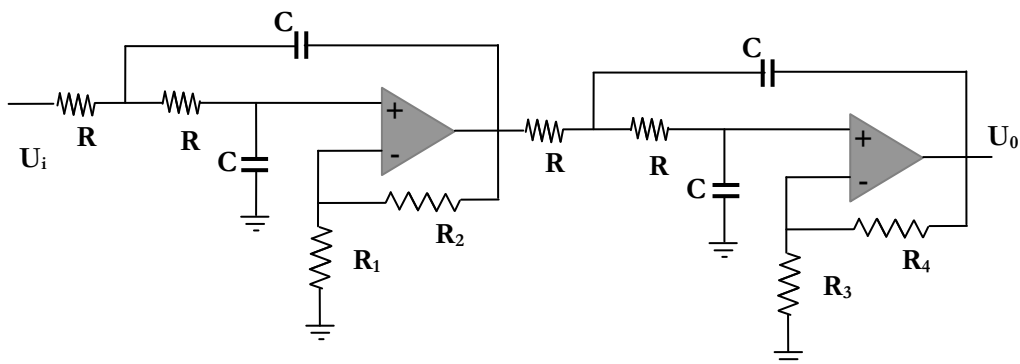
τοποθετώντας κατάλληλες αντιστάσεις R1 και R2. Η αυθαιρετη επιλογή αυτών μας δίνει περιθώρια για να επιλέξουμε το επιθυμητό κέρδος.



Σχήμα 6.10. Υπεραυτό Φίλτρο Butterworth 5ης τάξης

### 6.4.3. Φίλτρο Butterworth άρτιας τάξης

Είναι εύκολα κατανοητό μετά την ανάλυση που προηγήθηκε ότι τα φίλτρα Butterworth άρτιας τάξης δεν μας δίνουν περιθώριο να ελέγξουμε το κέρδος του φίλτρου.



Σχήμα 6.11. Βαθυπερατό φίλτρο Butterworth 4ης τάξης

**Παράδειγμα 6.1:** Να σχεδιαστεί βαθυπερατό φίλτρο Butterworth με κέρδος πάνω από 4 dB σε χαμηλές συχνότητες, με συχνότητα αποκοπής 1KHz και με κλίση στις υψηλές συχνότητες 24dB/οκτάβα.

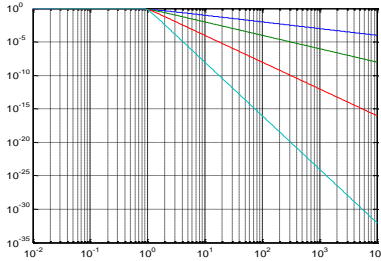
**Λύση:** Το φίλτρο πρώτης τάξης έχει κλίση 6dB/οκτάβα. Το φίλτρο δεύτερης τάξης έχει κλίση 12dB/οκτάβα. Το φίλτρο τρίτης τάξης έχει κλίση 18dB/οκτάβα. Το φίλτρο τέταρτης τάξης έχει κλίση 24dB/οκτάβα. Επομένως, επιλέγουμε  $N=4$ . Θα χρησιμοποιήσουμε 2 φίλτρα δεύτερης τάξης. Από τα πολυώνυμα του πίνακα 3.1, το αντίστοιχο πολυώνυμο Butterworth τέταρτης τάξης είναι  $(s^2 + 0,765s + 1) \cdot (s^2 + 0,848s + 1)$ . Το πρώτο φίλτρο δεύτερης τάξης θα έχει  $3-A_1=0,765$  και το δεύτερο  $3-A_1=0,848$ . Επομένως  $A_1=3-0,765=1,152$  και  $A_2=3-0,848=2,235$ . Έτσι, επιλέγουμε τις αντιστάσεις  $R_1, R_2, R_3, R_4$ :

$$A_{V1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1,152 \text{ και } A_{V2} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} = 2,235$$

Το κέρδος του κυκλώματος είναι  $A_{V1} \cdot A_{V2} = 1,152 \cdot 2,235 = 2,57 = 8,21\text{dB}$ . Ικανοποιήθηκαν οι προδιαγραφές και επομένως δεν χρειάζεται να μεγαλώσουμε την τάξη του κυκλώματος.

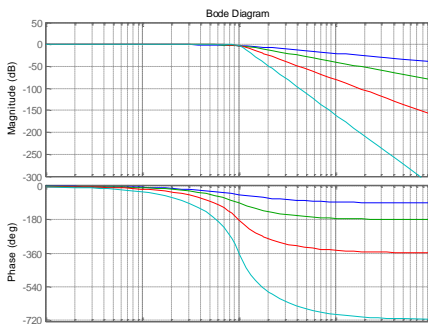
## 6.5. Απόκριση Συχνότητας με τη Βοήθεια του Matlab

Στα ακόλουθα σχήματα παρουσιάζονται οι αποκρισεις βαθυπερατών φίλτρων Butterworth τάξης 1ης, 2ης, 4ης, 8ης και 10ης.



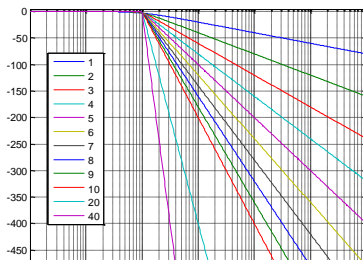
```
w=0.01:1/1000:10000;
F1=abs(1./(1+i*w));
F2=abs(1./((i*w).^2+1.414*i*w+1));
F4=abs(1./(((i*w).^2+0.7654*i*w+1).*(i
*w).^2+1.8478*i*w+1)));
F8=abs(1./(((i*w).^2+0.3986*i*w+1).*(i
*w).^2+1.111*i*w+1).*((i*w).^2+1.6630*i
*w+1).*((i*w).^2+1.9622*i*w+1)));
loglog(w,F1,w,F2,w,F4,w,F8)
grid on
```

Σχήμα 6.12



```
f1=tf([0,1],[1,1]);
f2=tf([0,0,1],[1,1.414,1]);
a=tf([0,0,1],[1,0.7654,1]);
b=tf([0,0,1],[1,1.8478,1]);
f4=a*b;
c=tf([0,0,1],[1,0.3986,1]);
d=tf([0,0,1],[1,1.111,1]);
e=tf([0,0,1],[1,1.663,1]);
f=tf([0,0,1],[1,1.9622,1]);
f8=c*d*e*f;
bode(f1,f2,f4,f8)
grid on
```

Σχήμα 6.13



```
w=-1:0.01:4;
F1=(abs(1./(1+i*w)));
F2=(abs(1./(((i*w).^2+1.414*i*w+1
))));
F4=(abs(1./(((i*w).^2+0.7654*i*w
+1).*((i*w).^2+1.8478*i*w+1)));
F8=(abs(1./(((i*w).^2+0.3986*i*w
+1).*((i*w).^2+1.111*i*w+1).*((i*
w).^2+1.6630*i*w+1).*((i*w).^2+1
.9622*i*w+1)));
plot(w,F1,w,F2,w,F4,w,F8)
grid on
```

Σχήμα .14

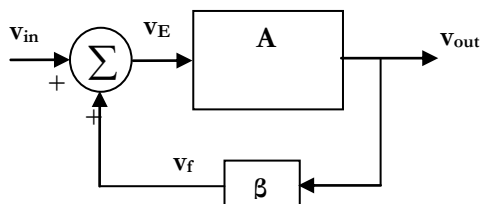
## Ενισχυτές με Ανάδραση και Ταλαντωτές

**Α**νάδραση (feedback) είναι η μέθοδος κατά την οποία λαμβάνουμε μέρος της εξόδου (δείγμα) ενός συστήματος (σύστημα ανοικτού βρόχου) και το ανατροφοδοτούμε (προσθέτουμε ή αφαιρούμε) στην είσοδο. Το νέο σύστημα λέγεται σύστημα κλειστού βρόχου ή σύστημα με ανάδραση.

### 7.1. Θετική ανάδραση

**Θ**εωρούμε ότι το κέρδος του συστήματος ανοικτού βρόχου (σύστημα χωρίς ανάδραση) είναι  $A$ , ο συντελεστής ανάδρασης είναι  $\beta$  (το κλάσμα της εξόδου που ανατροφοδοτείται  $\beta = \frac{V_f}{V_{out}}$ ) και το κέρδος του συστήματος κλειστού

βρόχου είναι  $A_f$ . Αν η είσοδος είναι η  $V_{in}$  και η έξοδος είναι η  $V_{out}$ , τότε το σήμα που ανατροφοδοτείται (σήμα ανάδρασης – feedback signal) είναι το  $V_f = \beta \cdot V_{out}$ . Το νέο σήμα **προστίθεται** στην είσοδο του συστήματος ανοικτού βρόχου.



Σχήμα 7.1. Γενικό Σύστημα Κλειστού Βρόχου

Από το σχήμα 7.1 προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$V_{out} = A \cdot v_E \Rightarrow v_{out} = A \cdot (v_{in} + v_f) \Rightarrow v_{out} = A \cdot v_{in} + A \cdot \beta \cdot v_{out} \Rightarrow$$

$$v_{\text{out}}(1-A\cdot\beta)=A\cdot v_{\text{in}} \Rightarrow$$

$$\frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} = \frac{A}{1-A\cdot\beta} \Rightarrow A_f = \frac{A}{1-A\cdot\beta} \quad (7.1)$$

Από την 7.1, μπορούμε να λάβουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- 1) Αν  $A\cdot\beta=0 \Rightarrow \beta=0$  τότε  $A_f = A$  και δεν έχουμε ανάδραση.
- 2) Αν  $1-A\cdot\beta < 1 \Rightarrow A\cdot\beta > 0$  τότε τα  $A$  και  $\beta$  είναι **ομόσημα** μεταξύ τους, και ο παρονομαστής της 7.1 είναι μικρότερος της μονάδας. Δηλαδή το κέρδος με ανάδραση είναι μεγαλύτερο από το κέρδος χωρίς ανάδραση. Όταν το κέρδος αυξάνεται ( $A_f > A$ ) λέμε ότι έχουμε **θετική ανάδραση**. Τότε το σήμα ανάδρασης **προστίθεται** στον αθροιστή του σχήματος 7.1. Το σήμα εισόδου του συστήματος  $A$  το  $v_E$  μεγάλωσε  $v_E = v_{\text{in}} + v_f$  κι επομένως το εξωτερικό σήμα εισόδου μικραίνει  $v_{\text{in}} = v_E - v_f$ . Επίσης, ο παρονομαστής της 7.1 είναι πάντα μεγαλύτερος της μονάδας κατά τη θετική ανάδραση. Για να μην αλλάξει μορφή το σύστημα (π.χ. από θετικό  $A_f$  να γίνει αρνητικό) η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για τη θετική ανάδραση είναι  $0 < 1 - A\cdot\beta < 1 \Rightarrow -1 < -A\cdot\beta < 0 \Rightarrow 1 > A\cdot\beta > 0 \Rightarrow A\cdot\beta < 1$ .

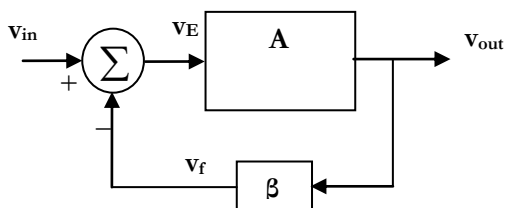
3) Για να είναι το σήμα ανάδρασης  $v_f$  μέρος της εξόδου  $v_f < v_o$ , πρέπει  $\beta = \frac{v_f}{v_{\text{out}}} < 1$ .

4) Αν ο παρονομαστής της 7.1 γίνει ελάχιστος  $1 - A\cdot\beta = 0 \Rightarrow A\cdot\beta = 1$  τότε το κέρδος  $A_f \rightarrow \infty$  και το σύστημα ταλαντώνει (άπειρο κέρδος, συνεπάγεται μέγιστο πλάτος του σήματος εξόδου δηλαδή ταλάντωση).

5) Αν  $1 - A\cdot\beta > 1 \Rightarrow A\cdot\beta < 0$  τότε τα  $A$  και  $\beta$  είναι **ετερόσημα** μεταξύ τους και ο παρονομαστής της 7.1 είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Δηλαδή το κέρδος με ανάδραση είναι μικρότερο από το κέρδος χωρίς ανάδραση. Όταν το κέρδος μειώνεται ( $A_f < A$ ) λέμε ότι έχουμε **αρνητική ανάδραση**. Τότε, το  $v_f$  **αφαιρείται** στον αθροιστή του σχήματος 7.1. Το σήμα εισόδου μεγάλωσε  $v_{\text{in}} = v_E + v_f$  αφού το σήμα εισόδου στο σύστημα ανοικτού βρόχου έγινε μικρότερο  $v_E = v_{\text{in}} - v_f$ . Γι'αυτό τα κυκλώματα αρνητικής ανάδρασης τα ονομάζουμε κυκλώματα μεγάλου σήματος.

## 7.2. Αρνητική ανάδραση

**Α**πό την παρατήρησης (5) της προηγούμενης παραγράφου, θα μπορούσαμε το σύστημα κλειστού βρόχου του σχήματος 7.1 να το τροποποιήσουμε στο σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.2.: Αρνητική Ανάδραση

$$\begin{aligned}
 v_{\text{out}} &= A \cdot v_E \Rightarrow v_{\text{out}} = A \cdot (v_{\text{in}} - v_f) \Rightarrow v_{\text{out}} = A \cdot v_{\text{in}} - A \cdot \beta \cdot v_{\text{out}} \Rightarrow \\
 v_{\text{out}}(1 + A \cdot \beta) &= A \cdot v_{\text{in}} \Rightarrow \\
 \frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} &= \frac{A}{1 + A \cdot \beta} \Rightarrow A_f = \frac{A}{1 + A \cdot \beta} \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

Τα συμπεράσματα που λαμβάνουμε από αυτή τη σχέση είναι τα ακόλουθα

- 1) Αν  $1 + A \cdot \beta > 1 \Rightarrow A \cdot \beta > 0$ , δηλαδή  $A, \beta$  ομόσημα, τότε έχουμε **αρνητική ανάδραση** και  $A_f < A$ .
- 2) Αν  $1 + A \cdot \beta < 1 \Rightarrow A \cdot \beta < 0$ , δηλαδή  $A, \beta$  ετερόσημα, τότε έχουμε **θετική ανάδραση** και  $A_f > A$
- 3) Αν  $1 + A \cdot \beta = 1 \Rightarrow A \cdot \beta = 0$ , δηλαδή  $\beta = 0$ , τότε δεν έχουμε ανάδραση.

4) Το σύστημα του σχήματος 7.2 αναφέρεται σε αρνητική ανάδραση και επομένως το κέρδος με ανάδραση πάντα μειώνεται. Δεν θα συμβούν ταλαντώσεις. Αν όμως  $A, \beta$  ετερόσημα και συμβεί  $|A \cdot \beta| = 1$  τότε θα συμβούν ταλαντώσεις. Για να αποφευχθούν οι ταλαντώσεις θα πρέπει να ισχύει ο περιορισμός  $|A \cdot \beta| < 1$ . Ας μην ξεχνάμε όμως ότι μερικές φορές οι ταλαντώσεις είναι χρήσιμες (βλέπε ταλαντωτές).

### 7.3. Ενισχυτής BJT με ανάδραση στον εκπομπό

Για να περιγράψουμε την έννοια της ανάδρασης θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα ενός απλού ενισχυτή με χρήση τρανζίστορ BJT. Στο βιβλίο «Στοιχεία Ηλεκτρονικής», κεφάλαιο 7, έχει γίνει η AC ανάλυση του ενισχυτή BJT σε αναστρέφουσα συνδεσμολογία με ανάδραση στον εκπομπό, με χρήση του υβριδικού ισοδύναμου μοντέλου.

Στο σχήμα 7.2(α) παρουσιάζεται το BJT σε συνδεσμολογία κοινού εκπομπού που έχει πολωθεί με το σωστό DC δυναμικό ( $V_{CC}$ ), μέσω της αντίστασης φορτίου  $R_L$ . Στο κύκλωμα του σχήματος 7.2(β) παρουσιάζεται η ίδια συνδεσμολογία με ανάδραση στον εκπομπό (αντίσταση  $R_E$ ). Τα υβριδικά ισοδύναμα αυτών παρουσιάζονται στο σχήμα 7.3, θεωρώντας ότι  $h_{oe} = 0$  και  $h_{re} = 0$  (βλέπε υβριδικές παράμετροι βιβλίο «Στοιχεία Ηλεκτρονικής», κεφάλαιο 7).

### 7.3.1. Αντιμετώπιση της αρνητικής ανάδρασης με χρήση κυκλωματικών στοιχείων

Θα μελετήσουμε το κέρδος τάσης για να δούμε τι προκαλεί η ανάδραση στο κέρδος του ενισχυτή. Στο σύστημα ανοικτού βρόχου (σχήμα 7.4α), το κέρδος του ενισχυτή είναι

$$A = \frac{V_{ce}}{V_{be}} \quad (7.3)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου είναι μικρό  $v_{be}$  και το σήμα εξόδου  $v_{ce}$  ενισχυμένο κατά  $A$ .

Στο σύστημα κλειστού βρόχου του σχήματος 7.3(β), το κέρδος είναι

$$A_f = \frac{V_{co}}{V_{bo}} = \frac{V_{out}}{V_{bo}} \quad (7.4)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου είναι μεγάλο, σε σχέση με το σήμα εισόδου του συστήματος ανοικτού βρόχου.

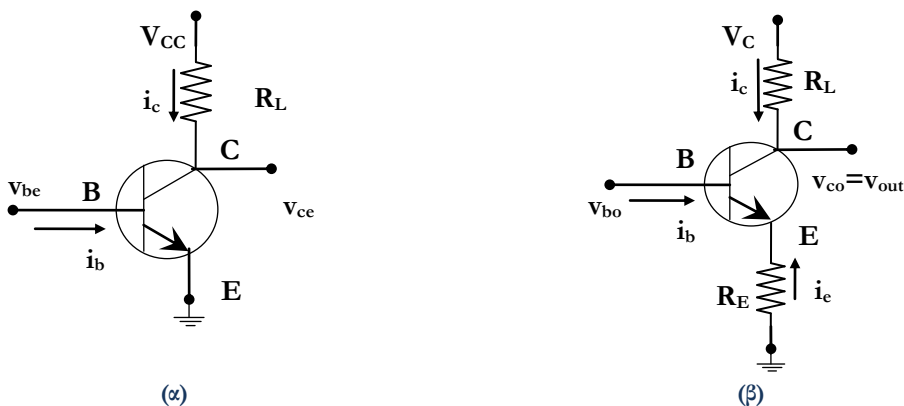
$$V_{in} = V_{bo} = V_{be} + V_{eo} = V_{be} + V_f \quad (7.5)$$

Το σήμα εξόδου είναι

$$V_{out} = V_{co} = V_{ce} + V_{eo} = V_{ce} + V_f \quad (7.6)$$

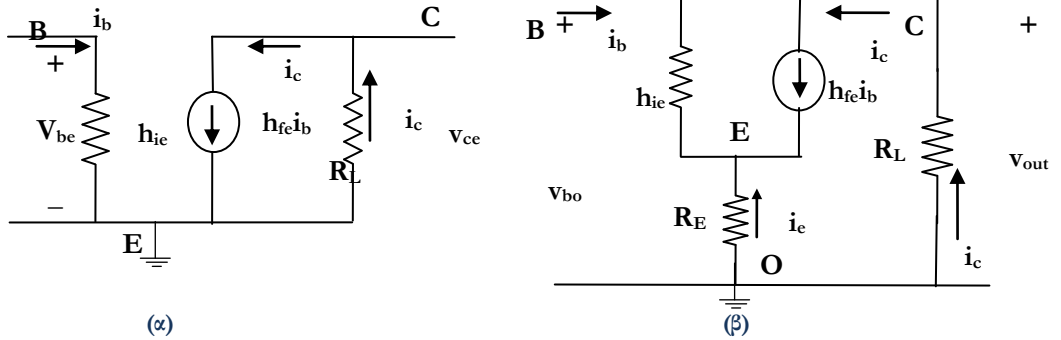
Μέρος του σήματος εξόδου, το  $v_{eo}$ , το οποίο θα το καλούμε σήμα ανάδρασης  $v_f$ , επέστρεψε στην είσοδο. Το ποσοστό του σήματος εξόδου που επιστρέφει θα το ονομάσουμε συντελεστή ανάδρασης και θα το συμβολίζουμε με  $\beta$ .

$$\beta = \frac{V_{eo}}{V_{co}} = \frac{V_f}{V_{out}} \quad (7.7)$$



Σχήμα 7.3: Ενισχυτής BJT σε συνδεσμολογία κοινού εκπομπού (α) χωρίς ανάδραση (β) με ανάδραση στον εκπομπό





Σχήμα 7.4: Ισοδύναμα υβριδικά μοντέλα των ενισχυτών του σχήματος 7.2 (α) χωρίς ανάδραση (β) με ανάδραση

Διαιρώντας την (7.6) με την (7.5) και χρησιμοποιώντας την (7.7), προκύπτει

$$A_f = \frac{v_{co}}{v_{bo}} = \frac{v_{out}}{v_{be} + v_f} = \frac{\frac{v_{out}}{v_{be}}}{1 + \frac{v_f}{v_{be}}} = \frac{\frac{v_{out}}{v_{be}}}{1 + \frac{v_f}{v_{out}} \cdot \frac{v_{out}}{v_{be}}} = \frac{A}{1 + \beta \cdot A}$$

όπου

$$\beta = \frac{v_{eo}}{v_{co}} = \frac{v_f}{v_{out}} = \frac{-i_e \cdot R_E}{-i_c \cdot R_C} \quad (7.8)$$

Όμως

$$i_c + i_e + i_b = 0 \Rightarrow h_{fe} \cdot i_b + i_e + i_b = 0 \Rightarrow i_e = -i_b(1 + h_{fe}) \Rightarrow \quad h_{fe} \gg 1$$

$$i_e \approx -i_b \cdot h_{fe} = -i_c \quad (7.9)$$

Επομένως η (7.8) γίνεται

$$\beta = \frac{v_f}{v_{out}} = -\frac{R_E}{R_C} \quad (7.10)$$

### 7.3.2. Αντιμετώπιση της ανάδρασης με χρήση κυκλωματικών παραμέτρων

Και για τα δύο κυκλώματα του σχήματος 7.4 ισχύει:

$$i_{out} = -i_c = -h_{fe} \cdot i_b \Rightarrow \frac{i_{out}}{i_b} = -h_{fe}$$

$$A_I = A_{If} = -h_{fe} \quad (7.11)$$

Επομένως, η αντίσταση στον εκπομπό δεν επηρεάζει το κέρδος ρεύματος.

Για το κύκλωμα χωρίς ανάδραση (σύστημα ανοικτού βρόχου στο σχήμα 7.4α) θα βρούμε το κέρδος τάσης.

$$\left. \begin{aligned} v_{ce} &= -i_c \cdot R_L = -h_{fe} R_L i_b \\ v_{be} &= h_{ie} \cdot i_b \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_V = \frac{v_{ce}}{v_{be}} = \frac{-h_{fe} \cdot R_L \cdot i_b}{h_{ie} \cdot i_b}$$

$$A_V = -\frac{h_{fe} R_L}{h_{ie}} \quad (7.12)$$

Για το κύκλωμα με ανάδραση (σύστημα κλειστού βρόχου στο σχήμα 7.3β) ισχύει

$$\left. \begin{aligned} V_{co} &= -i_c \cdot R_L = -h_{fe} R_L i_b \\ v_{bo} &= h_{ie} \cdot i_b - R_E \cdot i_e \approx h_{ie} \cdot i_b + R_E \cdot h_{fe} \cdot i_b = (h_{ie} + h_{fe} R_E) \cdot i_b \\ i_e &= -h_{fe} i_b \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$A_{Vf} = \frac{v_{out}}{v_{bo}} = -\frac{-h_{fe} \cdot i_b \cdot R_L}{(h_{ie} + h_{fe} R_E) \cdot i_b} = -\frac{h_{fe} \cdot R_L}{h_{ie} + h_{fe} R_E} \quad (7.13)$$

Ξεκινώντας από την 7.13 θα προσπαθήσουμε να την αναπτύξουμε ώστε να καταλήξουμε σε μία σχέση ανάδρασης μεταξύ του  $A_{vf}$  και του  $A_v$ , χρησιμοποιώντας την 7.12 για το  $A_v$  και την 7.10 για το  $\beta$ .

$$A_{Vf} = \frac{-h_{fe} \cdot R_L}{h_{ie} + h_{fe} \cdot R_E} = -\frac{-\frac{h_{fe} \cdot R_L}{h_{ie}}}{1 + \frac{R_E \cdot h_{fe}}{h_{ie}}} = \frac{A_V}{1 + \frac{R_E}{R_L} \cdot \frac{h_{fe} \cdot R_L}{h_{ie}}} = \frac{A_V}{1 + \left(-\frac{R_E}{R_L}\right) \cdot \left(-\frac{h_{fe} R_L}{h_{ie}}\right)}$$

$$A_{Vf} = \frac{A_V}{1 + \beta \cdot A_V} \quad (7.2)$$

### 7.2.3. Αντιμετώπιση της αρνητικής ανάδρασης με χρήση συστημικών παραμέτρων

Από το σχήμα 7.2 προέκυψε η ακόλουθη σχέση:

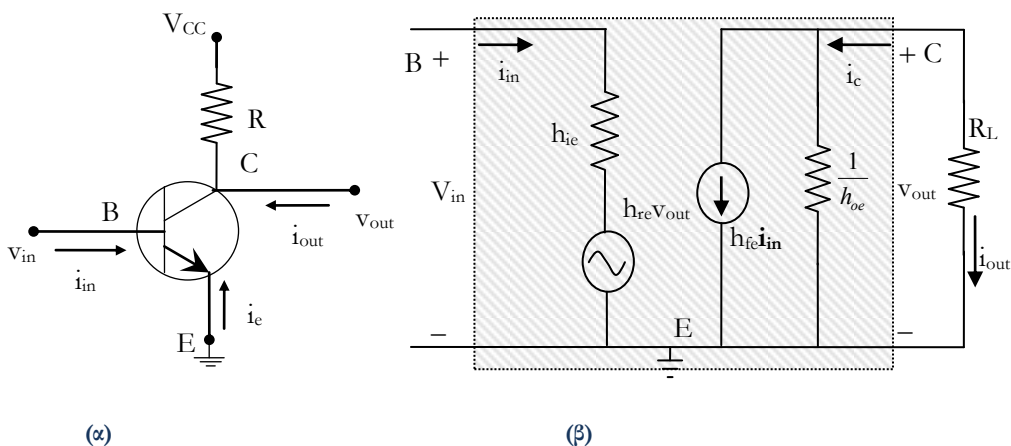
$$A_f = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{A}{1 + A \cdot \beta} \quad (7.2)$$

Το κέρδος μειώνεται σε σχέση με το κέρδος ανοικτού βρόχου εφόσον ο παρονομαστής της σχέσης 7.2 είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Αυτό προϋποθέτει ότι  $\beta A > 0$ , ή αλλιώς ότι τα  $A$  και  $\beta$  πρέπει να είναι **ομόσημα**. Εφόσον ο ενισχυτής του παραδείγματός μας είναι ενισχυτής σε αναστρέφουσα συνδεσμολογία (αρνητικό κέρδος, σχέση 7.12), αυτό συνεπάγεται ότι ο συντελεστής ανάδρασης  $\beta$  είναι αρνητικός, όπως αποδείχτηκε στη σχέση 7.10. Η έννοια του αρνητικού κέρδους έχει απλά να κάνει με το μείον στις σχέσεις

7.12 και 7.13, όπου δηλώνεται ότι η τάση εξόδου έχει διαφορά φάσης με την τάση εισόδου  $180^\circ$ . Το ημιτονικό σήμα που θα μπει στην είσοδο θα γίνει  $-$ ημίτονο στην έξοδο.

### 7.4. Ενισχυτής BJT με ανάδραση στη βάση

Στο σχήμα 7.5 παρουσιάζεται ένας ενισχυτής BJT κοινού εκπομπού ( $\alpha$ ) και το ισοδύναμο υβριδικό μοντέλο αυτού ( $\beta$ ) χωρίς τις παραδοχές για τις υβριδικές παραμέτρους που έγιναν στην παράγραφο 7.1.



Σχήμα 7.5: (α) Ενισχυτής και (β) το υβριδικό μοντέλο του

Από το σχήμα 7.5(β) εξαγάγουμε τις ακόλουθες σχέσεις για το κέρδος ρεύματος και το κέρδος τάσης χωρίς ανάδραση:

$$i_{out} = -i_c = -h_{fe} \cdot i_{in} - h_{oe} \cdot v_{out} \Rightarrow \frac{i_{out}}{i_{in}} = -h_{fe} - h_{oe} \cdot \frac{i_{out} \cdot R_L}{i_{in}} \Rightarrow \frac{i_{out}}{i_{in}} (1 + h_{oe} \cdot R_L) = -h_{fe} \Rightarrow$$

$$A_I = -\frac{h_{fe}}{1 + h_{oe} \cdot R_L} \quad (7.14)$$

$$v_{in} = h_{ie} \cdot i_{in} + h_{re} \cdot v_{out} \Rightarrow \frac{v_{in}}{v_{out}} = h_{ie} \cdot \frac{i_{in}}{v_{out}} + h_{re} \Rightarrow \frac{v_{in}}{v_{out}} = h_{ie} \cdot \frac{i_{in}}{i_{out} \cdot R_L} + h_{re}$$

$$A_V = -\frac{h_{fe} \cdot R_L}{h_{ie} (1 + h_{oe} \cdot R_L) + h_{re} \cdot h_{fe}} \quad (7.15)$$

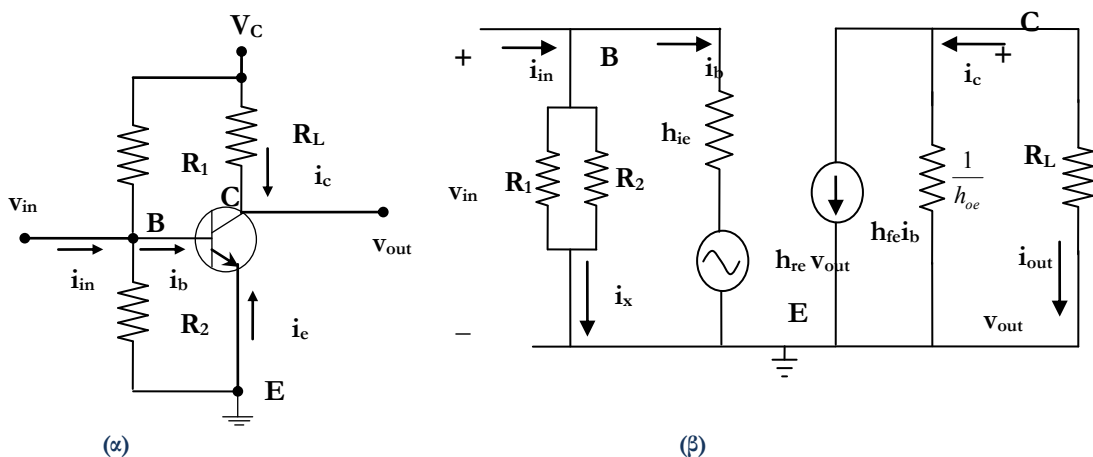
Το  $-$  που εμφανίζεται στο κέρδος ρεύματος και στο κέρδος τάσης εξηγεί τη λειτουργία της αναστροφής. Το σήμα εξόδου έχει καθυστέρηση φάσης  $180^\circ$ .

Στο σχήμα 7.6 παρουσιάζεται το ίδιο κύκλωμα με αντιστάσεις πόλωσης της βάσης. Προσθέσαμε δηλαδή τις αντιστάσεις  $R_1$  και  $R_2$  στην τοπολογία που φαίνεται.

Παρατηρώντας το σχήμα 7.6(β) θα εξαχθούν το κέρδος ρεύματος και το κέρδος τάσης με ανάδραση:

$$i_{out} = -i_c = -h_{fe} \cdot i_b - h_{oe} \cdot v_{out} \Rightarrow \frac{i_{out}}{i_b} = -h_{fe} - h_{oe} \cdot \frac{i_{out} \cdot R_L}{i_b} \Rightarrow$$

$$\frac{i_{out}}{i_b} (1 + h_{oe} \cdot R_L) = -h_{fe} \Rightarrow \frac{i_{out}}{i_b} = -\frac{h_{fe}}{1 + h_{oe} \cdot R_L} \quad (7.16)$$



Σχήμα 7.6: (α) Ενισχυτής BJT κοινού εκπομπού με αντιστάσεις πόλωσης της βάσης και (β) Το ισοδύναμο υβριδικό μοντέλο.

Στον κόμβο εισόδου B, ισχύει:

$$i_{in} = i_b + i_x \Rightarrow i_{in} = i_b + \frac{v_{in}}{R_B} \Rightarrow i_{in} = i_b + \frac{i_b \cdot h_{ie} + h_{re} \cdot v_{out}}{R_B} \Rightarrow$$

$$i_{in} \cdot R_B = i_b (R_B + h_{ie}) + h_{re} \cdot v_{out} \quad (7.17)$$

όπου θέσαμε  $R_B$  τον παράλληλο συνδυασμό των  $R_1, R_2$ ,  $R_B = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ .

Όμως

$$v_{out} = i_{out} \cdot R_L = -i_c \cdot R_L = -(h_{fe} \cdot i_b + h_{oe} \cdot v_{out}) \cdot R_L \Rightarrow$$

$$v_{out} \cdot (1 + h_{oe} \cdot R_L) = -h_{fe} \cdot i_b \cdot R_L \Rightarrow v_{out} = -\frac{h_{fe} \cdot R_L \cdot i_b}{1 + h_{oe} \cdot R_L} \quad (7.18)$$

Αντικαθιστώντας της 7.18 στην 7.17 προκύπτει

$$i_{in} \cdot R_B = i_b(R_B + h_{ie}) - h_{re} \cdot \frac{h_{fe} \cdot R_L \cdot i_b}{1 + h_{oe} \cdot R_L} \Rightarrow$$

$$\frac{i_{in}}{i_b} = 1 + \frac{h_{ie}}{R_B} - \frac{h_{re} \cdot h_{fe} \cdot R_L}{(1 + h_{oe} \cdot R_L) \cdot R_B} \quad (7.19)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις 7.16 και 7.19, προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς:

$$A_{If} = \frac{i_{out}}{i_{in}} = - \frac{h_{fe}}{(1 + h_{oe} \cdot R_L) \cdot \left( 1 + \frac{h_{ie}}{R_B} - \frac{h_{re} \cdot h_{fe} \cdot R_L}{(1 + h_{oe} \cdot R_L) \cdot R_B} \right)} \quad (7.20)$$

Παρατηρούμε ότι το κέρδος ρεύματος μειώθηκε. Θα προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε την 7.20 αντικαθιστώντας σ' αυτή την 7.14 για το κέρδος ρεύματος χωρίς ανάδραση, ώστε να οδηγηθούμε στην 7.2 και να βρούμε το συντελεστή ανάδρασης  $\beta$ .

$$A_{If} = \frac{A}{1 + \frac{h_{ie} \cdot (1 + h_{oe} \cdot R_L) - h_{re} \cdot h_{fe} \cdot R_L}{(1 + h_{oe} \cdot R_L) \cdot R_B}} = \frac{A}{1 + \frac{-h_{fe} \cdot h_{ie} \cdot (1 + h_{oe} \cdot R_L) - h_{re} \cdot h_{fe} \cdot R_L}{-h_{fe} \cdot (1 + h_{oe} \cdot R_L) \cdot R_B}}$$

$$A_{If} = \frac{A}{1 + A \cdot \frac{h_{ie} \cdot (1 + h_{oe} \cdot R_L) - h_{re} \cdot h_{fe} \cdot R_L}{-h_{fe} \cdot R_B}}$$

Από την τελευταία σχέση, συγκρίνοντάς της με την 7.2, προκύπτει ο συντελεστής ανάδρασης

$$\beta = - \frac{h_{ie} \cdot (1 + h_{oe} \cdot R_L) - h_{re} \cdot h_{fe} \cdot R_L}{h_{fe} \cdot R_B} = - \frac{h_{ie} + (h_{ie}h_{oe} - h_{re} \cdot h_{fe}) \cdot R_L}{h_{fe} \cdot R_B} \quad (7.21)$$

Αν  $h_{re}=0$  τότε η 7.21 γίνεται:

$$\beta = - \frac{h_{ie}(1 + h_{oe} \cdot R_L)}{h_{fe} \cdot R_B} \quad (7.22)$$

Αν  $h_{re}=0$  και Αν  $h_{oe}=0$  τότε η 7.21 γίνεται:

$$\beta = - \frac{h_{ie}}{h_{fe} \cdot R_B} \quad (7.23)$$

Από το σχήμα 7.6(β) παρατηρούμε ότι το μικρό σήμα εισόδου χωρίς ανάδραση ήταν  $i_b$ . Με την ανάδραση το σήμα εισόδου γίνεται μεγάλο:  $i_i = i_b + i_x$ . Το σήμα εξόδου και στις δύο περιπτώσεις είναι  $i_o = -i_c = -h_{fe} \cdot i_b - h_{oe} \cdot v_o$ . Συντελεστής ανάδρασης είναι ο λόγος του σήματος που ανατροφοδοτείται από την έξοδο στην είσοδο (μέρος του σήματος εξόδου) προς το σήμα εξόδου.

$$\beta = \frac{i_x}{i_{out}} = - \frac{h_{ie} + (h_{ie}h_{oe} - h_{re} \cdot h_{fe}) \cdot R_L}{h_{fe} \cdot R_B} \quad (7.21)$$

και από το σχήμα 7.6β αποδεικνύεται η ισχύς της 7.2:

$$A_f = \frac{i_o}{i_i} = \frac{i_o}{i_x + i_b} = \frac{\frac{i_o}{i_b}}{\frac{i_x}{i_b} + 1} = \frac{A}{1 + \frac{i_x}{i_b}} = \frac{A}{1 + \frac{i_x \cdot i_o}{i_o \cdot i_b}} = \frac{A}{1 + \frac{i_x}{i_o} \cdot A} = \frac{A}{1 + \beta \cdot A} \quad (7.2)$$

Για να βρούμε το  $\beta$ , από τον κόμβο εισόδου  $\beta$  έχουμε

$$i_{in} = i_x + i_b \Rightarrow \frac{i_{in}}{i_o} = \frac{i_x}{i_o} + \frac{i_b}{i_o} \Rightarrow \frac{i_x}{i_o} = \frac{i_{in}}{i_o} - \frac{i_b}{i_o} \Rightarrow \frac{i_x}{i_o} = \frac{i_{in}}{i_o} - \frac{i_b}{i_{in}} \cdot \frac{i_{in}}{i_o} \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{i_x}{i_o} = \frac{i_{in}}{i_o} \cdot \left( 1 - \frac{i_b}{i_{in}} \right)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τις 7.19 και 7.20 προκύπτει η σχέση 7.21.

Όσον αφορά στο κέρδος τάσης, αυτό παραμένει σταθερό. Παρατηρούμε ότι η τάση εισόδου με αντιστάσεις πόλωσης στη βάση ταυτίζεται με την τάση εισόδου χωρίς τις αντιστάσεις αυτές. Επομένως η σχέση 7.15 ισχύει και για το σχήμα 7.6β:

$$A_{Vf} = -\frac{h_{fe} \cdot R_L}{h_{ie}(1 + h_{oe} \cdot R_L)} \quad (7.24)$$

## 7.5. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα αρνητικής ανάδρασης

B

αιζόμενοι στη σχέση 7.1 αποδεικνύονται τα ακόλουθα:

Η μεταβλητή εξόδου επιστρέφει στην είσοδο με τέτοιο τρόπο ώστε να αντιτίθεται στο σήμα εισόδου. **Το κέρδος γίνεται μικρότερο από το κέρδος χωρίς ανάδραση.** Αυτό είναι το μοναδικό μειονέκτημα της αρνητικής ανάδρασης. Όσον αφορά στα πλεονεκτήματα:

**Βελτιώνεται  
η ευστάθεια**

Έστω ότι σε ένα σύστημα έχουμε μεταβολή στο κέρδος ανοικτού βρόχου 20%. Δηλαδή για κάποιο λόγο (θόρυβος, θερμοκρασία, υγρασία,...) το  $A$  μεταβλήθηκε:

Από  $A_{αρχικό} = -100$  σε  $A_{τελικό} = -80$ .

Τότε, αποδεικνύεται ότι:  $A_{f,αρχικό} = -9.1$  και  $A_{f,τελικό} = -8.8$ ,

με δεδομένο ότι  $\beta = 0,1$ .

Επομένως, η μεταβολή στο κέρδος κλειστού βρόχου είναι 3.3%

**Βελτιώνεται  
το ποσοστό  
παραμόρφωσης**

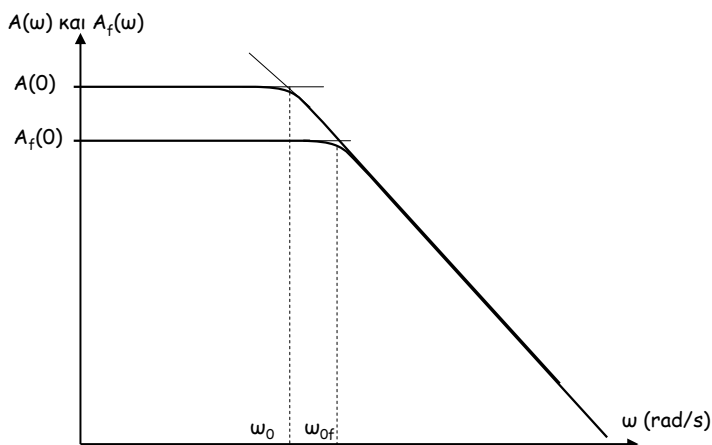
Έστω σήμα εισόδου  $V_i$ . Η παραμόρφωση εξόδου θα είναι  $D_f V_0$ . Μετά την ανάδραση, η παραμόρφωση  $\beta D_f V_0$  επιστρέφει στην είσοδο και προστίθεται στο  $V_E$ . Μετά την ενίσχυση η παραμόρφωση γίνεται  $\beta D_f V_0 A$  και προστίθεται στο σήμα εξόδου  $V_0$ . Εξεί προστίθεται και η παραμόρφωση του αρχικού ενισχυτή  $D V_0$ . Αν  $D=10\%$  τότε  $D_f=0,9\%$

$$D_f V_0 = D V_0 + \beta D_f V_0 A \quad \text{και} \quad \frac{D_f}{D} = \frac{1}{1 - \beta A}$$

Αν  $D=10\%$  τότε  $D_f=0,9\%$

**Αυξάνεται το  
εύρος ζώνης  
συχνοτήτων**

Έστω ενισχυτής που επιτρέπει τη διέλευση DC με εύρος ζώνης  $\omega_0$  και μέγιστο κέρδος  $A(0)$ . Στο σχήμα 7.7 παρουσιάζεται η απόκριση ενός ενεργού βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής  $\omega_0$ . Η συνάρτηση μεταφοράς του (κέρδος ανοικτού βρόχου) θα είναι:



Σχήμα 7.7. Αποκρίσεις ανοικτού και κλειστού βρόχου ενός βαθυπερατού ενεργού φίλτρου

$$A(\omega) = \frac{A(0)}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (7.25)$$

Το κέρδος κλειστού βρόχου συναρτήσει της συχνότητας θα είναι:

$$A_f(\omega) = \frac{A(\omega)}{1 - \beta A(\omega)} \quad (7.26)$$

Με μέγιστο κέρδος (κέρδος χαμηλών συχνοτήτων):

$$A_f(0) = \frac{A(0)}{1 - \beta A(0)}$$

Επειδή  $1 - \beta A > 1$ , το μέγιστο κέρδος με ανάδραση είναι μικρότερο από το μέγιστο κέρδος χωρίς ανάδραση

Η συχνότητα αποκοπής θα βρεθεί αν αντικαταστήσουμε στην 7.26 την 7.25:

$$A_f(\omega) = \frac{\frac{A(0)}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}{1 - \beta \frac{A(0)}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}} \Rightarrow A_f(\omega) = \frac{A(0)}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} - \beta A(0)} \Rightarrow A_f(\omega) = \frac{\frac{A(0)}{1 - \beta A(0)}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 [1 - \beta A(0)]}} \Rightarrow$$

$$A_f(\omega) = \frac{A_f(0)}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{0f}}}$$

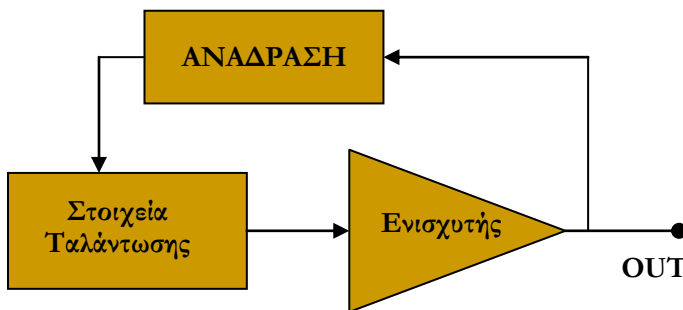
με

$$\omega_{0f} = \omega_0 [1 - \beta A(0)] \tag{7.27}$$

Επειδή  $1 - \beta A > 1$ , η νέα συχνότητα αποκοπής είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα αποκοπής χωρίς ανάδραση.

## 7.6. Ταλαντωτές

**Τ**αλαντωτές είναι τα κυκλώματα που παράγουν ένα σήμα AC συγκεκριμένης συχνότητας (RF). Σε αυτά τα κυκλώματα δεν υπάρχει σήμα εισόδου, παρά μόνο το σήμα της DC τροφοδοσίας των ενεργών στοιχείων.



Σχήμα 7.8: Δομικό διάγραμμα ταλαντωτή



### 7.6.1. Γενικά

Ταλαντωτής είναι ένα κύκλωμα που παράγει ηλεκτρικό σήμα σταθερής συχνότητας. Η συχνότητα ταλάντωσης εξαρτάται από από στοιχεία ταλάντωσης (L,C,R). Έτσι έχουμε ταλαντωτή που ταλαντώνεται εξαιτίας του δικτύωματος RC ή του συντονισμένου κυκλώματος LC. Αυτοί οι ταλαντωτές είναι φθινοί αλλά όχι σταθεροί και παράγουν χαμηλές συχνότητες. Οι κρύσταλλοι χρησιμοποιούνται για να παράγουν μια συγκεκριμένη υψηλή συχνότητα και έχουν μεγάλη σταθερότητα.

Δίνοντας ενέργεια σε ένα συντονισμένο κύκλωμα αυτό θα παράγει μια συχνότητα ενώ η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα. Για να κρατήσουμε το πλάτος της ταλάντωσης σταθερό πρέπει να τροφοδοτούμε το κύκλωμα με ενέργεια: Αυτό γίνεται από την έξοδο του ενισχυτή που χρησιμοποιεί ο ταλαντωτής για την επεξεργασία του ασθενούς σήματος που παράγει το συντονισμένο κύκλωμα. Άρα, μέρος του σήματος εξόδου οδηγείται στην είσοδο του συντονισμένου κυκλώματος.

Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι ο ταλαντωτής είναι ένας ενισχυτής που έχει ανάδραση και χρησιμοποιεί στοιχεία παραγωγής ταλαντώσεων.

### 7.6.2. Ταξινόμηση Ταλαντωτών

Οι ταλαντωτές ταξινομούνται στις ακόλουθε ομάδες:

A) Τριγωνικοί, τετραγωνικοί, ημιτονοειδείς

B) VCOs: Η συχνότητα ελέγχεται από τάση (Voltage Controlled Oscillator)

Γ) Ταλαντωτές χαμηλών συχνοτήτων, ακουστικών συχνοτήτων, ραδιοσυχνοτήτων

Δ) Πολυδονητές:

i) Ταλαντώνονται στιγμιαία, αλλάζουν μόνο την κατάσταση εξόδου μεταξύ δύο διακεκριμένων θέσεων (1 ή 0) κάθε φορά που έρχεται το σήμα ελέγχου

ii) Ταλαντώνονται συνεχώς με δύο διακεκριμένες θέσεις εξόδου (τετραγωνικός παλμός) και παρέχουν τη δυνατότητα διαφορετικών χρονικά ημιπεριόδων.

Τα περισσότερα κυκλώματα ταλαντωτών κατασκευάζονται με transistor BJT ή με FET (τα οποία προτιμώνται λόγω της μεγαλύτερης αντίστασης εισόδου). Σύνηθες πρόβλημα ταλαντωτών είναι η σταθεροποίηση της πόλωσης η οποία μπορεί να προκαλέσει ολίσθηση της συχνότητας εξόδου λόγω ολίσθησης του σημείου ηρεμίας. Τα κυριότερα κυκλώματα ταλαντωτών είναι:

Κυκλώματα με θετική ανάδραση	Κυκλώματα με αρνητική ανάδραση
Meisner (με συντονισμένο LC)	Με κρύσταλο χαλαζιού
Hartley και Colpits (με συντονισμένο LC)	Με δίοδο tunnel
Ολίσθησης φάσης (Phase-Shift)	

### 7.6.3. Γενική μορφή κυκλώματος Ταλαντωτή

Στο σχήμα 7.9 παρουσιάζεται η τοπολογία του ταλαντωτή που θα μας οδηγήσει στη σχεδίαση των ταλαντωτών Colpits και Hartley.

Η σχέση 7.20 μας δίνει το κέρδος τάσης ενός ενισχυτή και μια προσέγγιση αυτής είναι η σχέση 7.11.

$$A = -\frac{h_{fe} R_L}{h_{ie}} \quad (7.11)$$

Αν αγνοήσουμε τις  $Z_1$ ,  $Z_2$  και  $Z_3$ , τότε η αντίσταση εξόδου του ενισχυτή χωρίς το δικτύωμα θα είναι:  $R_L = R_0$  όπου  $R_0 = \frac{1}{h_{oe}}$  όπως φαίνεται από τα σχήματα 7.4(α) και 7.5(β).

Με το δικτύωμα, χωρίς την ανάδραση, δηλαδή «κίβοντας» το καλώδιο που οδηγεί στην είσοδο, η σύνθετη αντίσταση εξόδου όπως φαίνεται στο σχήμα 7.10, θα είναι:

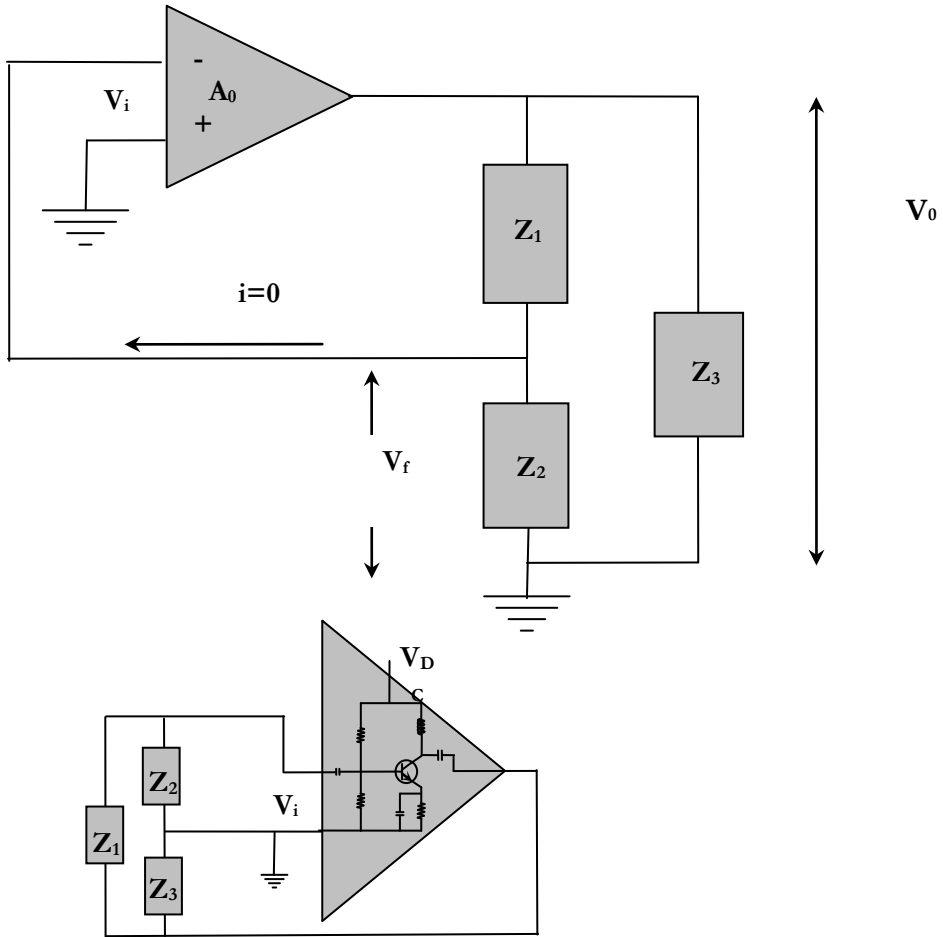
$$R_L = R_0 // Z_3 // (Z_1 + Z_2) = R_0 // \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad (7.28)$$

Επομένως, το κέρδος του ενισχυτή χωρίς το δικτύωμα είναι

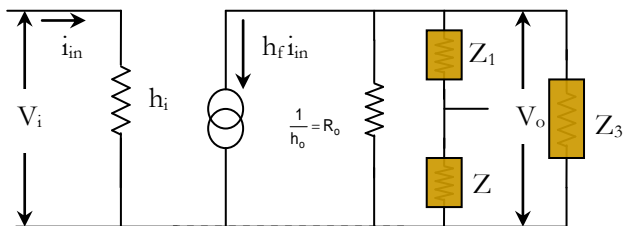
$$A_0 = -\frac{h_{fe} \cdot R_0}{h_{ie}} \quad (7.29)$$

Το κέρδος του ενισχυτή με το δικτύωμα, χωρίς την ανάδραση είναι (αντικαθιστώντας την 7.28 στην 7.11):

$$A = -\frac{h_{fe}}{h_{ie}} \frac{R_0 \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}}{R_0 + \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}} = A_0 \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{(Z_1 + Z_2 + Z_3) \cdot R_0 + Z_3(Z_1 + Z_2)} \quad (7.30)$$



Σχήμα 7.9. Γενική μορφή κυκλώματος Ταλαντωτή



Σχήμα 7.10. Το υβριδικό ισοδύναμο του σχήματος 7.9 χωρίς το καλώδιο ανάδρασης

Ο συντελεστής ανάδρασης  $\beta$  είναι

$$\beta = \frac{v_f}{v_o} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (7.31)$$

Για να αρχίσουν ταλαντώσεις πρέπει να ισχύει (σμπέρασμα 3 στην παράγραφο 7.1):

$$\beta A = 1 \quad (7.32)$$

Αντικαθιστώντας στην 7.32 τις 7.30 και 7.31 προκύπτει:

$$A_0 \frac{Z_3 Z_2}{(Z_1 + Z_2 + Z_3) \cdot R_0 + Z_3 (Z_1 + Z_2)} = 1$$

Θέτοντας  $Z_i = jX_i$  προκύπτει

$$\frac{-A_0 X_2 X_3}{jR_0 (X_1 + X_2 + X_3) - X_3 (X_1 + X_2)} = 1$$

$$jR_0 (X_1 + X_2 + X_3) - X_3 (X_1 + X_2) = -A_0 X_2 X_3 \quad (7.33)$$

Από την 7.33 εξισώνοντας πραγματικά με πραγματικά και φανταστικά με φανταστικά, προκύπτουν δύο εξισώσεις

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 = -X_3 \quad (7.34)$$

$$-X_3 (X_1 + X_2) = -A_0 X_2 X_3 \Rightarrow X_1 + X_2 = A_0 X_2 \quad (7.35)$$

Δεδομένου ότι το  $A_0$  είναι αρνητικό, από τις 7.34 και 7.35 οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι

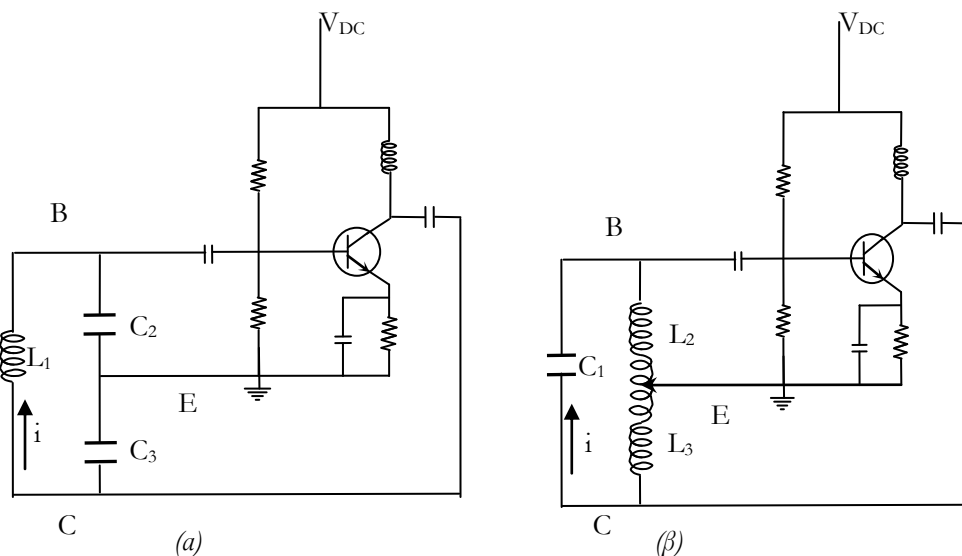
Τα  $X_2$  και  $X_3$  έχουν το ίδιο πρόσημο αφού  $-X_3 = A_0 X_2$

Το  $X_1$  έχει αντίθετο πρόσημο αφού  $X_1 = -X_2 - X_3$

Αυτό σημαίνει ότι αν τα  $Z_2$  και  $Z_3$  είναι πυκνωτές με αρνητικό  $X$  τότε το  $Z_1$  είναι πηνίο με θετικό  $X$ . Έτσι, υλοποιούμε το κύκλωμα του σχήματος 7.9(α), τον ταλαντωτή Colpits.

Ομοίως, αν τα  $Z_2$  και  $Z_3$  είναι πηνία με θετικό  $X$  τότε το  $Z_1$  είναι πυκνωτής με αρνητικό  $X$ . Έτσι, υλοποιούμε το κύκλωμα του σχήματος 7.9(β), τον ταλαντωτή Hartley.

Έχουμε ανάδραση τάσης από το κύκλωμα συλλέκτη προς το κύκλωμα βάσης με διαφορά φάσης 180° (άρνητικό κέρδος). Οι ταλαντώσεις διατηρούνται λόγω της διαφοράς φάσης που είναι 180°. Το  $L_2$  είναι πολύ μικρό αφού είναι κομμάτι του  $L_2 + L_3$ . Άρα το ρεύμα  $i$  προπορεύεται της τάσης  $V_{CE}$  κατά 90° (είναι χωρητικό). Αν η ωμική αντίσταση του  $L_2$  είναι μηδενική τότε η τάση  $V_{be}$  θα προπορεύεται του ρεύματος. Άρα η διαφορά φάσης  $V_{be}$  και  $V_{ce}$  είναι περίπου 180°. Η αντίσταση συλλέκτη (κύκλωμα CE) είναι ένα ταλαντευόμενο κύκλωμα το οποίο παρουσιάζει ωμική αντίσταση στη συχνότητα συντονισμού του. Στη συχνότητα αυτή υπάρχει διαφορά φάσης 180° μεταξύ της τάσης βάσης και συλλέκτη και είναι η ίδια διαφορά με την οποία φτάνει το σήμα ανάδρασης στη βάση. Έτσι συντηρούνται οι ταλαντώσεις.



Σχήμα 7.11. Ταλαντωτής (α) Colpitts (β) Hartley με τρανζίστορ

Η συχνότητα ταλάντωσης των ταλαντωτών του σχήματος 7.11 είναι

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{ολ}C_{ολ}}} \quad (7.27)$$

όπου  $L_{ολ} = L_1$ ,  $\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$  για τον ταλαντωτή Colpitts και

$L_{ολ} = L_2 + L_3$ ,  $C_{ολ} = C_1$  για τον ταλαντωτή Hartley.

### 7.6.4. Άλλοι Ταλαντωτές

#### Ταλαντωτής Ολισθησης Φάσης

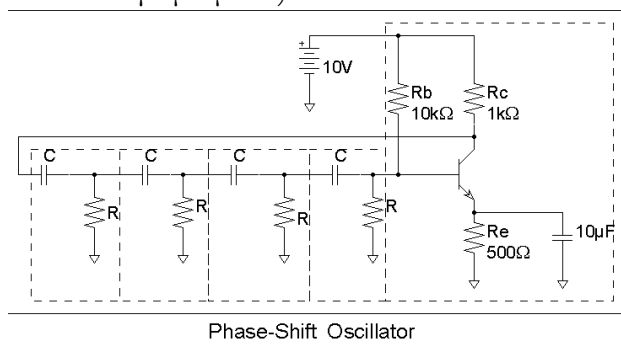
Η τάση εξόδου αυτού του δικτύματος έχει στραφεί ως προς την τάση εισόδου κατά γωνία τοξεφ(1/ωRC). Η γωνία αυτή είναι

0° αν  $R \rightarrow \infty$

90° αν  $R \rightarrow 0$

Ένα από τα κυκλώματα RC που χρησιμοποιούνται στην είσοδο του BJT δηλαδή στη βάση είναι μια αντίσταση και ένας πυκνωτής.

Στο κύκλωμα του σχήματος 7.12 συνδέονται 4 τέτοιες βαθμίδες σε σειρά στις οποίες η τάση εξόδου της μίας είναι τάση εισόδου της επόμενης. Έτσι, μπορούμε να πετύχουμε διαφορά φάσης 180° από το κύκλωμα του συλλέκτη στο κύκλωμα της βάσης. Η συχνότητα αυτού του ταλαντωτή εξαρτάται από της τιμές των R και C. Η τελευταία αντίσταση στη βάση έχει τιμή  $R' = R // R_b // h_{ie}$ . Αποδεικνύεται ότι η συχνότητα ταλαντώσεων (για ταλαντωτή 3 βαθμίδων) είναι:



Σχήμα 7.12. Ταλαντωτής Ολισθητής Φάσης

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \frac{1}{\sqrt{6 + 4 \frac{R_C}{R'}}$$

Για να υπάρξουν ταλαντώσεις πρέπει το τρανζίστορ να έχει κέρδος τουλάχιστον  $h_{fe} > 45$ . Ο ταλαντωτής αυτός χρησιμοποιείται για χαμηλές συχνότητες.

### Ταλαντωτής Meisner

Η ανάδραση γίνεται με μαγνητική σύζευξη

### Ταλαντωτής Κρυστάλλου

Τοποθετώντας πλακίδιο κρυστάλλου χαλαζία ( $SiO_2$ ) ως διηλεκτρικό ανάμεσα στις πλάκες ενός πυκνωτή, τότε

αυτός μετατρέπεται σε ταλαντωτή. Το φαινόμενο οφείλεται στις πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες του υλικού το οποίο μετατρέπει τη μηχανική πίεση σε ηλεκτρική και αντίστροφα. Το ισοδύναμο κύκλωμα είναι ο παράλληλος συνδυασμός ενός C με το συνδυασμό R, L, C σε σειρά.

### Ταλαντωτής διόδου tunnel

Η στατική χαρακτηριστική της διόδου tunnel έχει μια περιοχή αρνητικής αντίστασης (αυξανόμενης της τάσης το

ρεύμα μειώνεται). Η παράλληλη σύνδεση της διόδου με ένα συντονισμένο κύκλωμα ή με έναν κρύσταλλο δίνει ταλαντωτή με συνεχή ταλάντωση. (Οι απώλειες αναπληρώνονται από τη διόδο). Παράγονται ταλαντώσεις υψηλών συχνοτήτων.

## Παραμόρφωση, Θόρυβος και Παρεμβολές

**Π**αραμόρφωση είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η έξοδος διαφέρει από την έξοδο που θα περιμέναμε αν το κύκλωμα ήταν ιδανικό.

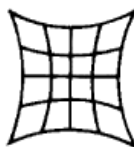
Πριν ξεκινήσουμε να αναλύουμε την έννοια της παραμόρφωσης (**distortion**) στην ηλεκτρονική και ειδικότερα στους ενισχυτές, δίνουμε τους ακόλουθους τέσσερις ορισμούς για διαφορετικά πεδία μελέτης:

**Electronics:** Οποιαδήποτε μη επιθυμητή αλλαγή στην κυματομορφή ενός σήματος το οποίο περνάει μέσα από ένα κύκλωμα ή άλλο μέσο μεταφοράς.

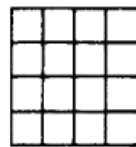
**Engineering:** Ο βαθμός αποτυχίας ενός συστήματος να αναπαράγει με ακρίβεια τα χαρακτηριστικά του σήματος εισόδου, στην έξοδο.

**Engineering acoustics:** Οποιαδήποτε μη επιθυμητή αλλαγή στην κυματομορφή ενός κύματος ήχου.

**Optics:** Ένας τύπος απόκλισης όπου υπάρχει διακύμανση στη μεγέθυνση διαφορετικών σημείων (συναρτήσει της απόστασης από τον άξονα ενός οπτικού συστήματος), έτσι ώστε οι εικόνες να μην είναι γεωμετρικά ίδιες με τα αντικείμενά τους.



Pincushion distortion



Barrel distortion

### 8.1. Παραμόρφωση στους Ενισχυτές

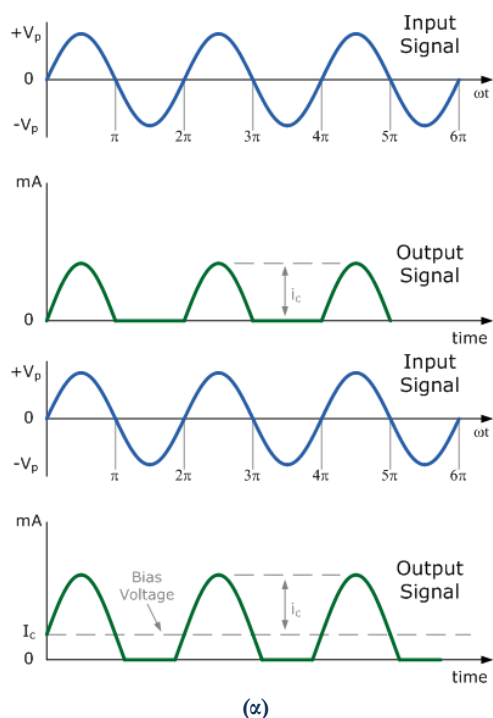
**Η** εφαρμογή ενός ημιτονοειδούς σήματος στην είσοδο ενός ιδανικού ενισχυτή τάξης Α θα έχει ως αποτέλεσμα ένα ενισχυμένο ημιτονοειδές σήμα εξόδου.

Γενικά όμως, η κυματομορφή εξόδου δεν είναι ακριβής αναπαράσταση της κυματομορφής του σήματος εισόδου, επειδή μπορεί να εμφανιστούν παραμορφώσεις

πολλών τύπων, είτε λόγω της μη γραμμικότητας στα χαρακτηριστικά των BJT ή FET είτε λόγω της επίδρασης του υπόλοιπου κυκλώματος.

Τάξη	A	B	C	AB
Κύκλος Λειτουργίας	360°	180°	Κάτω από 90°	180° με 360°
Θέση σημείου Q	Στη μέση της γραμμής φορτίου	Πάνω στον άξονα x	Κάτω από τον άξονα x	Ανάμεσα στον άξονα x και στο μέσο της γραμμής φορτίου
Συνολική Αποδοτικότητα	Φτωχή, 25 έως 30%	Καλύτερη, 70 έως 80%	Υψηλότερη από 80%	Καλύτερη από της τάξης A αλλά μικρότερη από της τάξης B 50 έως 70%
Παραμόρφωση σήματος	Καμία αν πολωθεί σωστά	Πάνω στον άξονα x (Crossover Point)	Μεγάλη	Μικρή

Πίνακας 8.1. Συγκριτικός πίνακας διαφορετικών τάξεων ενισχυτών



Σχήμα 8.1. Παραμόρφωση που προκαλεί ένας ενισχυτής (α) τάξης B και (β) τάξης AB



## 8.2. Είδη Παραμορφώσεων

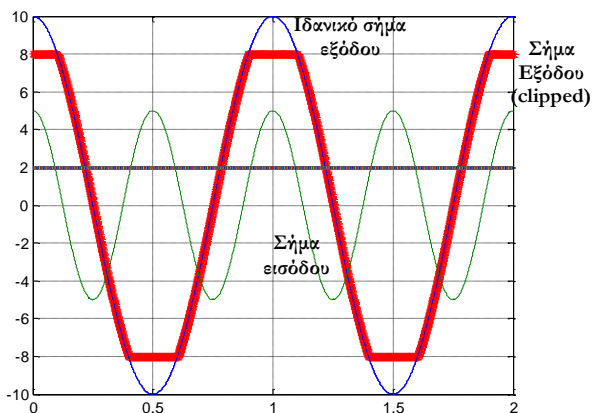
### 8.2.1. Παραμόρφωση Πλάτους

Αν η επιλογή του σημείου πόλωσης  $Q$  είναι σωστή, τότε η κυματομορφή εξόδου θα είναι ίδια με την κυματομορφή εισόδου, απλά θα είναι ενισχυμένη. Γενικά όμως, το πλάτος εξόδου δεν είναι γραμμική συνάρτηση του πλάτους εισόδου. Αυτό το φαινόμενο οφείλεται σε

#### (α) Σφάλμα στην πόλωση

Αν το επίπεδο πόλωσης είναι ανεπαρκές, τότε στην κυματομορφή εξόδου το αρνητικό μέρος θα «κοπεί» - cut-off. Όταν το δυναμικό πόλωσης είναι πάρα πολύ μικρό, τότε κατά την αρνητική ημιπερίοδο το τρανζίστορ δεν θα άγει πλήρως και επομένως η έξοδος θα τεθεί από το δυναμικό τροφοδοσίας.

Αν το επίπεδο πόλωσης είναι υψηλό, τότε θα «κοπεί» το θετικό κομμάτι της κυματομορφής εξόδου. Όταν το δυναμικό πόλωσης είναι πάρα πολύ μεγάλο, τότε η θετική ημιπερίοδος της κυματομορφής φέρνει το τρανζίστορ στον κορεσμό και η έξοδος πέφτει σχεδόν στο μηδέν.



Σχήμα 8.2. Παραμόρφωση πλάτους (clipping) λόγω overdriving.

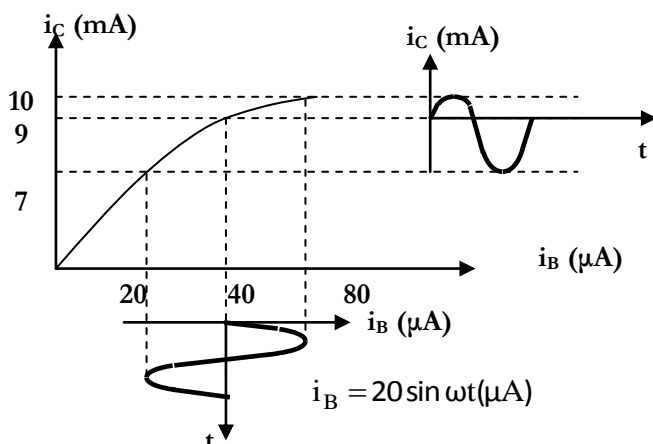
#### (β) Μεγάλο σήμα στην είσοδο του ενισχυτή.

Ακόμη και με το σωστό σημείο πόλωσης, η έξοδος μπορεί να παραμορφωθεί λόγω του ότι απαιτείται η ενίσχυση **πολύ μεγάλου σήματος εισόδου (overdriving)**. Το σήμα εξόδου “κουτσουρεύεται” (clipped) και κατά τη θετική και κατά την αρνητική ημιπερίοδο και δεν μοιάζει πλέον με ημιτονική κυματομορφή. Αυτού του τύπου η παραμόρφωση πλάτους ονομάζεται **Clipping** και είναι το αποτέλεσμα της «υπερ-οδήγησης» - «over-driving» της εισόδου του ενισχυτή.

Τα περισσότερα είδη παραμορφώσεων οφείλονται στα μη γραμμικά συστήματα, τα οποία μελετώνται στην παράγραφο 8.4. Η παραμόρφωση πλάτους οφείλεται στη μη

γραμμική σχέση μεταξύ σήματος εισόδου και σήματος εξόδου. Γι' αυτό την καλούμε και παραμόρφωση μη-γραμμικότητας.

Η παραμόρφωση μη-γραμμικότητας είναι αποτέλεσμα της παραγωγής νέων συχνοτήτων στην έξοδο  $V_o(t)$ , οι οποίες δεν υπάρχουν στο σήμα εισόδου  $V_i(t)$ . Οι νέες αυτές συχνότητες ή αρμονικές είναι αποτέλεσμα ύπαρξης μιας μη γραμμικής δυναμικής καμπύλης για το ενεργό στοιχείο. Για ένα transistor, η γραφική παράσταση του  $i_c$  συναρτήσει του  $i_B$  είναι μη γραμμική, ειδικότερα στην περιοχή κόρου.



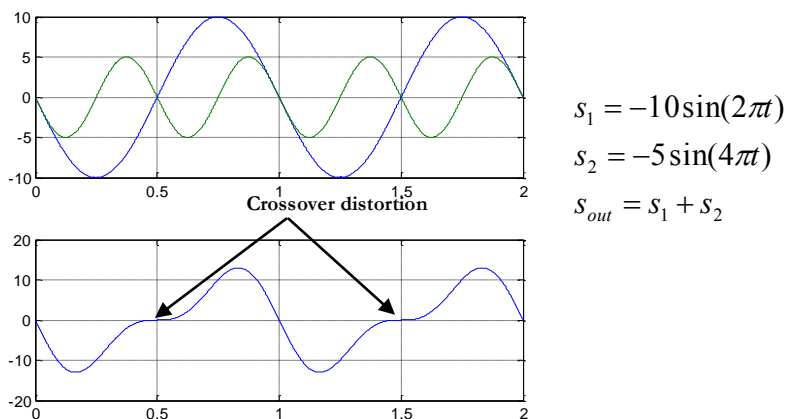
Σχήμα 8.3. Παραμόρφωση μη-γραμμικότητας ή παραμόρφωση πλάτους.

### 8.2.2. Παραμόρφωση Συχνότητας

Το επίπεδο ενίσχυσης μεταβάλλεται με τη συχνότητα. Η παραμόρφωση συχνότητας οφείλεται σε αρμονικές.

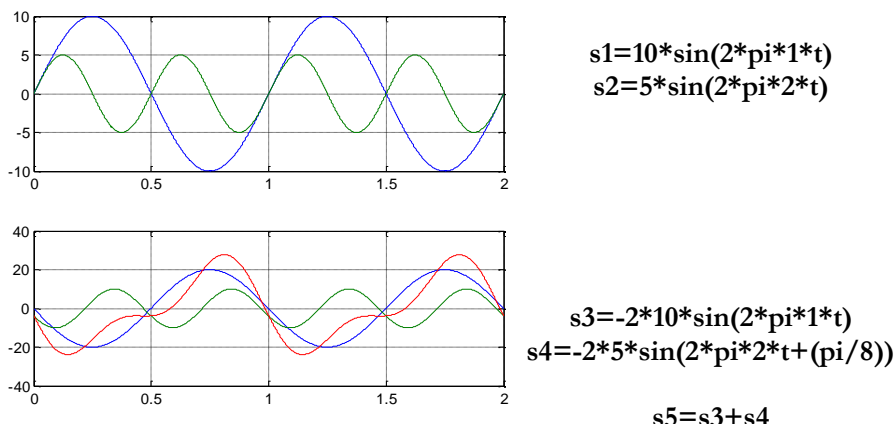
Το σήμα εισόδου συνήθως αποτελείται από τη θεμελιώδη συχνότητα και αρμονικές που προστίθενται στη θεμελιώδη. Συνήθως το πλάτος των αρμονικών είναι μικρό κλάσμα της θεμελιώδους και αυτές δεν επιδρούν στην έξοδο. Αν όμως το πλάτος είναι μεγαλύτερο της θεμελιώδους, τότε συμβαίνει παραμόρφωση.

Στο σχήμα 8.5 παρατηρούμε το σήμα εισόδου να αποτελείται από τη θεμελιώδη συχνότητα και τη δεύτερη αρμονική (η δεύτερη αρμονική είναι ένα σήμα διπλάσιας συχνότητας από τη θεμελιώδη συχνότητα του σήματος εισόδου). Η 3η αρμονική είναι ένα σήμα 3πλάσιας συχνότητας από τη θεμελιώδη, η 4η τετραπλάσιας κ.ο.κ. Η συχνότητα της αρμονικής του σχήματος είναι διπλάσια της θεμελιώδους. Σε όλα τα κυκλώματα ενισχυτών συμβαίνει παραμόρφωση συχνότητας λόγω αρμονικών, επειδή περιέχουν στοιχεία άεργου ισχύος (reactive elements) όπως χωρητικά και επαγωγικά στοιχεία.



Σχήμα 8.4: Η θεμελιώδης και η δεύτερη αρμονική δεν ενισχύθηκαν με τον ίδιο συντελεστή. Αυτό προκάλεσε παραμόρφωση πλάτους στο σήμα εξόδου.

### 8.2.3. Παραμόρφωση Φάσης



Σχήμα 8.5. Παραμόρφωση φάσης στο σήμα εξόδου.

Σε έναν μη γραμμικό ενισχυτή το σήμα εξόδου έχει χρονική καθυστέρηση σε σχέση με το σήμα εισόδου. Ας θυμηθούμε ότι σε ένα απλό RC κύκλωμα αν η συχνότητα του σήματος εισόδου είναι ίση με τη συχνότητα αποκοπής, τότε τα σήματα εισόδου και εξόδου έχουν διαφορά φάσης  $45^\circ$  ή χρονική καθυστέρηση  $T/8$ .

Αν ορίσουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ εισόδου και εξόδου μηδενική για τη θεμελιώδη συχνότητα, τότε η προκύπτουσα καθυστέρηση φάσης θα είναι η διαφορά μεταξύ της αρμονικής και της θεμελιώδους. Αυτή η χρονική καθυστέρηση εξαρτάται από την κατασκευή του ενισχυτή και θα αυξάνεται προοδευτικά με τη συχνότητα μέσα στο εύρος λειτουργίας του ενισχυτή.

Το σήμα εισόδου του σχήματος 8.6 αποτελείται από τη θεμελιώδη συχνότητα 1 Hz, πλάτους 10 Volt και τη δεύτερη αρμονική 2 Hz πλάτους 5 Volt. Στην έξοδο του ενισχυτή, η είσοδος αναστρέφεται και ενισχύεται επί 2. Θεωρούμε ότι για τη θεμελιώδη δεν έχουμε καθυστέρηση φάσης, ενώ η δεύτερη αρμονική έχει καθυστέρηση 22.5°.

**Παράδειγμα 8.1:** Έστω ενισχυτής του οποίου η απόκριση συχνότητας παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα. Να βρεθεί το σήμα εξόδου αν το σήμα εισόδου είναι

A)  $V_i(t) = 10\sin 10^3 t + 10\sin 10^7 t$     B)  $V_i(t) = 10\sin 10^5 t + 10\sin 10^6 t$

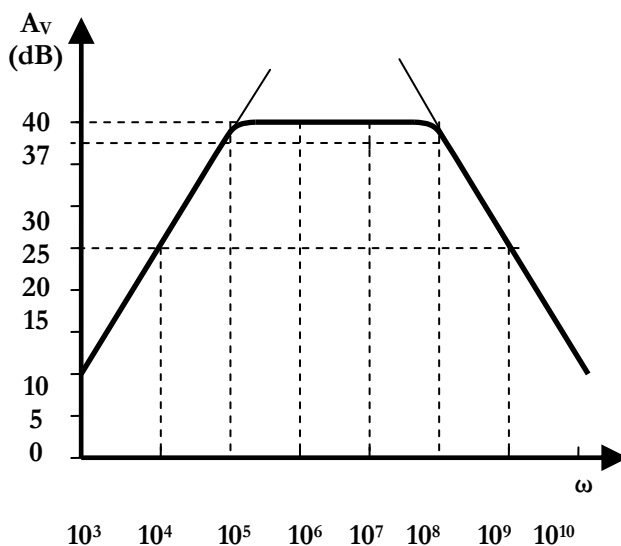
**Απάντηση:** Παρατηρούμε ότι η παραμόρφωση φάσης εμφανίζεται ταυτόχρονα με την παραμόρφωση συχνότητας. Το συμπέρασμα είναι ότι ένας ενισχυτής προκαλεί διαφορετική ενίσχυση και διαφορετικές χρονικές καθυστερήσεις σε σήματα διαφορετικών συχνοτήτων.

A)

$$V_o(t) = 10\sqrt{10} \sin(10^3 t + \varphi) + 1000\sin 10^7 t$$

B)

$$V_o(t) = 10 \cdot 10^{1.85} \sin\left(10^5 t - \frac{\pi}{4}\right) + 1000\sin 10^6 t$$



#### 8.2.4. Παραμόρφωση Ενδοδιαμόρφωσης

**Η** παραμόρφωση Ενδοδιαμόρφωσης (Intermodulate Distortion) προκαλείται από τη σύγχρονη εισαγωγή δύο ή περισσότερων ημιτονοειδών σημάτων, τα οποία στην έξοδο του μη γραμμικού ενισχυτή εμφανίζονται με αρμονικές. Η συμβολή των αρμονικών προκαλεί νέες συχνότητες διαφοράς ή αθροίσματος και αυτές οι νέες συχνότητες αποτελούν την παραμόρφωση ενδοδιαμόρφωσης.

### 8.3. Ορισμοί Παραμορφώσεων

Οι ενισχυτές πρέπει να είναι γραμμικοί (για την ακρίβεια, να λειτουργούν στη γραμμική περιοχή). Αυτό σημαίνει ότι η έξοδος πρέπει να είναι ανάλογη της εισόδου. Μόνο ελάχιστα κυκλώματα ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη.

Ο **Θόρυβος (Noise)** και ο **Βόμβος (Hum)** δεν μπορούν να θεωρηθούν είδη παραμορφώσεων. Βόμβος μπορεί να εμφανιστεί αν το DC σήμα τροφοδοσίας περιέχει και AC σήμα ή λόγω αποτυχίας κοινής γείωσης. Εξάλλου τυχαίες κινήσεις ηλεκτρονίων τα οποία θερμαίνονται, μπορεί να ενισχυθούν και αυτό εμφανίζει θόρυβο στην έξοδο.

**Παραμόρφωση Μη-Γραμμικότητας:** Τα περισσότερα transistor δεν είναι γραμμικά. Διπλασιάζοντας την είσοδο, δεν διπλασιάζεται η έξοδος. Το φαινόμενο βελτιώνεται με χρήση αρνητικής ανάδρασης.

**Limiting:** Συμβαίνει όταν το σήμα εξόδου πρέπει (λόγω ενίσχυσης) να υπερβεί την τάση τροφοδοσίας. Η παραμόρφωση αυτή εμφανίζεται σε μεγάλα σήματα.

**Crossover Distortion:** Συμβαίνει όταν το σήμα εξόδου διασχίζει (cross) το επίπεδο μηδενικής τάσης. Εμφανίζεται σε μικρά σήματα.

Οι ενισχυτές τάξης A δεν έχουν Crossover Distortion, γιατί πολώνονται στο κέντρο της γραμμής φορτίου. Οι ενισχυτές τάξης B έχουν μεγάλα ποσά Crossover Distortion, γιατί πολώνονται στο σημείο αποκοπής. Ενισχυτές τάξης AB έχουν μικρά ποσά Crossover Distortion αν το επίπεδο πόλωσης είναι πολύ χαμηλό.

Στο σχήμα 8.5 εμφανίζεται Crossover Distortion γύρω από τα σημεία  $t=0,5$  και  $t=1,5$ .

### 8.4. Μη Γραμμικά Συστήματα

Όπως προαναφέραμε, τα περισσότερα είδη παραμορφώσεων οφείλονται στις μη-γραμμικότητες των συστημάτων. Έστω ένα **μη γραμμικό σύστημα** νόμου τετραγώνου (square law device), όπως αυτό του σχήματος 8.7.

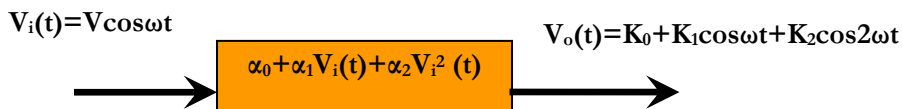
Με είσοδο το σήμα  $V_i(t) = V \cos(\omega t)$ , το σήμα εξόδου θα είναι

$$V_o(t) = a_0 + a_1 V_i(t) + a_2 V_i^2(t) = a_0 + a_1 V \cos(\omega t) + a_2 V^2 \cos^2(\omega t) \Rightarrow$$

$$V_o(t) = a_0 + a_1 V \cos(\omega t) + a_2 V^2 \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \Rightarrow$$

$$V_o(t) = \left( a_0 + \frac{a_2 V^2}{2} \right) + (a_1 V) \cos \omega t + \left( \frac{a_2 V^2}{2} \right) \cos 2\omega t \Rightarrow$$

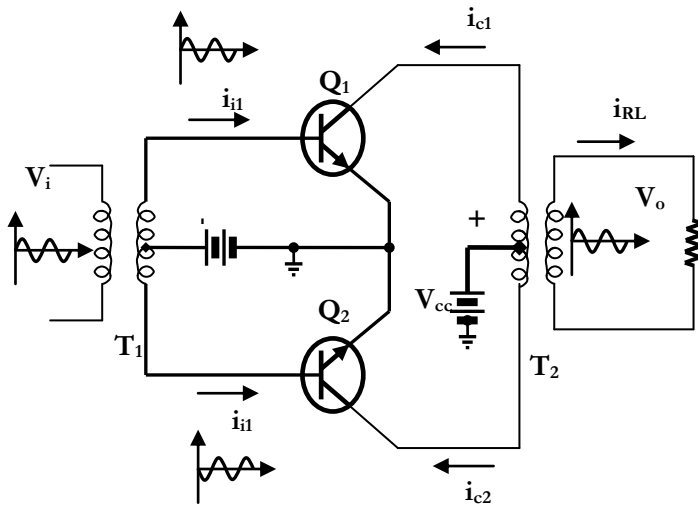
$$V_o(t) = K_0 + K_1 \cos \omega t + K_2 \cos 2\omega t$$



Σχήμα 8.7. Μη γραμμικό σύστημα

Όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 8.8, το σήμα εξόδου  $V_0(t)$  δεν είναι ημίτονο αλλά ένα σήμα, το οποίο μπορεί να αναλυθεί σε ημίτονα  $V_1(t)$  και  $V_2(t)$  αν προσθέσουμε και μία DC συνιστώσα  $V_3=K_0$ . Άρα, στο σήμα εξόδου υπάρχουν αρμονικές συχνότητες, δηλαδή πέραν του ενισχυμένου σήματος  $V_1(t)$  υπάρχει και η δεύτερη αρμονική με πλάτος  $K_2$ . Επομένως, την παραμόρφωση μη-γραμμικότητας μπορούμε να την καλούμε και **αρμονική παραμόρφωση**.

### 8.5. Ο ενισχυτής Push-Pull



Σχήμα 8.9. Ο ενισχυτής Push-Pull

**Θ**α αποδείξουμε ότι ο ενισχυτής Push-Pull διορθώνει την αρμονική παραμόρφωση. Το κύκλωμα αυτό παρουσιάζεται στο σχήμα 8.9.

Ο μετασχηματιστής  $T_2$  χρησιμοποιείται για την απόδοση της ισχύος της ακουστικής συχνότητας στην έξοδο. Ο μετασχηματιστής  $T_1$  έχει δευτερεύον με κεντρική λήψη. Τα δύο ρεύματα εισόδου των transistor  $Q_1$  και  $Q_2$  έχουν διαφορά φάσης  $180^\circ$  μεταξύ τους. Λόγω της αρμονικής παραμόρφωσης τα ρεύματα στους συλλέκτες μπορούν να περιγραφούν από το νόμο τετραγώνου.

Τα ρεύματα εισόδου των τρανζίστορ είναι:

$$i_{i1} = I_m \sin \omega t$$

$$i_{i2} = -I_m \sin \omega t$$

Τα ρεύματα εξόδου των τρανζίστορ τα οποία είναι μη γραμμικά στοιχεία, είναι:

$$\left. \begin{aligned} i_{C1} &= I_0 + A_1 i_{i1} + A_1 i_{i1}^2 + \dots \\ i_{C2} &= I_0 + A_1 i_{i2} + A_1 i_{i2}^2 + \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} i_{C1} &= I_0 + A_1 I_m \sin \omega t + A_1 I_m^2 \sin^2 \omega t + \dots \\ i_{C2} &= I_0 - A_1 I_m \sin \omega t + A_1 I_m^2 \sin^2 \omega t - \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} i_{C1} &= I_0 + A I_m \sin \omega t + A_1 I_m^2 \sin^2 \omega t + \dots \\ i_{C2} &= I_0 - A I_m \sin \omega t + A_1 I_m^2 \sin^2 \omega t - \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} i_{C1} &= K_0 + K \sin \omega t + K_1 \sin 2\omega t + \dots \\ i_{C2} &= K_0 - K \sin \omega t + K_1 \sin 2\omega t - \dots \end{aligned}$$

Όμως,

$$i_{RL} = i_{C1} - i_{C2} = 2K \sin \omega t + \dots$$

Παρατηρούμε ότι στο ρεύμα εξόδου του ενισχυτή Push-Pull δεν περιλαμβάνονται ούτε η συνεχής συνιστώσα, ούτε οι άρτιες αρμονικές. Απαλείφεται ένα μεγάλο μέρος της παραμόρφωσης.

## 8.6. Μέτρηση Ολικής Αρμονικής Παραμόρφωσης (THD)

**Η** ολική αρμονική παραμόρφωση (**T**otal **H**armonic **D**istortion) ενός σήματος είναι η μέτρηση της παρουσίας της αρμονικής παραμόρφωσης και ορίζεται ως ο λόγος του αθροίσματος των ισχύων όλων των αρμονικών προς την ισχύ της θεμελιώδους συχνότητας. Ένας ακουστικός ενισχυτής με ολική αρμονική παραμόρφωση της τάξης του 1% θεωρείται υψηλής πιστότητας και η παραμόρφωση δεν αναγνωρίζεται από το ανθρώπινο αυτί.

$$\text{THD} = \frac{P_2 + P_3 + P_4 + \dots}{P_1} = \frac{\sum_{i=2}^{\infty} P_i}{P_1} = \frac{P_{\text{ολική}} - P_1}{P_1} \quad (8.1)$$

$$\text{THD} = \frac{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + \dots + V_{\infty}^2}{V_1^2} \quad (8.2)$$

Γενικά όμως, το ποσοστό της αρμονικής  $D_n$  είναι ο λόγος του πλάτους (τάσης) της αρμονικής  $n$  προς το πλάτος της θεμελιώδους ημιτονοειδούς. Ο συντελεστής Ολικής Αρμονικής Παραμόρφωσης (THD) συνήθως ορίζεται ως **λόγος τάσεων** και όχι ως λόγος ισχύων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον ακόλουθο ορισμό, ο οποίος προκύπτει από τον προηγούμενο ως υπόρριξη ποσότητα:

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + \dots + V_{\infty}^2}}{V_1} \quad (8.3)$$

όπου  $V_1$  είναι το πλάτος τάσης της θεμελιώδους συχνότητας στο σήμα εξόδου και

$V_i$  είναι το πλάτος τάσης της αρμονικής  $i$  στο σήμα εξόδου.

Είναι προφανές ότι

$$\text{THD} = D_{\text{ολ}} = \sqrt{D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + \dots} \quad (8.4)$$

όπου

$D_2$  είναι το ποσοστό της δεύτερης αρμονικής,  $D_3$  είναι το ποσοστό της 3<sup>ης</sup> αρμονικής κ.ο.κ. Αυτά τα επιμέρους ποσοστά δίνονται από την ακόλουθη σχέση

$$D_i = \frac{V_i}{V_1} \quad (8.5)$$

όπου  $i=2, 3, 4, \dots$

**Παράδειγμα 8.2:** Γεννήτρια ημιτονικού παλμού 400 Hz τίθεται στην είσοδο ενισχυτή, ο οποίος δίνει στην έξοδο ημιτονικό σήμα 4 V RMS σε φορτίο 8 Ω. Μετρήθηκε δεύτερη αρμονική στα 0,3 V RMS και τρίτη αρμονική στα 0,5 V RMS. Οι άλλες αρμονικές αγνοούνται. Να βο਀θει το THD.

**Παράδειγμα:** Η ισχύς που αποδίδεται στο φορτίο είναι  $P=E^2/R=2\text{Watt}$ . Για να βρούμε την ολική παραμόρφωση, πρέπει να προσθέσουμε όλες τις ισχύς και να κάνουμε μετατροπή στο αντίστοιχο δυναμικό. Το αποτέλεσμα θα διαιρεθεί με το δυναμικό της θεμελιώδους.

Harmonic	Voltage (Volt)	Power (Watt)
Fundamental	4	2
2nd	0,3	0,01125
3rd	0,5	0,03125
Total		0,0425

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{0,0425 \cdot 8}}{4} = 14,6\%$$

Θα ήταν λάθος οι ακόλουθες προσεγγίσεις:

$$\text{THD} = \frac{0,3+0,5}{4} = 20\% \quad \text{ή} \quad \text{THD} = \frac{0,01125+0,03125}{2} = 2,125\%.$$

Σημειώνουμε ότι η τελευταία δίνει πολύ μικρό ποσοστό σε σχέση με το πραγματικό και είναι το ποσοστό της σχέσης 8.1.

## 8.7. Θόρυβος

Ο όρος θόρυβος (noise) περιγράφει τα ανεπιθύνητα ηλεκτρικά σήματα τα οποία παρουσιάζονται πάντα αναπόφευκτα στα ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά συστήματα. Θόρυβος Ο θόρυβος που «επικαλύπτεται» στο σήμα τείνει να «αλλάξει» το σήμα και να περιορίζει την ικανότητα ανίχνευση του δέκτη, αλλά το κυρίως πρόβλημα είναι ότι τα χρήσιμα μηνύματα που φθάνουν στο δέκτη πρέπει να «αγωνίζονται» να έχουν υψηλότερο επίπεδο ισχύος από το επίπεδο ισχύος του θορύβου. Οι πηγές θορύβου είναι πολλές. Μπορούμε να τις κατηγοριοποιήσουμε σε ανθρωπογενείς και φυσικές. Για παράδειγμα, ανθρωπογενείς πηγές θορύβου είναι οι σπινθήρες ανάφλεξης, οι μεταγωγικοί διακόπτες και τα ηλεκτρομαγνητικά σήματα γενικά. Ο φυσικός θόρυβος περιλαμβάνει το θόρυβο από τα ηλεκτρονικά στοιχεία και κυκλώματα, τις διαταραχές της ατμόσφαιρας, και το γαλαξιακό θόρυβο.

Παρόλο που μια καλή σχεδίαση ηλεκτρονικών συστημάτων, μπορεί να ελαχιστοποιήσει την επίδραση του θορύβου (με την κατάλληλη χρήση φίλτρων, σωστή επιλογή της θέσης του δέκτη, σχεδίαση κεραίας, κατάλληλη θωράκιση καλωδίων και συστημάτων, σωστή γείωση, κ.α.), υπάρχει ένας τύπος φυσικού θορύβου που καλείται θόρυβος Johnson ή θερμικός θόρυβος, ο οποίος δεν μπορεί να περιοριστεί με τις προηγούμενες μεθόδους. Θερμικός θόρυβος ή θόρυβος Johnson καλείται ο παραγόμενος από τις τυχαίες διακυμάνσεις λόγω της θερμικής διέγερσης των ηλεκτρονίων. Ο εν λόγω θόρυβος είναι λευκός αφού η κατανομή του δίνει τον ίδιο θόρυβο ανά μονάδα εύρους ζώνης



οπουδήποτε στο φάσμα. Ο θερμικός θόρυβος υπάρχει σε όλα τα ηλεκτρονικά κυκλώματα, στα καλώδια, κ.α. Η ονομασία «λευκός θόρυβος» χρησιμοποιείται σε αναλογία με το λευκό φως το οποίο περιέχει εξίσου όλες τις συχνότητες της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας του ορατού φάσματος. Παρόλο που δεν υπάρχει θόρυβος 100% λευκός, η θεωρία του είναι χρήσιμη στην πράξη. Ο θερμικός θόρυβος προέρχεται όπως αναφέραμε από την τυχαία κίνηση των ηλεκτρονίων στους αγωγούς. Η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι σχεδόν σταθερή μέχρι τη συχνότητα των  $10^{12}$  Hz (δηλαδή, για κάθε συχνότητα, η ισχύς θορύβου είναι περίπου σταθερή) Υποθέτουμε ότι η ισχύς θορύβου σε ένα σύστημα με εύρος ζώνης B [Hz], είναι:

$$N = kT^{\circ}B, \text{ watts}$$

όπου k είναι η σταθερά Boltzman  $k=1.38 \times 10^{-23}$  w/K.Hz = -228.6 dB

Οι κύριες πηγές θορύβου στα τρανζίστορ είναι ο θερμικός θόρυβος του αγωγού, ο θόρυβος βολής ο οποίος προκαλείται από το ρεύμα διαρροής της πύλης και ο θόρυβος μεταβολής κατά 1/f, ο οποίος προκαλείται από τα επιφανειακά φαινόμενα.

Ο θόρυβος βολής ή Schottky αποδίδεται στη διακύμανση του αριθμού των φορέων στους ημιαγωγούς. Ο θόρυβος τυχαίων αυξομειώσεων οφείλεται στη διέλευση του ρεύματος μεταξύ υποδοχής και πηγής (flicker noise) και μεταβάλλεται περίπου κατά 1/f για τις χαμηλές συχνότητες. Προκαλείται από την επανασύνδεση και παραγωγή των φορέων στην επιφάνεια του κρυστάλλου.

Σε έναν ενισχυτή, ακόμη κι όταν δεν υπάρχει σήμα εισόδου, μπορεί να μετρηθεί ένα μικρό σήμα στην έξοδο. Αυτή η μικρή ισχύς εξόδου αναφέρεται ως ισχύς θορύβου του ενισχυτή. Η συνολική ισχύς εξόδου συνιστάται από την ενισχυμένη ισχύ θορύβου της εισόδου και από την ισχύ θορύβου της εξόδου που παράγεται από τον ενισχυτή.

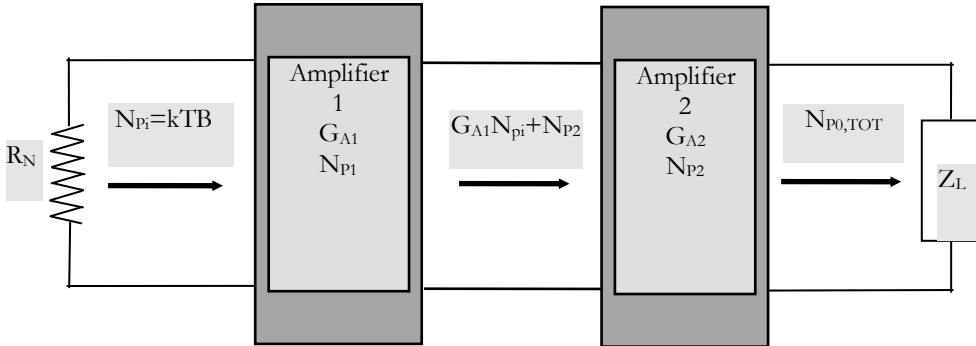
## 8.8. Συντελεστής θορύβου

Ο συντελεστής θορύβου (noise figure NF) έχει οριστεί προκειμένου να είναι δυνατός ο ποσοτικός προσδιορισμός του πόσο θορυβώδες είναι ένα στοιχείο. Εξ ορισμού ο NF είναι ο λόγος της ισχύος του θορύβου στην είσοδο του κυκλώματος που εξετάζεται, προς την ισχύ του θορύβου ο οποίος λαμβάνεται στην έξοδο εάν η μόνη πηγή θορύβου ήταν ο θερμικός θόρυβος στην εσωτερική αντίσταση  $R_S$  της πηγής σήματος. Έτσι, ο συντελεστής θορύβου είναι μια ποσότητα η οποία συγκρίνει το θόρυβο σ' έναν πραγματικό ενισχυτή με αυτόν σ' έναν ιδανικό ενισχυτή (χωρίς θόρυβο). Από τον ορισμό προκύπτει

$$NF = 10 \log \frac{S_{Pi}/N_{Pi}}{S_{Po}/N_{Po}} = 20 \log \frac{S_{Vi}/N_{Vi}}{S_{Vo}/N_{Vo}}$$

Το πηλίκο  $S_P/N_P$  ονομάζεται λόγος (ισχύος) σήματος - προς - θόρυβο, ενώ το  $S_V/N_V$  ονομάζεται λόγος τάσης σήματος - προς - θόρυβο.

Ένα μοντέλο για τον υπολογισμό του συντελεστή θορύβου για έναν ενισχυτή δύο βαθμίδων παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.10. Όπου  $P_{Ni}$  είναι η διαθέσιμη ισχύς θορύβου εισόδου,  $G_{A1}$  και  $G_{A2}$  είναι τα διαθέσιμα κέρδη ισχύος κάθε βαθμίδας και  $P_{N1}$ ,  $P_{N2}$  παριστάνει την ισχύ θορύβου που εμφανίζεται στην έξοδο των ενισχυτών 1 και 2 αντίστοιχα, λόγω του εσωτερικού θορύβου των ενισχυτών.



Σχήμα 8.10. Μοντέλο υπολογισμού Συντελεστή Θορύβου για έναν ενισχυτή 2 βαθμίδων.

Η συνολική διαθέσιμη ισχύς θορύβου στην έξοδο είναι

$$P_{No,TOT} = G_{A2}(G_{A1}P_{Ni} + P_{n1}) + P_{n2}$$

Ο συντελεστής θορύβου για τον ενισχυτή δύο βαθμίδων είναι

$$NF = \frac{P_{No,TOT}}{P_{Ni}G_{A1}G_{A2}} = 1 + \frac{P_{n1}}{P_{Ni}G_{A1}} + \frac{P_{n2}}{P_{Ni}G_{A1}G_{A2}}$$

ή

$$NF = NF_1 + \frac{NF_2 - 1}{G_{A1}}$$

όπου

$$NF_1 = 1 + \frac{P_{n1}}{P_{Ni}G_{A1}} \quad \text{και} \quad NF_2 = 1 + \frac{P_{n2}}{P_{Ni}G_{A2}}$$

είναι οι συντελεστές θορύβου του πρώτου και του δεύτερου ενισχυτή, αντίστοιχα.

Εφόσον λοιπόν ο συντελεστής θορύβου της δεύτερης βαθμίδας αντισταθμίζεται από το  $G_{A1}$ , συμπεραίνουμε ότι η συνεισφορά θορύβου της δεύτερης βαθμίδας είναι μικρή αν το  $G_{A1}$  είναι μεγάλο, και μπορεί να είναι σημαντική, αν το  $G_{A1}$  είναι μικρό. Ελάχιστος συντελεστής θορύβου και μέγιστο κέρδος ισχύος δεν μπορούν να επιτευχθούν ταυτόχρονα.

Ο NF ενός τρανζίστορ δίνεται από τον κατασκευαστή του για διάφορες τιμές συχνότητας λειτουργίας. Ένας ενισχυτής που έχει  $NF=1,31=1,2\text{dB}$  και κέρδος  $G=100=20\text{dB}$  έχει τις κατάλληλες προδιαγραφές για να χαρακτηριστεί Ενισχυτής Χαμηλού Θορύβου (Low Noise Amplifier – LNA).

Ας υποθέσουμε ότι έχουν τρία υποσυστήματα συνδεδεμένα σε σειρά. Ο LNA πρέπει να τοποθετηθεί σαν πρώτο υποσύστημα έτσι ώστε το συνολικό σύστημα να έχει χαμηλό θόρυβο, διότι το δεύτερο και το τρίτο σύστημα συνεισφέρουν ελάχιστα στο θόρυβο. Γιαυτό κι ο LNA τοποθετείται στην πρώτη βαθμίδα ενός δέκτη.

$$NF_{total} = NF_1 + \frac{NF_2 - 1}{G_1} + \frac{NF_3 - 1}{G_1 \cdot G_2} + \dots + \frac{NF_N - 1}{G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_{N-1}}$$

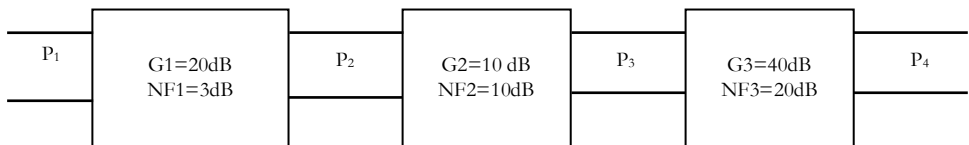
Σημειώνουμε ότι οι τιμές NF και G είναι καθαροί αριθμοί.

**Παράδειγμα 8.3:** Στο ακόλουθο σύστημα (σχήμα 8.11), που αποτελείται από τρία υποσυστήματα, να βρεθεί το συνολικό κέρδος ισχύος και ο συνολικός συντελεστής θορύβου.

$$G_{total} = G_1 + G_2 + G_3 = 20\text{dB} + 10\text{dB} + 40\text{dB} = 70\text{dB} = 10000000$$

$$G_{total} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 = 100 \cdot 10 \cdot 10000 = 10000000$$

$$NF_{total} = NF_1 + \frac{NF_2 - 1}{G_1} + \frac{NF_3 - 1}{G_1 G_2} = 2 + \frac{9}{100} + \frac{99}{1000} = 2,189 = 3,4\text{dB} \approx NF_1$$



Σχήμα 8.11. Υπολογισμός συνολικού NF σε συστήματα σε σειρά

## 8.9. RFI, EMI and EMC

**Η** παράγραφος αυτή αφορά την ικανότητα της εκπεμπόμενης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας να προκαλέσει παρεμβολές σε ηλεκτρικές και ηλεκτρονικές συσκευές. Ως παράδειγμα αναφέρουμε το θόρυβο που παράγεται

σε ένα ραδιόφωνο ΑΜ λόγω των κοντινών ηλεκτρικών εκκινήσεων (κεραυνοί), ή στις γραμμές του ηλεκτρικού δικτύου που βρίσκονται υπό τάση. Κάποιες από τις συχνότητες του φυσικού φαινομένου του κεραυνού, περνάνε μέσα από το φίλτρο εισόδου του δέκτη ΑΜ (ραδιοφώνου) προκαλώντας σήμα θορύβου το οποίο προστίθεται στο επιθυμητό σήμα. Επίσης αναφέρουμε ότι ακόμη κι αν το ραδιόφωνο (δέκτης) δεν είναι συντονισμένο σε ένα συγκεκριμένο σταθμό (συχνότητα), πάλι μπορεί να γίνει ακούσια λήψη σήματος. Αυτά είναι παραδείγματα παρεμβολών που παράγονται σε **εκ προθέσεως δέκτες**.

Εξίσου σημαντική είναι η ύπαρξη παρεμβολής σε **ακούσιους δέκτες**. Για παράδειγμα, ένα ισχυρό σήμα μετάδοσης από τον πομπό ενός ραντάρ μπορεί να απεικονιστεί σε μία τηλεόραση ή μια οθόνη γενικότερα, με αποτέλεσμα η οθόνη να παρουσιάσει γραμμές (της εκπομπής του ραντάρ) πάνω από τα χρήσιμα δεδομένα.

Ένα σύστημα λέμε ότι είναι **ηλεκτρομαγνητικά συμβατό** με το περιβάλλον του αν:

1. Δεν δημιουργεί παρεμβολές σε άλλα συστήματα.
2. Δεν είναι ευαίσθητο σε εκπομπές άλλων συστημάτων.
3. Δεν δημιουργεί παρεμβολές το ίδιο το σύστημα

Κατά συνέπεια, η ηλεκτρομαγνητική συμβατότητα (Electromagnetic Compatibility - EMC) είναι σημαντική όσον αφορά στην εκπομπή, μετάδοση και λήψη ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας. Μία πηγή (εκπομπός ή πομπός) παράγει την ενέργεια προς εκπομπή και ένα μέσο μεταφοράς ή σύζευξης μεταφέρει την εκπεμπόμενη ενέργεια σε ένα δέκτη στον οποίο γίνεται η επεξεργασία με αποτέλεσμα ένα επιθυμητό ή ανεπιθύμητο σήμα.

Παρεμβολή συμβαίνει όταν η λαμβανόμενη ενέργεια κάνει το δέκτη να συμπεριφέρεται με μη επιθυμητό τρόπο. Η ακούσια (άνευ προθέσεως) εκπομπή ή λήψη της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας, δεν είναι απαραίτητα επιβλαβής. Η έννοια της παρεμβολής συνίσταται στην ανεπιθύμητη συμπεριφορά του δέκτη.

Έτσι, η επεξεργασία της λαμβανόμενης ενέργειας στο δέκτη είναι η πλέον σημαντική διαδικασία στην περίπτωση που εμφανιστεί παρεμβολή. Είναι επίσης σημαντικό να κατηγοριοποιήσουμε τους δέκτες σε εκ προθέσεως ή ακούσιους ή να συμπεριφέρονται και με τους δύο τρόπους. Για παράδειγμα, έστω ένας ραδιοφωνικός πομπός ΑΜ του οποίου το σήμα λαμβάνεται από έναν δέκτη συντονισμένο στη συχνότητα εκπομπής. Αυτή είναι μία εκ προθέσεως εκπομπή. Αν το ίδιο σήμα το λάβει ένας άλλος ραδιοφωνικός δέκτης ο οποίος δεν είναι συντονισμένος στη συχνότητα του φέροντος του πομπού, τότε η εκπομπή θεωρείται ακούσια ή άνευ προθέσεως.

Από αυτό το παράδειγμα, καταλαβαίνουμε ότι υπάρχουν τρεις τρόποι πρόληψης της παρεμβολής:

- ☒ Καταστολή της εκπομπής από την πηγή.
- ☒ Να κάνουμε τη μετάδοση όσο το δυνατόν μη αποτελεσματική
- ☒ Να κάνουμε το δέκτη λιγότερο ευαίσθητο.

Συνήθως, η απευθείας αγωγήμη σύνδεση είναι περισσότερο αποτελεσματική από τον αέρα. Οι σχεδιαστές συστημάτων κατανοώντας αυτή την ιδιότητα για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τοποθετούν φίλτρα για να εμποδίσουν την μη επιθυμητή εκπομπή και λήψη τέτοιας ενέργειας.

Ένα άλλο, ολοένα αυξανόμενο πρόβλημα ευαισθησίας για τα σημερινά ολοκληρωμένα κυκλώματα μικρής κλίμακας ολοκλήρωσης (Small Scaled Integrated Circuits – SSI) είναι το πρόβλημα της ηλεκτροστατικής εκκένωσης ή εκφόρτισης (ElectroStatic Discharge -ESD). Η απευθείας μεταφορά φορτίου μπορεί να προκαλέσει μόνιμη καταστροφή ηλεκτρονικών στοιχείων σε ολοκληρωμένα κυκλώματα. Ένα ηλεκτρικό τόξο μπορεί να εμφανιστεί σε μορφή ηλεκτρομαγνητικού κύματος, μέσα στο κύκλωμα και να απορροφηθεί από αυτό δημιουργώντας προβλήματα στις ηλεκτρονικές συσκευές. Παγκοσμίως, υπάρχουν ρυθμιστικοί φορείς που στηρίζουν τους κατασκευαστές και τις προμηθευτικές εταιρείες ώστε να παρέχονται στοιχεία κατανομής συχνοτήτων για το στοιχείο ή σύστημα. Η πιστοποίηση φάσματος πλέον για τα ηλεκτρονικά συστήματα είναι αναγκαία παγκοσμίως λόγω της πολιτικής «Electromagnetic Environmental Effects» και «Spectrum Supportability» για οποιοδήποτε ηλεκτρονικό εξοπλισμό, σύστημα ή όχημα.

Ο εξοπλισμός που απαιτεί πιστοποίηση φάσματος είναι: Εξοπλισμός επικοινωνιών, Πανιάρ, Πομποί, Δέκτες, Συστήματα ηλεκτρονικού πολέμου (Electronic Warfare - EW), Προσομοιωτές, Μετρητικές συσκευές, COTS, εξοπλισμός που έχει αγοραστεί από ξένο κράτος, εξοπλισμός GPS.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι τα «φτωχής σχεδίασης» ηλεκτρονικά συστήματα σε ένα πλοίο ή τα συστήματα που χάνουν την αξιοπιστία τους με την πάροδο του χρόνου (όπως φίλτρα, θωράκιση, θερμαινόμενοι σύνδεσμοι, γειώσεις, ..), μπορεί να προκαλέσουν προβλήματα στη λειτουργία άλλων ηλεκτρονικών συστημάτων στο ίδιο το πλοίο. Κάθε ηλεκτρονική συσκευή πρέπει να έχει σχεδιαστεί προσεκτικά όσον αφορά στη συμβατότητα (να μην προκαλεί και να μην δέχεται παρεμβολές). Επίσης, η αρχική τοποθέτηση του ηλεκτρονικού εξοπλισμού πάνω σε ένα πλοίο πρέπει να γίνεται με ολιστική προσέγγιση EMC (για παράδειγμα, δύο ραντάρ ναυτιλίας είναι απολύτως EMC συμβατά αλλά επειδή τοποθετήθηκαν απρόσεκτα, πχ οι κεραιές είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη, αναπόφευκτα θα παρεμβάλλουν η το ένα στο άλλο ραντάρ).

Προκειμένου να γίνει πλήρης και διόρθωση της παρεμβολής ευρείας ζώνης, πρέπει πρώτα να την εντοπίσουμε (ένα καθόλου ασήμαντο έργο) ακολουθώντας τις ακόλουθες προδιαγραφές/εκτιμήσεις:

- ☞ Κατάλληλος εξοπλισμός με έναν ποιοτικό ερυζώνιο δέκτη που να καλύπτει το εύρος 550 kHz ως 3 GHz με ένα εξασθενητή και ένα όργανο μέτρησης του σήματος.
- ☞ Αποδοτικές ευρυζώνιες κεραιές.
- ☞ Κατανόηση ότι η διάδοση των σημάτων χαμηλής συχνότητας είναι διαφορετική από τη μετάδοση υψηλών συχνοτήτων.
- ☞ Οι διατομές τύπου “Γ” των γραμμών του δικτύου (μεταφοράς ενέργειας) και των τηλεφωνικών γραμμών λειτουργούν ως στελέχη μισού μήκους κύματος ή ενός τετάρτου μήκους κύματος (ή πολλαπλάσια αυτών ή μέρος αυτών), γιατί

θα υπάρξει αντίστοιχη συμπεριφορά θορύβου. Αυτές τις διατομές συνήθως προικαλούν υψηλά στάσιμα κύματα και ακτινοβολία ακόμη και σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή της παρεμβολής.

☞ Η κεραιά, είναι ένα ηλεκτρικό σύστημα το οποίο, από τη στιγμή που τροφοδοτείται από τον πομπό (έναν ενισχυτή ισχύος) ή το δέκτη, σαποτελείται και από το ομοαξονικό καλώδιο, τη γραμμή τροφοδοσίας και την κεραιά καθ' αυτή (aerial). Εφόσον ρεύμα και τάση υπάρχει μέσα στα καλώδια και τα υποσυστήματα, καθένα απ' α'τά μπορεί να λάβει όχι μόνο RF σήματα τα οποία εκπέμπονται από άλλους σταθμούς αλλά και τεχνητούς «θορύβους», παρεμβολές που μεταδίδονται στο δέκτη, δημιουργώντας θόρυβο στη λήψη.

Οι κύριες πηγές παρεμβολών είναι οι φυσικές εκπομπές, όπως η ακτινοβολία του ήλιου. Ένα κλασικό πείραμα για την απόδειξη της καταγωγής του RFI είναι να κάνουμε εκπομπή και λήψη τη νύχτα. Εκτός από τις φυσικές πηγές (Ηλιος και κοσμικές πηγές), οποιαδήποτε γεννήτρια ηλεκτρικής ενέργειας είναι πηγή παρεμβολής στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα και ειδικότερα στη ζώνη HF bands. Άλλες πηγές παρεμβολών (θορύβου) είναι: Τα εναέρια ψηλά δίκτυα διανομής ενέργειας, οι γραμμές διανομή ενέργειας, διαρροές από μονωτήρες, κλιματιστικά, φορτιστές μπαταρίας, υπολογιστές, και άλλες συσκευές. Όλες, δημιουργούν θόρυβο, αρμονικές.

## Διαμορφωτές και Αποδιαμορφωτές

### 9.1. Τηλεπικοινωνίες και Διαμόρφωση

Με τον γενικό όρο **τηλεπικοινωνίες**, (telecommunications) χαρακτηρίζεται η κάθε μορφής ενσύρματη ή ασύρματη, ηλεκτρομαγνητική ή ηλεκτρική, ακουστική και οπτική επικοινωνία που πραγματοποιείται ανεξαρτήτως απόστασης.

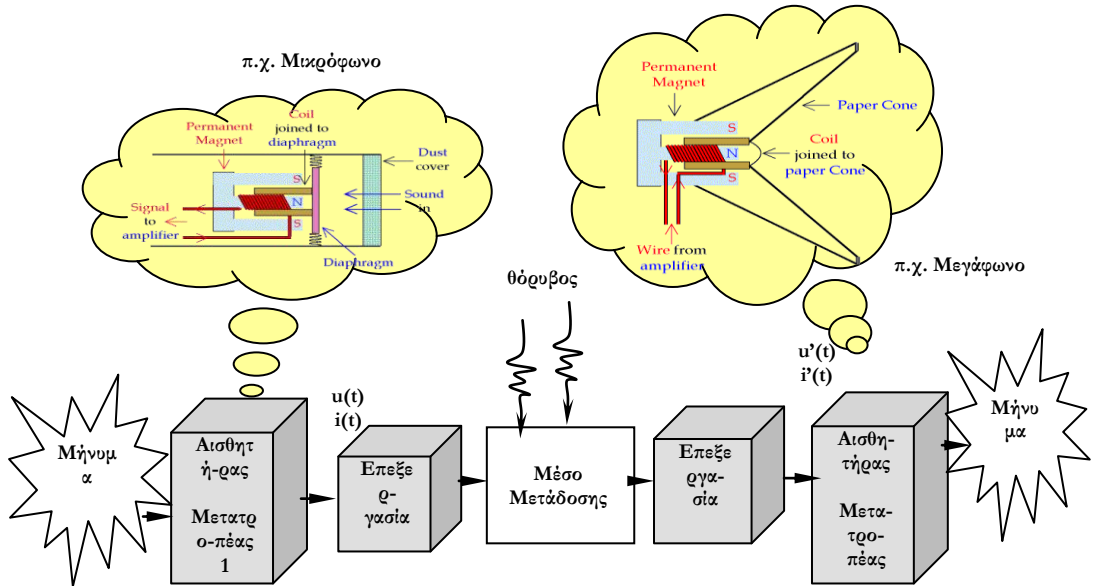
Στους σύγχρονους καιρούς αυτή η διαδικασία σχεδόν πάντα περιλαμβάνει την αποστολή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ή ηλεκτρικών σημάτων από κατάλληλες ηλεκτρονικές συσκευές, όπως το τηλέφωνο ή ο ασύρματος, αλλά παλαιότερα περιλάμβανε τη χρήση ακουστικών σημάτων, όπως τυμπάνων, ή οπτικών σημάτων, όπως ο καπνός.

Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα περιλαμβάνει τον πομπό, το μέσο μετάδοσης και το δέκτη, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 9.1.

Ο πομπός αποτελείται από έναν αισθητήρα μετατροπέα του φυσικού μηνύματος (π.χ. της φωνής) σε ηλεκτρικό σήμα. Αυτός μπορεί να είναι ένα μικρόφωνο. Στη συνέχεια γίνεται επεξεργασία του ηλεκτρικού σήματος ( $u(t)$  ή  $i(t)$ ) και αποστέλλεται, αν έχουμε ενσύρματη μετάδοση. Αν έχουμε ασύρματη μετάδοση, τότε το ηλεκτρικό σήμα πρέπει να μετατραπεί σε ηλεκτρομαγνητικό ώστε να ταξιδέψει στην ατμόσφαιρα. Η μετατροπή αυτή γίνεται με τη βοήθεια πηνίων, τα οποία αποτελούν μέρος του ηλεκτρικού κυκλώματος, και γενικότερα με τη βοήθεια κεραιών.

Στο δέκτη, λαμβάνεται το ηλεκτρομαγνητικό σήμα και με τη βοήθεια της κεραίας μετατρέπεται σε ηλεκτρικό. Ακολουθεί η επεξεργασία του ηλεκτρικού σήματος (ενίσχυση, φιλτράρισμα, ...) και τέλος, ένας δεύτερος αισθητήρας-μετατροπέας θα μετατρέψει το ηλεκτρικό σήμα  $u'(t)$  ή  $i'(t)$  σε φυσικό μήνυμα. Ένας τέτοιος μετατροπέας είναι τα ακουστικά, τα οποία μετατρέπουν το ηλεκτρικό σήμα σε ακουστικό σήμα.

Στις τηλεπικοινωνίες **διαμόρφωση** ονομάζεται η διαδικασία μεταβολής ενός περιοδικού σήματος, συνήθως υψίσυχνου, με στόχο την κωδικοποίηση σε αυτό ενός σήματος χαμηλής συχνότητας, το οποίο μεταφέρει κωδικοποιημένη πληροφορία. Το υψίσυχνο σήμα τότε καλείται **φέρων** και συνήθως είναι σήμα απλής συχνότητας (π.χ. μία ημιτονοειδής κυματομορφή). Η διαμόρφωση απαιτείται για να μπορέσει να διέλθει ένα σήμα από κάποιο τηλεπικοινωνιακό κανάλι (από ένα καλώδιο στις ενσύρματες επικοινωνίες, ή από τον ελεύθερο χώρο, στις ασύρματες επικοινωνίες) το εύρος ζώνης του οποίου δεν επικαλύπτεται με το εύρος ζώνης του σήματος.



Σχήμα 9.1. Δομικό διάγραμμα τηλεπικοινωνιακού συστήματος

Στο άλλο άκρο της επικοινωνίας, στον παραλήπτη ή δέκτη, λαμβάνει χώρα η ανάστροφη διαδικασία προκειμένου να ανακτηθεί το αρχικό σήμα, η **αποδιαμόρφωση**. Μία συσκευή η οποία μπορεί να επιτελεί και τις δύο διεργασίες, έτσι ώστε να λειτουργεί και ως αποστολέας και ως παραλήπτης, ονομάζεται **μόντεμ** (modem, εκ των αγγλικών λέξεων Modulator-Demodulator).



## 9.2. Το πρόβλημα

Το βασικό πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε στις επικοινωνίες είναι να στείλουμε ένα φυσικό μήνυμα (το βασικό σήμα) μακριά σε κάποιο δέκτη χρησιμοποιώντας κάποιο μέσο επικοινωνίας.

**Μετάδοση βασικής (φασματικής) ζώνης:** Αν η εφαρμογή μας περιορίζεται σε ενσύρματη επικοινωνία, η διαδικασία είναι απλή και το βασικό σήμα ενισχυμένο στέλνεται απ' ευθείας μέσω της γραμμής.



Τα βασικότερα σήματα είναι τα:

-  ακουστικά με φασματική ζώνη (20 Hz, 20 kHz).
-  σήματα Video με φασματική ζώνη (0 Hz, 5 MHz).

### 9.2.1. Το πρώτο πρόβλημα

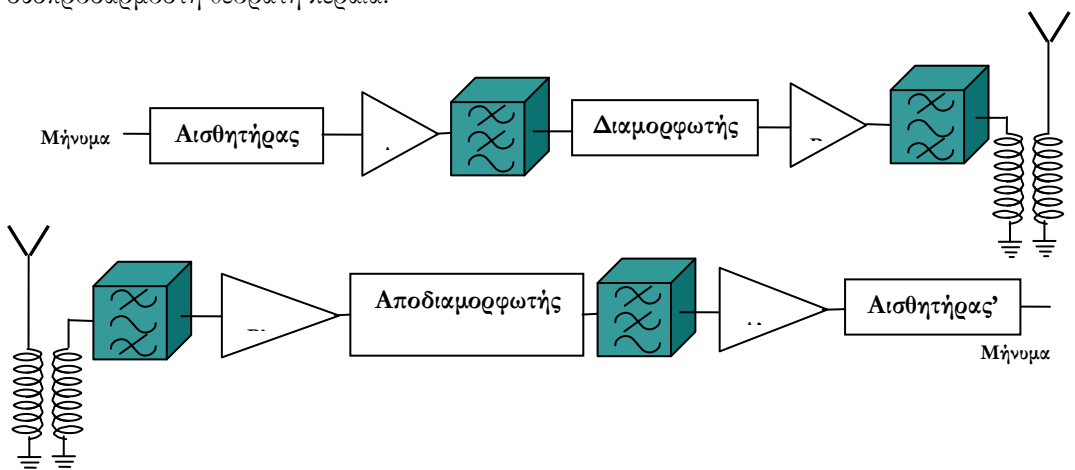
Στο στάδιο της επεξεργασίας σήματος, πρέπει το σήμα αφού ενισχυθεί πολύ, να μετατραπεί σε ηλεκτρομαγνητικό κύμα, που θα διαδοθεί στο χώρο με την ταχύτητα του φωτός. Η μετατροπή του **ηλεκτρικού** σήματος σε **ηλεκτρο-μαγνητικό** κύμα γίνεται μέσω πηνίων, ενώ στο τελικό στάδιο αυτό το πηνίο παίρνει τη μορφή κεραίας που ακτινοβολεί την ενέργεια στο χώρο.

Αποδεικνύεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα  $f$  ενός σήματος, τόσο ευκολότερα η ενέργειά του ακτινοβολείται στον κενό χώρο.

Αποδεικνύεται επίσης ότι, για να ακτινοβοληθεί επιτυχώς ένα σήμα, απαιτείται το μήκος της κεραίας να είναι ανάλογο προς το μήκος κύματος του σήματος. Το μήκος κύματος έχει οριστεί και δίνεται από τη σχέση:  $\lambda = c/f$ , όπου  $c$  η ταχύτητα του φωτός και  $f$  η συχνότητα.

Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα: Το μήκος κύματος ενός σήματος 1 kHz, είναι 300 km. Το μήκος κύματος ενός σήματος 1 MHz, είναι 300 m. Αντίστοιχα, το μήκος κύματος σήματος συχνότητας 10 MHz είναι 30 m. Πιο εύκολα κατασκευάζουμε κεραία για σήμα 10 MHz από ότι για σήμα 1 MHz ή 1 kHz. Θα ήταν ίσως πρακτικά αδύνατο να κατασκευάσουμε κεραία 150 km.

Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι φαίνεται τουλάχιστον άστοχο να προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε απ' ευθείας το ακουστικό σήμα (20 Hz, 20 kHz) σε ηλεκτρομαγνητικό κύμα, για να διαδοθεί στον χώρο. Θα απαιτούσε μία δυσπροσάρμοστη θεόρατη κεραία.



Σχήμα 9.2. Μία δεύτερη προσέγγιση του συστήματος.

### 9.2.2. Το Δεύτερο Πρόβλημα

Ας θεωρήσουμε προς στιγμήν ότι ξεπερνούμε τη δυσκολία κατασκευής της κεραίας για το σύστημά μας. Επιχειρούμε λοιπόν να ενισχύσουμε σημαντικά το ακουστικό σήμα και να φτιάξουμε ραδιοφωνικό σταθμό εκπέμποντας **απ' ευθείας** στις συχνότητες του σήματος μας.

Δημιουργήσαμε ένα τεράστιο πρόβλημα: Κανείς άλλος δεν μπορεί να φτιάξει δεύτερο ίδιο σύστημα με το δικό μας, στην ίδια γεωγραφική περιοχή. Αν επιχειρούσε ένα δεύτερο σύστημα να εκπέμψει με τον ίδιο τρόπο, τα σήματα θα 'ταξίδευαν' μαζί στο χώρο. Άρα θα αναμιγνύονταν, καθώς είναι στις ίδιες συχνότητες, και το αποτέλεσμα θα ήταν τραγικό και για τα δύο. Κανένας δέκτης δε θα μπορούσε να συλλάβει, να διαχωρίσει εις νέου και να ακροαστεί τα αρχικά διακριτά σήματα. Από αυτό το φανταστικό πείραμα προκύπτει ότι δεν θα μπορούσαν να συνυπάρξουν περισσότερα από ένα ασύρματα συστήματα.

Πρέπει λοιπόν κάτι να κάνουμε, πριν το σήμα εισέλθει στο μέσο μετάδοσης. Πρέπει να του δώσουμε όλα εκείνα τα απαραίτητα χαρακτηριστικά, που θα του επιτρέψουν να ταξιδέψει εύκολα και να προστατευθεί από την επίθεση άλλων ιδίων με αυτό σημάτων, που ενδεχομένως υπάρχουν στον ίδιο χώρο. Μόνον έτσι θα διατηρήσει την φυσιογνωμία του και ο δέκτης θα μπορέσει να το διαχωρίσει και να το επεξεργαστεί, ώστε να δώσει στην έξοδο το μήνυμα στον τελικό παραλήπτη.

### 9.3. Το Τέχνασμα

**T**ο βασικό μας σήμα (το σήμα της πληροφορίας) θα το 'φορτώσουμε' με κάποιο τρόπο πάνω σε ένα άλλο σήμα πολύ υψηλότερης συχνότητας, που μεταδίδεται ευκολότερα, για να το μεταφέρει στο κανάλι μετάδοσης, έως την είσοδο του δέκτη. Λόγω του ρόλου του, το σήμα υψηλής συχνότητας θα το ονομάσουμε φέρον σήμα ή απλούστερα ακόμη **φέρον  $M(t)$**  και είναι το σήμα που διαμορφώνεται από το σήμα πληροφορίας. Το βασικό σήμα ονομάζεται 'διαμορφώνον σήμα' αφού είναι το σήμα που διαμορφώνει το φέρον, ή **σήμα πληροφορίας  $s(t)$** . Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διαμόρφωση.

Το σήμα που προκύπτει από τη διαμόρφωση θα το συμβολίζουμε  **$E(t)$**  και θα το αποκαλούμε **διαμορφωμένο φέρον**.

Υποφιαζόμαστε ότι στο δέκτη θα πρέπει να γίνει η ανάποδη διαδικασία, για να 'ξεφορτώσει' το ωφέλιμο σήμα από το φέρον υψηλής συχνότητας. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **αποδιαμόρφωση**.

#### 9.3.1. Το Βασικό Σήμα

Το βασικό σήμα ή σήμα πληροφορίας είναι ένα τυχαίο σήμα. Για παράδειγμα η φωνή μας δεν είναι περιοδικό σήμα. Για απλούστευση θα θεωρούμε το σήμα αυτό ένα απλό ημίτονο συχνότητας  $F$ , προκειμένου να αναλύσουμε τη διαδικασία.

$$s(t) = S_0 \sin(\Omega t)$$

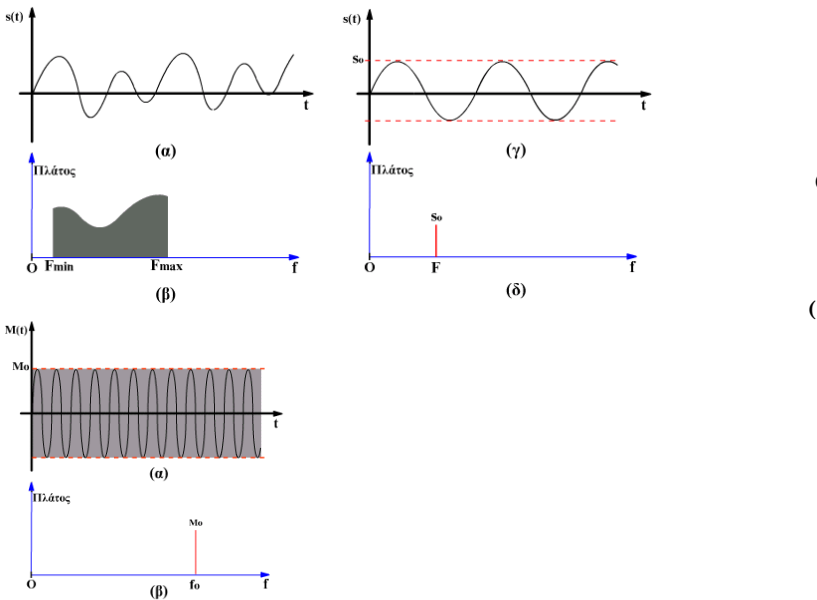
### 9.3.2. Το Φέρον

Το φέρον σήμα  $M(t)$  έχει συχνότητα  $f_0$  και πρέπει να ισχύει ο περιορισμός  $f_0 > F_{\max}$ , όπου  $F_{\max}$  η μέγιστη συχνότητα στο βασικό σήμα.

$$M(t) = M_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

όπου  $M_0$  το πλάτος,  $\omega_0$  η κυκλική συχνότητα,  $f_0$  η συχνότητα και  $\varphi_0$  η αρχική φάση του σήματος.

Το σήμα που προκύπτει από τη διαμόρφωση θα το συμβολίζουμε  $\mathbf{E}(t)$  και θα το αποκαλούμε **διαμορφωμένο φέρον**.



Σχήμα 9.3: Το σήμα πληροφορίας (α) (β) Τυχαίο Σήμα (γ), (δ) Ημιτονικό Σήμα και (ε), (στ) το Φέρον Σήμα.

## 9.4. Πομπός AM

### 9.4.1. Διαμόρφωση Πλάτους (AM Modulation)

$\Sigma$  την διαμόρφωση πλάτους το βασικό σήμα  $s(t)$  απεικονίζεται (επηρεάζει) στο πλάτος του σήματος  $M(t)$ . Δηλαδή το εκπεμπόμενο σήμα θα είναι:

$$E(t) = [M_0 + s(t)]\sin(\omega_0 t)$$

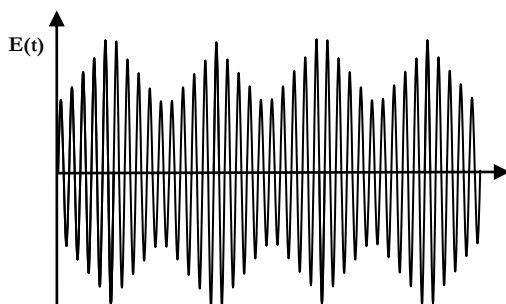
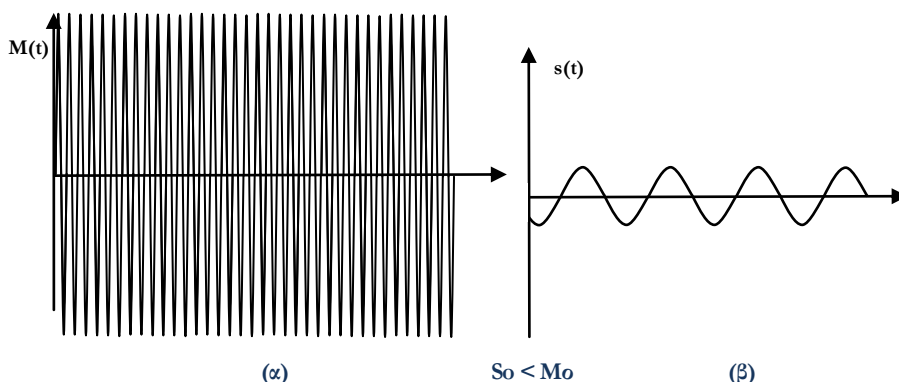
Θεωρήσαμε ότι  $\theta_0=0$ , δηλαδή  $M(t)=0$  με την έναρξη της παρατήρησης ( $t = 0$ ).

Στην έξοδο του διαμορφωτή το διαμορφωμένο φέρον (εκπεμπόμενο σήμα)  $E(t)$  έχει τη μορφή του σχήματος 9.4(γ).

Η τεχνική ΑΜ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγει ένα σήμα χαμηλής συχνότητας, η οποία συχνότητα είναι η διαφορά των συχνοτήτων δύο σημάτων υψηλής συχνότητας.

$$E(t) = [M_0 + S_0\sin(\Omega t)]\sin(\omega_0 t) = M_0[1 + m\sin(\Omega t)]\sin(\omega_0 t)$$

όπου  $m=S_0/M_0$ . Το μέγεθος  $m$ , που είναι μικρότερο από τη μονάδα, είναι καθαρός αριθμός και ονομάζεται ποσοστό διαμόρφωσης. Μετριέται συνήθως ως ποσοστό επί τοις εκατό (%).



Σχήμα 9.4: (α) Το φέρον με πλάτος  $M_0$  και συχνότητα  $f$  (β) Το σήμα πληροφορίας με πλάτος  $S_0$  και συχνότητα  $F$  και (γ) Το εκπεμπόμενο σήμα με μεταβλητό πλάτος  $M_0 + S_0\sin\Omega t$  και συχνότητα  $f$ .

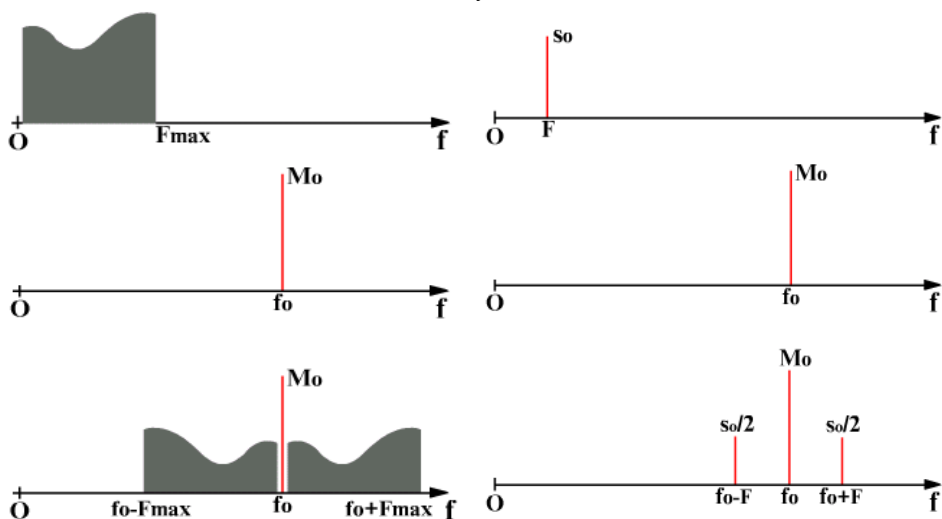
$$\begin{aligned}
 E(t) &= \\
 &= [M_0 + S_0 \sin(\Omega t)] \sin(\omega_0 t) = \\
 &= M_0 \sin(\omega_0 t) + S_0 \sin(\Omega t) \sin(\omega_0 t) = \\
 &= M_0 \sin(\omega_0 t) + \frac{S_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t - \frac{S_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t
 \end{aligned}$$

Δηλαδή, το διαμορφωμένο φέρον που προέκυψε αποτελείται από (ισοδυναμεί με) τρεις φασματικές ακτίνες στις συχνότητες:

$$f_0, \quad f_0 - F \quad \text{και} \quad f_0 + F$$

Η πρώτη ακτίνα είναι η φασματική ακτίνα του φέροντος. Οι δύο άλλες ονομάζονται **πλευρικές φασματικές ακτίνες** και καταλαμβάνουν θέσεις συμμετρικές γύρω από την κεντρική συχνότητα  $f_0$ . Στην περίπτωση που το  $s(t)$  είναι τυχαίο σήμα, η φασματική ζώνη του διαμορφωμένου φέροντος εκτείνεται από

$$f_0 - F_{\max} \text{ έως } f_0 + F_{\max}$$



Σχήμα 9.5: Το σήμα πληροφορίας (πραγματικό και μίας συχνότητας), το φέρον και το διαμορφωμένο φέρον (πραγματικό και ιδανικό) σε αποκρισεις συχνότητας (φάσμα)

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι με τη διαδικασία της διαμόρφωσης πλάτους (Amplitude Modulation: AM) το χαμηλό φάσμα του βασικού σήματος μεταφέρθηκε και κατέλαβε διπλάσια ζώνη συμμετρικά γύρω από τη συχνότητα του φέροντος.

Στη ραδιοφωνία με διαμόρφωση πλάτους έχει υιοθετηθεί διεθνώς για τα ακουστικά σήματα διαμόρφωσης ο περιορισμός:  $F_{\max} = 5 \text{ kHz}$ . Η ζώνη συχνοτήτων AM εκτείνεται από 560 kHz έως 1600 kHz (γνωστή ως μεσαία κύματα).

**Παράδειγμα 9.1:** Ένα βασικό σήμα της μορφής  $s(t)=10\sin(2\pi 10^3t)$  διαμορφώνει φέρον  $M(t) = 15\sin(2\pi 10^6t)$ . Να προσδιοριστεί το ποσοστό διαμόρφωσης και το φάσμα που προκύπτει (οι συχνότητες δίνονται σε Hz, τα πλάτη σε Volt).

**Απάντηση:**  $m = S_o/M_o = 10/15 = 2/3 = 0,66$  ή 66%

Το φάσμα περιλαμβάνει δύο φασματικές ακτίνες στις συχνότητες  $10^6 - 10^3$  Hz = 999 kHz και  $10^6 + 10^3$  Hz = 1001 kHz. Έχουν πλάτος  $S_o/2 = 5$  Volt.

**Παράδειγμα 9.2:** Ένα βασικό σήμα της μορφής  $s(t) = 10\sin(2\pi 10^3t) + 8\sin(2\pi 4 \cdot 10^3t)$  διαμορφώνει κατά πλάτος ένα φέρον  $M(t) = 10\cos(2\pi 10^6t)$ . Να σχεδιαστεί το φάσμα.

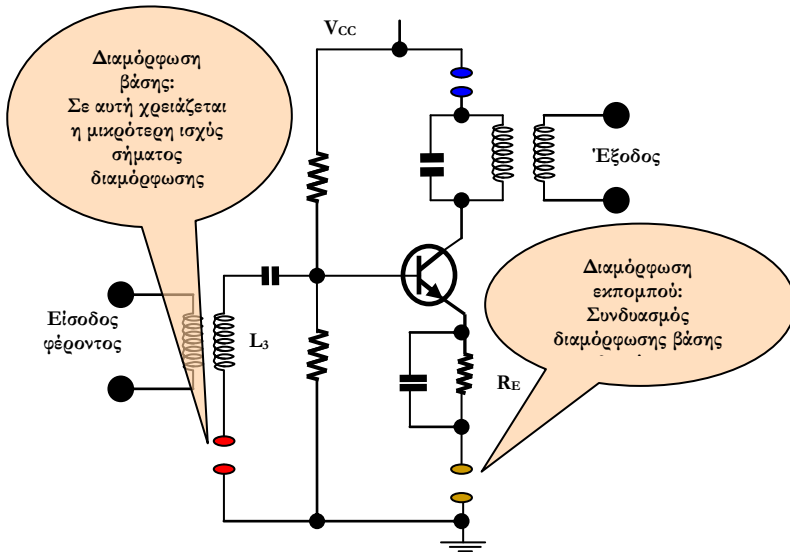
**Απάντηση:** Το σήμα  $s(t)$  περιέχει δύο φασματικές ακτίνες στις συχνότητες 1 kHz (με πλάτος 10V) και 4 kHz (με πλάτος 8 V). Η φασματική ακτίνα του φέροντος είναι στη συχνότητα 1 MHz και έχει πλάτος 10V.

Με τη διαμόρφωση προκύπτουν συνολικά τέσσερις φασματικές ακτίνες. Δύο στις συμμετρικές συχνότητες 999 kHz και 1001 kHz με πλάτος 5 V και δύο στις συμμετρικές συχνότητες 996 kHz και 1004 kHz με πλάτος 4 Volt.

#### 9.4.2. Διαμορφωτές Πλάτους: Μέθοδος εισαγωγής δύο σημάτων σε ενισχυτή

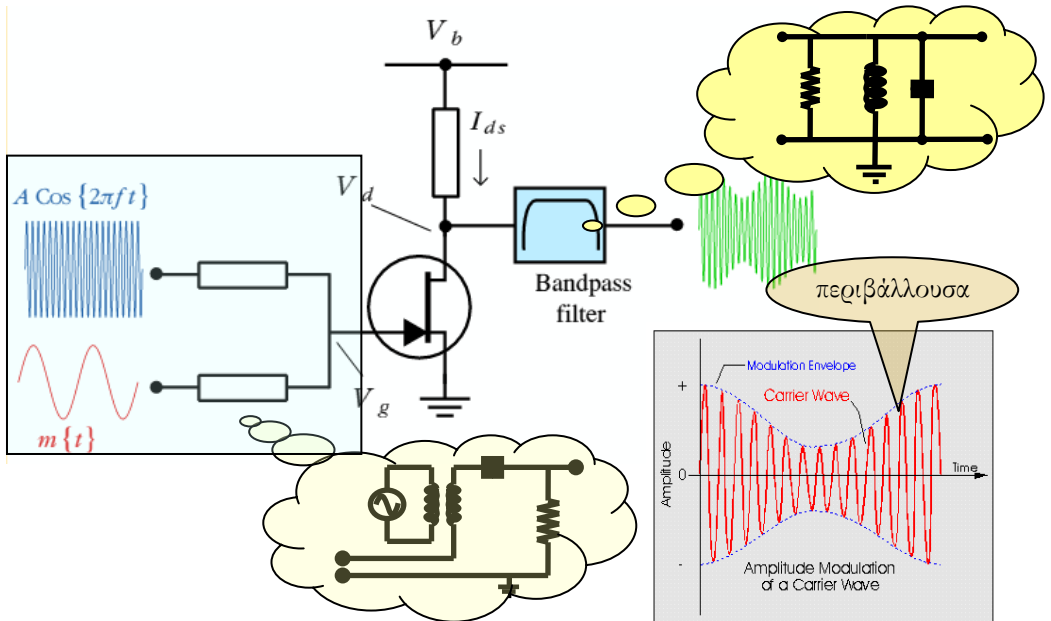
Το σήμα πληροφορίας (η συχνότητα διαμόρφωσης) μπορεί να εισαχθεί είτε στη βάση, είτε στο συλλέκτη, είτε στον εκπομπό ενός διπολικού τρανζίστορ, ή στα αντίστοιχα ηλεκτρόδια ενός FET.

Η τάση ανάδρασης εισάγεται για να μεταβάλει το σημείο λειτουργίας και το κέρδος του ενισχυτή που λειτουργεί ως **ταλαντωτής!** Η πιο κοινή μέθοδος διαμόρφωσης είναι η διαμόρφωση συλλέκτη για τα BJT ή υποδοχής για τα FET.



Σχήμα 9.6: Διαμορφωτής πλάτους με διαμόρφωση βάσης ή εκπομπού.

### 9.4.3. Διαμορφωτές Πλάτους Τετραγωνικού Νόμου

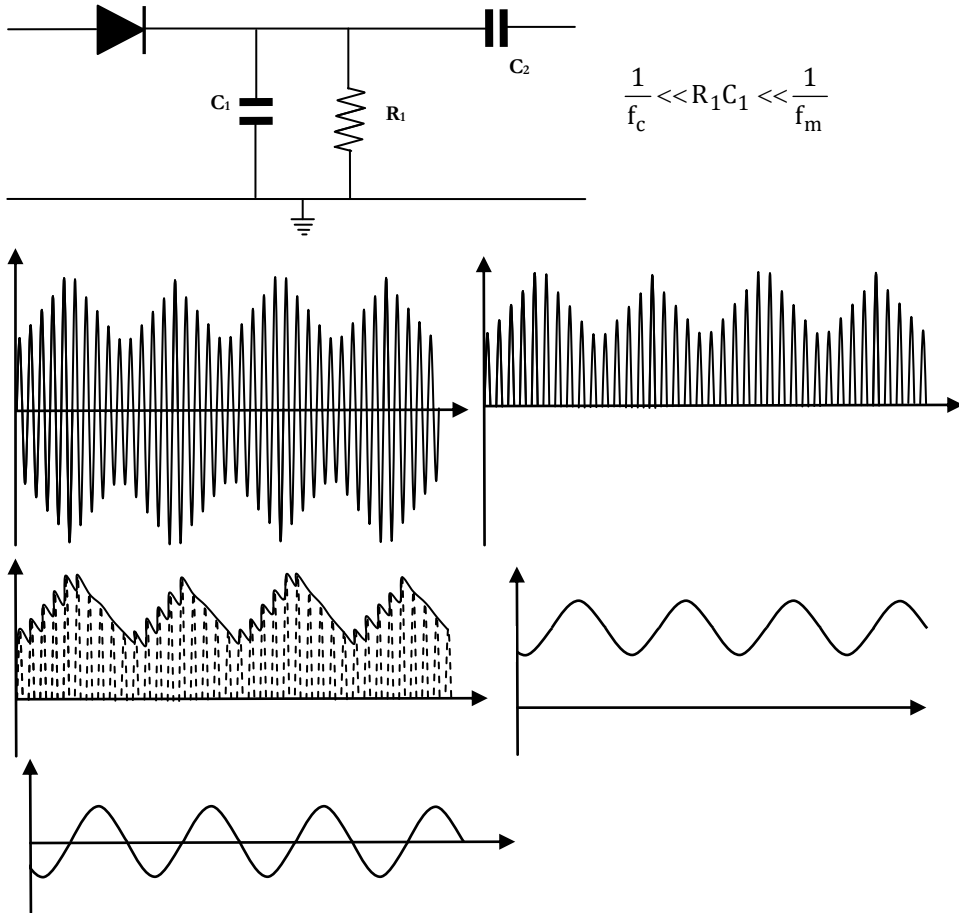


Σχήμα 9.7: Διαμορφωτής τετραγωνικού νόμου

### 9.5. Δέκτης AM

Δέκτης είναι ένα πλήρες ηλεκτρονικό κύκλωμα το οποίο δέχεται στην είσοδό του σήματα υψηλών συχνοτήτων, τα οποία μεταφέρουν κάποια πληροφορία, και αφού τα επεξεργαστεί, βγάζει στην έξοδό του την πληροφορία που μετέφεραν.

#### 9.5.1. Αποδιαμόρφωση Πλάτους (AM Demodulation)



Σχήμα 9.8: Το κύκλωμα του γραμμικού φωρατή και τα σήματα (α) Του διαμορφωμένου φέροντος που λαμβάνεται στο δέκτη (β) του ανορθωμένου, (γ) του εξομαλυμένου (δ) το πραγματικό σήμα πληροφορίας με DC συνιστώσα και (ε) το σήμα πληροφορίας

Ο τρόπος με τον οποίο διαμορφώνεται η υψηλή συχνότητα (φέρουσα) από την πληροφορία δεν είναι ένας και μοναδικός. Έτσι, αν η πληροφορία προκαλεί μεταβολή



του πλάτους της φέρουσας τότε έχουμε διαμόρφωση πλάτους (AM), αν προικαλεί μεταβολή της συχνότητας της φέρουσας έχουμε διαμόρφωση συχνότητας (FM), αν έχουμε μεταβολή της φάσης έχουμε φασική διαμόρφωση (PM), αν διαμορφώνεται με παλμούς έχουμε παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM).

Οι δέκτες χρησιμοποιούνται ευρέως στην ασύρματη και ενσύρματη επικοινωνία. Στη ραδιοφωνία χρησιμοποιείται ευρέως η διαμόρφωση AM και FM, ενώ στη σύγχρονη τηλεφωνία και στα αυτόματα ψηφιακά κέντρα χρησιμοποιείται η παλμοκωδική διαμόρφωση.

### 9.5.2. Ο Γραμμικός Φωρατής


Ο ρόλος του αποδιαμορφωτή είναι να ανακτήσει στο τέλος του τηλεπικοινωνιακού συστήματος την πληροφορία που περιέχεται σε ένα κύμα διαμορφωμένο AM ή FM με συχνότητα φέροντος  $f_c$  και συχνότητα διαμόρφωσης  $f_m$ .

Αποτελείται από ένα τροφοδοτικό απλής ανόρθωσης με φίλτρο εξομάλυνσης RC και έναν πυκνωτή για να κόψει τη DC συνιστώσα του αποδιαμορφωμένου σήματος, όπως παρOUSιάζεται στο σχήμα 9.8.

Αποδιαμορφωτής πλάτους (AM Demodulator) ή ανιχνευτής περιβάλλουσας (Envelope Detector) ή Γραμμικός Φωρατής (Linear Detector).

## 9.6. Πομπός FM

### 9.6.1. Διαμόρφωση Συχνότητας

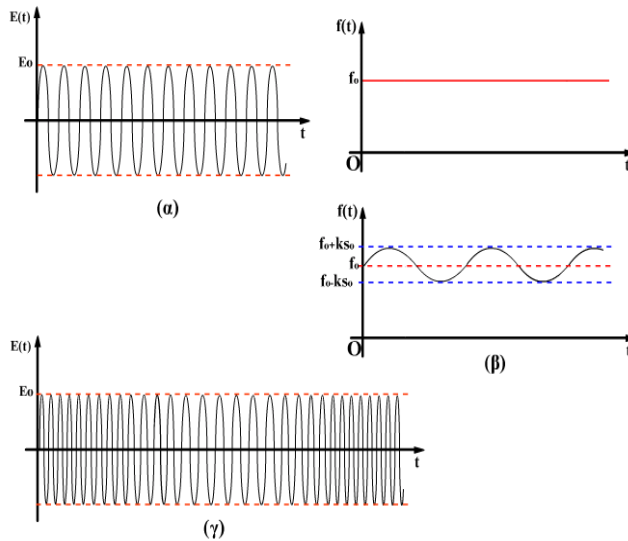
 εύτερη μεθοδολογία για αναλογικές διαμορφώσεις  
Το σήμα πληροφορίας  $s(t)$  αποτυπώνεται στη συχνότητα του φέροντος, το οποίο έχει σταθερό πλάτος.

$$f(t) = f_0 + k s(t)$$

όπου  $f(t)$  η στιγμιαία συχνότητα του φέροντος.

Αν  $s(t)=0$  τότε  $f(t)=f_0$  και  $E(t)=M(t)=E_0 \sin(\omega_0 t)$

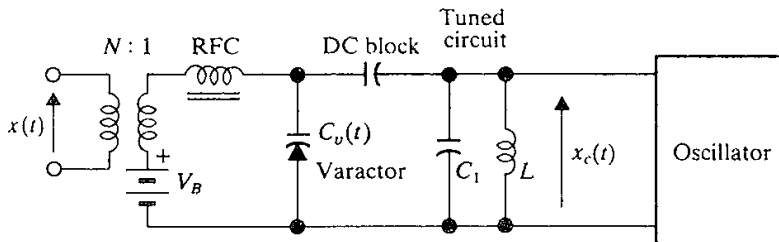
$$s(t) = S_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad f(t) = f_0 + k \cdot S_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$



$$\Delta f_{\max} = kS_0$$

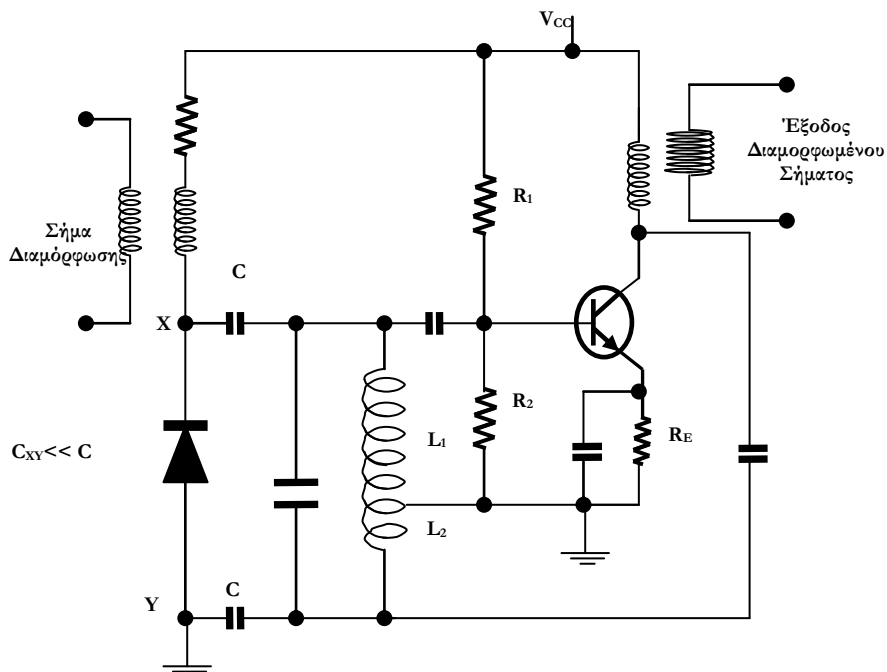
Σχήμα 9.9: Διαμορφωμένο κατά συχνότητα σήμα

### 9.6.2. Ένα πρακτικό κύκλωμα Διαμορφωτή FM



Σχήμα 9.10: Διαμορφωτής FM

### 9.6.3. Διαμορφωτής Varactor



Σχήμα 9.11: Διαμορφωτής Varactor

Το σήμα διαμόρφωσης συχνότητας εισάγεται στον ταλαντωτή από τον οποίο πηγάει η συχνότητα του φέροντος κύματος.

Ο διαμορφωτής του σχήματος χρησιμοποιεί μια διόδο Varactor ή Varicap (Κεφάλαιο 4, Βιβλίο «Στοιχεία Ηλεκτρονικής»).

Η συχνότητα εξόδου ενός ταλαντωτή που χρησιμοποιεί συντονισμένο κύκλωμα LC εξαρτάται από την χωρητικότητα. (Αν μεταβληθεί το C μεταβάλλεται και η συχνότητα ταλάντωσης)

## 9.7. Δέκτης FM

### 9.7.1. Αποδιαμόρφωση Συχνότητας

**Η** αποδιαμόρφωση συχνότητας γίνεται με τη βοήθεια των κυκλωμάτων φώρασης (AM) που περιγράψαμε, εάν προηγηθεί ένα κύκλωμα το οποίο μετατρέπει τη διαμόρφωση συχνότητας σε διαμόρφωση πλάτους

Κυκλώματα αποδιαμόρφωσης συχνότητας: Φωρατής κλίσεως, Διευκρινιστής, Αποδιαμορφωτής λόγου (ratio detector)

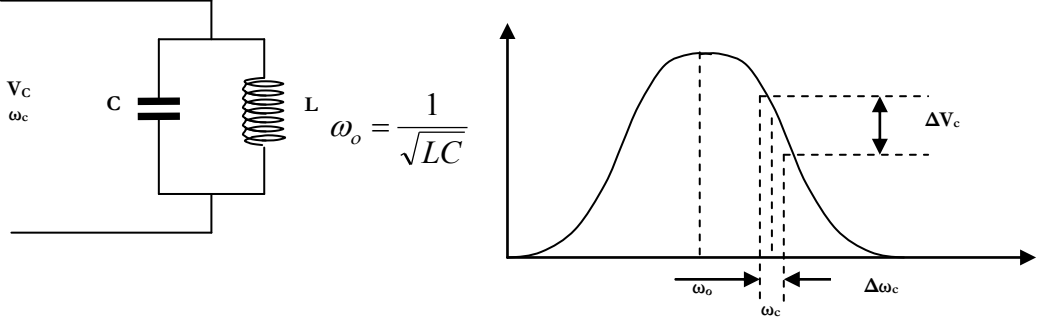
### 9.7.2. Ο Φωρατής Κλίσεως

Αν ένα κύκλωμα LC συντονιστεί σε μια συχνότητα  $\omega_0$ , έτσι ώστε η συχνότητα του φέροντος  $\omega_c$  να είναι λίγο μεγαλύτερη από την  $\omega_0$ , τότε η μεταβολή της τάσης  $\Delta V_c$  στα άκρα του κυκλώματος θα είναι ανάλογη της μεταβολής της συχνότητας  $\Delta \omega_c$ .

Το κύκλωμα συνδέεται με έναν απλό φωρατή AM και προκύπτει αποδιαμόρφωση του σήματος FM.

Επειδή η κλίση της καμπύλης συντονισμού δεν είναι σταθερή, αυτός ο τύπος φωρατή προκαλεί μεγάλη παραμόρφωση. Χρησιμοποιείται μόνο όταν η απόκλιση συχνότητας είναι πολύ μικρή.

Για μεγάλες αποκλίσεις συχνότητας χρησιμοποιούνται άλλα κυκλώματα φωρατών.



Σχήμα 9.12

**Παράδειγμα 9.3:** Πόσοι ραδιοφωνικοί σταθμοί FM μπορούν να υπάρξουν στη ζώνη συχνοτήτων από 88 έως 108 MHz στην ίδια γεωγραφική περιοχή;

**Απάντηση:** Θεωρώντας ότι η απόσταση μεταξύ των ραδιοφωνικών σταθμών είναι 200 kHz, τότε έχουμε:

$$N = (108 - 88) \text{ MHz} / 0,2 \text{ MHz} = 100$$

### 9.8. Σύγκριση των Διαμορφώσεων AM και FM

**Η** ισχύς του πομπού στην AM δεν είναι σταθερή και εξαρτάται από το ποσοστό διαμόρφωσης  $m$  ή το πλάτος του σήματος διαμόρφωσης  $s(t)$ . Στην FM η ισχύς εκπομπής είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει ευκολία στην κατασκευή του πομπού. Στην FM δεν απαιτείται ενίσχυση ισχύος του  $s(t)$ .

Στην AM η ισχύς της φασματικής συνιστώσας του φέροντος, που δεν είναι ωφέλιμη ισχύς, αποτελεί το μεγαλύτερο ποσοστό της ολικής ισχύος του σήματος. Είναι πάντοτε πολύ μεγαλύτερη από την ισχύ των πλευρικών ζωνών, που είναι η ωφέλιμη. Άρα έχουμε σπατάλη ισχύος. Στην FM η αρχική ισχύς κατανέμεται σε όλο το φάσμα και η ισχύς της

φασματικής συνιστώσας του φέροντος είναι ένα μέρος της ολικής ισχύος. Έχουμε λοιπόν καλύτερη αξιοποίηση της ισχύος στην FM από ότι στην AM.

Στην περίπτωση της AM, αν ενισχύσουμε το σήμα μετά τη διαμόρφωση, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ενισχυτές που δεν εισάγουν παραμόρφωση, γιατί η πληροφορία μας βρίσκεται στις μεταβολές του πλάτους του σήματος. Αντίθετα στην FM, αν υπάρξει παραμόρφωση, δεν είναι καταστροφική, γιατί η πληροφορία μας βρίσκεται στη συχνότητα του φέροντος. Μπορούμε λοιπόν στην FM να χρησιμοποιήσουμε ως τελικό στάδιο ενισχυτή τάξης C, που έχει μεγάλη απόδοση.

Μειονέκτημα στην FM μπορεί να θεωρηθεί το γεγονός ότι το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου φέροντος είναι πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο εύρος της AM. Όμως όσον αφορά το θόρυβο, λόγω ακριβώς αυτού του μεγάλου εύρους, η FM παρουσιάζει σημαντικό πλεονέκτημα. Αποδεικνύεται ότι για τις συνήθεις τιμές του m<sub>f</sub> στην ραδιοφωνία, αυτό το πλεονέκτημα φτάνει σχεδόν 18 dB. Δηλαδή, ο λόγος ‘σήμα/θόρυβο’ στην FM είναι 64 φορές καλύτερος σε σύγκριση με το λόγο ‘σήμα/θόρυβο’ στην AM (18 dB = 10log64). Γι’ αυτό η FM διαμόρφωση και εκπομπή προσφέρεται για να απολαύσουμε μουσική πολύ πιο καλής ποιότητας από ό,τι στην AM.

## 9.9. Διαμόρφωση απλής πλευρικής ζώνης

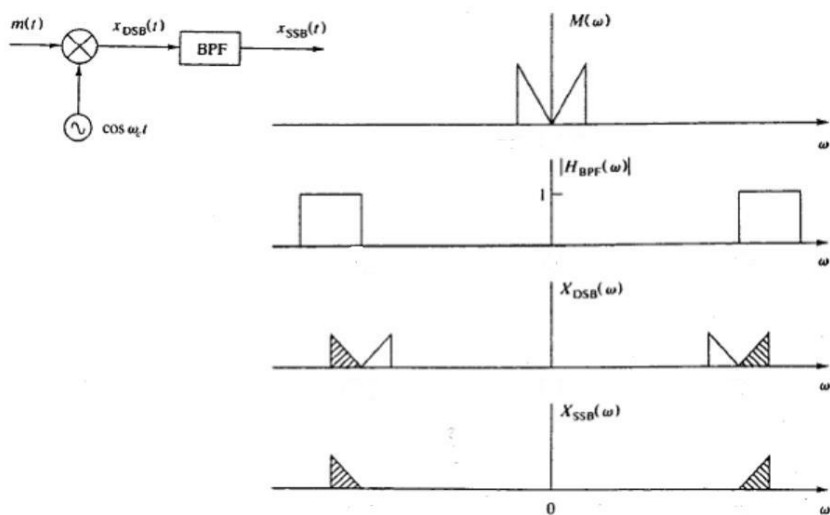
**A**ς θυμηθούμε ότι το AM διαμορφωμένο φέρον σήμα είναι  

$$E(t) = [M_0 + S_0 \sin(\Omega t)] \sin(\omega_0 t) = M_0 [1 + m \sin(\Omega t)] \sin(\omega_0 t)$$
  
 Ο μετασχηματισμός Fourier αυτού του σήματος είναι

$$S(\omega) = A_c \pi \delta(\omega + \omega_c) + A_c \pi \delta(\omega - \omega_c) + (A_c/2) k_a M(\omega + \omega_c) + (A_c/2) k_a M(\omega - \omega_c)$$

Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε ότι οι φασματικές ακτίνες του εκπεμπόμενου σήματος εμφανίζονται σε ίσες αποστάσεις πάνω και κάτω από τη συχνότητα του φέροντος και επίσης περιλαμβάνουν ακριβώς την ίδια πληροφορία (διότι είναι μιγαδικοί συζυγείς μεταξύ τους). Το μέρος που είναι πάνω από τη συχνότητα του φέροντος καλείται πάνω πλευρική ζώνη και το μέρος που είναι κάτω, καλείται κάτω πλευρική ζώνη.

Το γεγονός ότι η αρχική πληροφορία του σήματος μετά την AM διαμόρφωση εμφανίζεται σε δύο ζώνες και από τις δύο πλευρές της συχνότητας του φέροντος, έδωσε την ιδέα να χρησιμοποιηθεί μόνο η μία από τις δύο πληροφορίες για να μεταφερθεί η αρχική πληροφορία. Η AM καλείται DSBS – AM (Double sideband single carrier). Έτσι, το SSB σήμα μπορεί να δημιουργηθεί με το κατάλληλο φίλτρο ριζοσπάστου του AM σήματος εξόδου DSBS.



Σχήμα 9.13: Διαμόρφωση SSB

Προφανώς, απ' όσον γνωρίζουμε δεν υπάρχει κέρδος σε οποιοδήποτε πεδίο χωρίς απώλειες σε ένα σχετιζόμενο πεδίο. Έτσι, το μειωμένο εύρος ζώνης υπάρχει εις βάρος της αυξημένης πολυπλοκότητας του συστήματος.

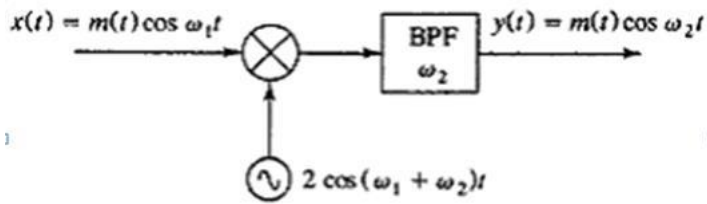
### 9.10. Μίκτης και IF

Κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας στο δέκτη, είναι συχνά επιθυμητό, τα διαμορφωμένα σήματα των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων να μεταφράζονται σε ένα νέο εύρος συχνοτήτων. Για παράδειγμα, στους περισσότερους AM δέκτες, η λαμβανόμενη ραδιοσυχνότητα (RF) [540 to 1600 KHz], ολισθαίνει σε μία ενδιάμεση ζώνη ή συχνότητα (**intermediate frequency –IF - 455 KHz**) για να είναι εύκολη η επεξεργασία. Το λαμβανόμενο σήμα που έχει «μεταφραστεί» σε ένα δεδομένο και σταθερό IF σήμα, μπορεί ευκολότερα να ενισχυθεί, να φιλτραριστεί και να αποδιαμορφωθεί.

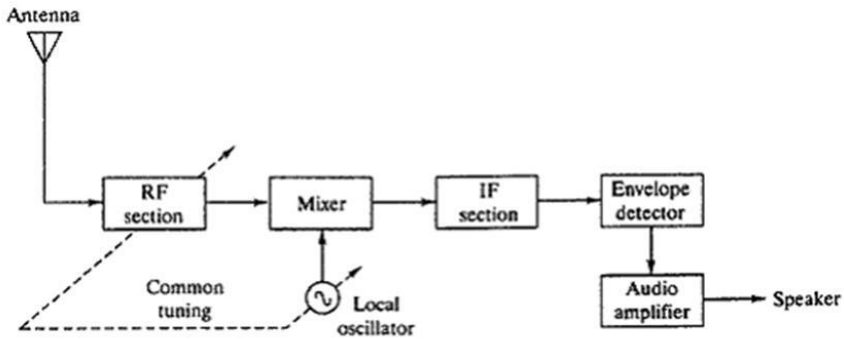
Η συσκευή που αναλαμβάνει την ολίσθηση συχνότητας καλείται μίκτης (**frequency mixer**). Η λειτουργία συχνά καλείται μετατροπή συνότητας ή υπερετεροδυνία (**frequency conversion, or heterodyning**).

Ένα πρόβλημα που σχετίζεται με τη μίξη συχνότητας είναι η παρουσία της συχνότητας image frequency. Για παράδειγμα δίνουμε το κύλωμα του σχήματος 9.15 που είναι ένας AM υπερετεροδύνης δέκτης. Η IF συχνότητα που δημιουργείται από έναν τοπικό ταλαντωτή είναι 455 KHz υψηλότερη από τη συχνότητα του εισερχόμενου σήματος

Επιθυμούμε να συντονίσουμε τον AM δέκτη στα 600 KHz. Αν υπάρχει κάποια εμπομπή στα 1510 KHz (=600KHz+2\*455KHz), θα ληφθεί επίσης.



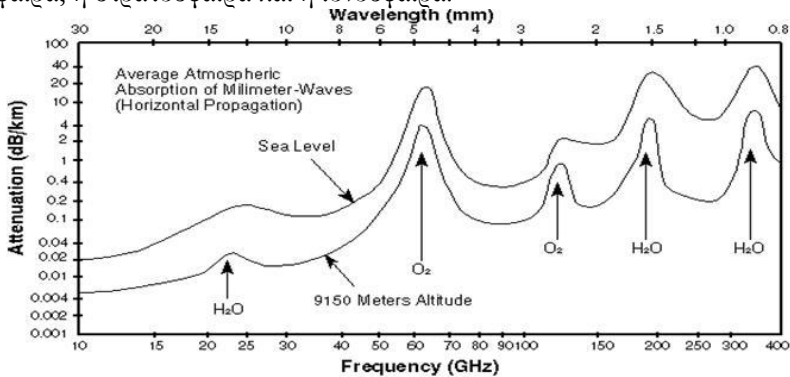
Σχήμα 9.14: Μετατροπή συχνότητας με μίξη



Σχήμα 9.15: Superheterodyne receiver

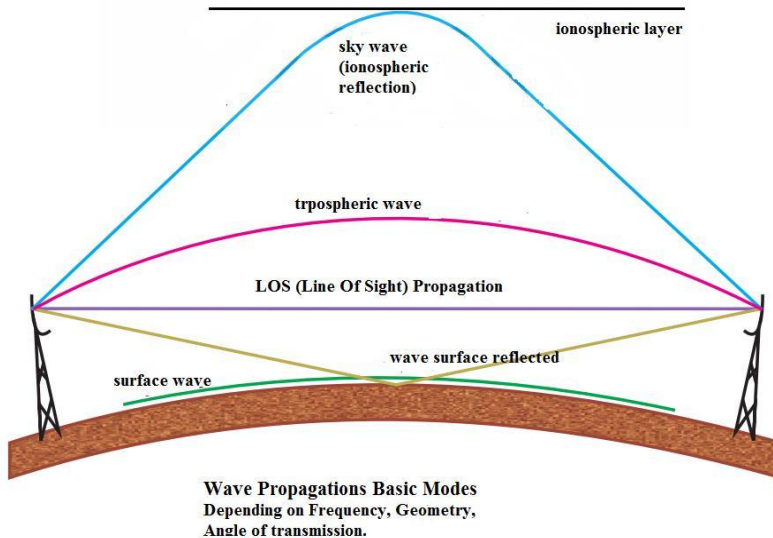
### 9.11. Διάδοση στην ατμόσφαιρα

Τα ραδιοκύματα που ταξιδεύουν στην ατμόσφαιρα επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες λόγω της ανομοιομορφίας της γήινης ατμόσφαιρας. Η γήινη ατμόσφαιρα χωρίζεται σε τρεις διακριτές περιοχές ή στρώματα. Αυτά είναι η τροπόσφαιρα, η στρατόσφαιρα και η ιονόσφαιρα.



Σχήμα 9.16: Εξασθένηση στην ατμόσφαιρα συναρτήσει της συχνότητας

Σχεδόν όλα τα καιρικά φαινόμενα συμβαίνουν στην τροπόσφαιρα. Η θερμοκρασία αυτού του στρώματος μειώνεται με το υψόμετρο. Έχει περίπου ύψος 7.5 μίλια. Τα σύννεφα, οι ατμοί και τα μόρια αερίων δημιουργούν διαταραχή (turbulence) λόγω τις μεταβολές στη θερμοκρασία, την πίεση και την πυκνότητα.



Σχήμα 9.17: Μετάδοση ΗΜ κύματος στη γήινη ατμόσφαιρα

Αυτές οι συνθήκες έχουν έντονη επίδραση στη διάδοση των κυμάτων με φαινόμενα όπως διάθλαση (αλλαγή κατεύθυνσης τη διάδοσης του κύματος που διέρχεται από περιοχές με διαφορετικά ηλεκτρομαγνητικά χαρακτηριστικά), περίθλαση (δευτερεύουσα εκπομπή του κύματος από εμπόδια που συναντά στη διαδρομή) και ανάκλαση (μέρος της εκπομπής επιστρέφει πίσω λόγω εμποδίου) και απορρόφηση (από τα μόρια υδρατμών CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> τα οποία θερμαίνονται κατά τη διέλευση του κύματος και επομένως απορροφούν ενέργεια).

Η στρατόσφαιρα βρίσκεται μεταξύ της τροπόσφαιρας και της ιονόσφαιρας. Η θερμοκρασία της είναι σχεδόν σταθερή σε όλη την περιοχή και υπάρχουν ελάχιστοι υδρατμοί. Αυτό το στρώμα δεν έχει καμία σχεδόν επίδραση στα ραδιοκύματα.

Η ιονόσφαιρα είναι το πιο σημαντικό στρώμα της γήινης ατμόσφαιρας για επικοινωνίες FM. Εκτείνεται περίπου 31 μίλια πάνω από το επίπεδο της θάλασσας. Η ιονόσφαιρα είναι «ιονισμένη» κι έτσι οι ιδιότητές της μεταβάλλονται ανάλογα με την ακτινοβολία που εκπέμπεται από τον ήλιο. Αυτές οι μεταβολές στις ιδιότητες είναι δύο τύπων : Περιοδικές και επομένως προβλέψιμες με ακρίβεια και τυχαίες και επομένως μη προβλέψιμες.



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Ασκήσεις από τα Κεφάλαια 1 έως 6

### A) Τύπου πολλαπλής επιλογής

1 Έστω κύκλωμα στο οποίο η είσοδος πηγαίνει ταυτόχρονα σε ένα υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 10 KHz και σε ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 20 KHz. Οι έξοδοι αυτών των φίλτρων είναι είσοδοι σε κύκλωμα αθροιστή. Το συνολικό κύκλωμα είναι ένα

- A ζωνοπερατό φίλτρο
- B ζωνοαποκοπτικό φίλτρο
- Γ ένα κύκλωμα άχρηστο («παντο-κοπτικό»)
- Δ ένα κύκλωμα άχρηστο («παντο-περατό»)

2 Ένας τριγωνικός παλμός περιόδου 100 ms εισέρχεται σε ένα παθητικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 10 KHz και στη συνέχεια περνάει από ένα παθητικό υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 15 KHz. Στην έξοδο θα λάβουμε

- A τίποτα
- B ακριβώς το ίδιο σήμα
- Γ τετραγωνικό παλμό πολύ μικρού πλάτους
- Δ σήμα που θα μοιάζει με ημίτονο (ουσιαστικά θα είναι αποτέλεσμα διαδοχικών παραβολών) πολύ μικρού πλάτους

3 Συνδέουμε σε σειρά ένα ενεργό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 20 KHz και κέρδος χαμηλών συχνοτήτων 10 με ένα ενεργό υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 15 KHz και κέρδος υψηλών συχνοτήτων 10. Το συνολικό κύκλωμα θα είναι

- A ζωνοπερατό φίλτρο
- B ζωνοαποκοπτικό φίλτρο

- Γ ένα κύκλωμα άχρηστο («παντο-ιοπτιό»)  
Δ ένα κύκλωμα άχρηστο («παντο-περατό»)
- 4 Ενεργό υψιπερατό φίλτρο 2ης τάξης σε μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία έχει κέρδος χαμηλών συχνοτήτων  
Α μηδέν  
Β περίπου 1,6  
Γ εξαρτάται από τις τιμές των αντιστάσεων που συνδέονται στον αναστρέφοντα ακροδέκτη των τελεστικών ενισχυτών  
Δ 40 dB/δεκάδα
- 5 Η κλίση ενός υψιπερατού ενεργού φίλτρου για τη ζώνη αποκοπής  
Α εξαρτάται από τον αριθμό των τελεστικών ενισχυτών  
Β εξαρτάται από τον αριθμό των πυκνωτών και αντιστάσεων που περιέχει  
Γ είναι σταθερή  
Δ εξαρτάται από το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς
- 6 Η τιμή της χωρητικότητας ενός πυκνωτή  
Α αυξάνεται με την αύξηση της συχνότητας  
Β μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας  
Γ παραμένει σταθερή σε μεταβολές της συχνότητας  
Δ εξαρτάται και από τη συχνότητα και από τη θερμοκρασία
- 7 Το πρόσημο – στη συνάρτηση μεταφοράς ενός φίλτρου, δηλώνει  
Α αναστροφή σήματος εισόδου  
Β μείωση του σήματος εισόδου  
Γ καθυστέρηση φάσης  $\pi/2$   
Δ ότι η τάση εξόδου έπεται της τάσης εισόδου κατά  $180^\circ$

- 8 Σε ένα βασικό συντονισμένο ζωνοπερατό φίλτρο, η συχνότητα συντονισμού είναι 14 kHz. Αν το εύρος ζώνης είναι 4 KHz, τότε η χαμηλή συχνότητα αποκοπής είναι
- A 7 kHz
- B 10 kHz
- Γ 12 kHz
- Δ Δεν μπορεί να καθοριστει
- 9 Ένα RL βαθυπερατό φίλτρο αποτελείται από ένα πηνίο 5.6 mH και μία αντίσταση 3.3 KΩ. Η τάση εξόδου λαμβάνεται στα άκρα της αντίστασης. Η κρίσιμη συχνότητα αποκοπής είναι
- A 93.8 kHz
- B 93.8 Hz
- Γ 861 Hz
- Δ 86.12 kHz
- 10 Η μέγιστη τάση εξόδου σε ένα παθητικό βαθυπερατό φίλτρο είναι 15 V. Η τάση εξόδου στη συχνότητα αποκοπής είναι
- A 0 V
- B 15 V
- Γ 10.6 V
- Δ 21.21 V
- 11 Ένα RL υψιπερατό φίλτρο αποτελείται από έναν αντιστάτη 470 Ω και ένα πηνίο 600 mH. Η έξοδος λαμβάνεται στα άκρα του πηνίου. Η κρίσιμη συχνότητα αποκοπής του κυκλώματος είναι
- A 125 Hz
- B 1,250 Hz
- Γ 564 Hz
- Δ 4,644 Hz

- 12 Η μέγιστη τάση εξόδου σε ένα ενεργό βαθυπερατό φίλτρο είναι 15 mV. Το κέρδος χαμηλών συχνοτήτων είναι 30dB. Η τάση εξόδου στη συχνότητα αποκοπής είναι
- A 0 V
- B 10.6 mV
- Γ 10.6 V
- Δ 15 V
- 13 Ένα ενεργό βαθυπερατό φίλτρο 8<sup>ης</sup> τάξης τύπου Butterworth, έχει κέρδος χαμηλών συχνοτήτων
- A περίπου 16 dB
- B που εξαρτάται από τις τιμές των παθητικών στοιχείων R και C
- Γ εξαρτάται από τις τιμές συγκεκριμένων αντιστάσεων
- Δ που βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας του συντελεστές των πολωνύμων Butterworth 8<sup>ης</sup> τάξης
- 14 Η είσοδος ενός κυκλώματος πηγαίνει ταυτόχρονα σε ένα υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 10 KHz και σε ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 20 KHz. Οι εξοδοι αυτών των φίλτρων είναι είσοδοι σε κύκλωμα αθροιστή. Το συνολικό κύκλωμα είναι ένα
- A ζωνοπερατό φίλτρο
- B ζωνοαποκοπτικό φίλτρο
- Γ ένα κύκλωμα άχρηστο («παντο-κοπτικό»)
- Δ ένα κύκλωμα άχρηστο («παντο-περατό»)
- 15 Τα φίλτρα Butterworth n<sup>οστής</sup> τάξης
- A αποτελούνται από n τελεστικούς ενισχυτές
- B αποτελούνται από n/2 τελεστικούς ενισχυτές αν n άρτιο
- Γ έχουν κλίση 26\*n dB/ εικοσάδα στις ζώνες αποκοπής
- Δ έχουν συγκεκριμένη ενίσχυση αν n άρτιο

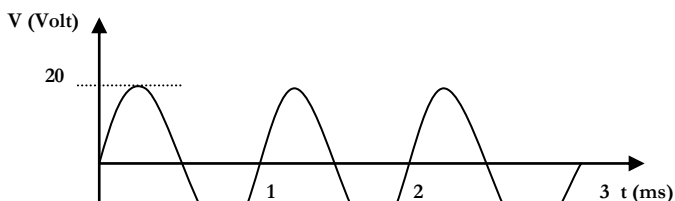
## B1) Ασκήσεις τύπου Ανάπτυξης

### Άσκηση 1

Έστω παθητικό υπερβατό φίλτρο 1ης τάξης με κρίσιμη συχνότητα αποκοπής  $f=1\text{KHz}$ . Να σχεδιαστεί το σήμα εξόδου αν το σήμα εισόδου είναι της μορφής:

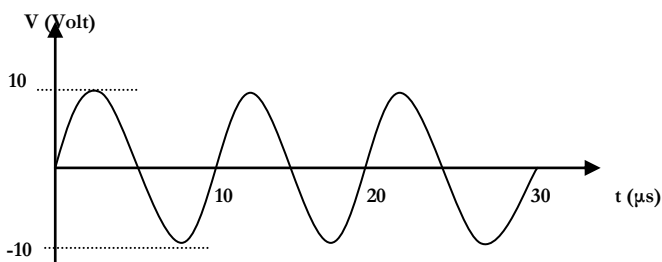
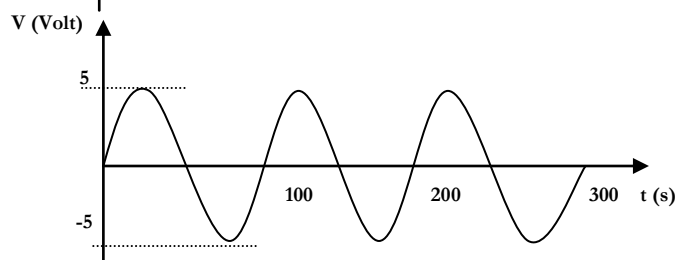
### Άσκηση 2

Έστω ενεργό βαθυπερατό φίλτρο 1ης τάξης με κρίσιμη συχνότητα αποκοπής  $f=10\text{ Hz}$  και κέρδος στις χαμηλές συχνότητες  $100\text{ dB}$ . Να σχεδιαστεί το σήμα εξόδου αν το σήμα εισόδου είναι της μορφής:



### Άσκηση 3

Έστω ενεργό υπερβατό φίλτρο 1ης τάξης με κρίσιμη συχνότητα αποκοπής  $f=10\text{ KHz}$  και κέρδος στις υψηλές συχνότητες  $20\text{ dB}$ . Να σχεδιαστεί το σήμα εξόδου αν το σήμα εισόδου είναι της μορφής:



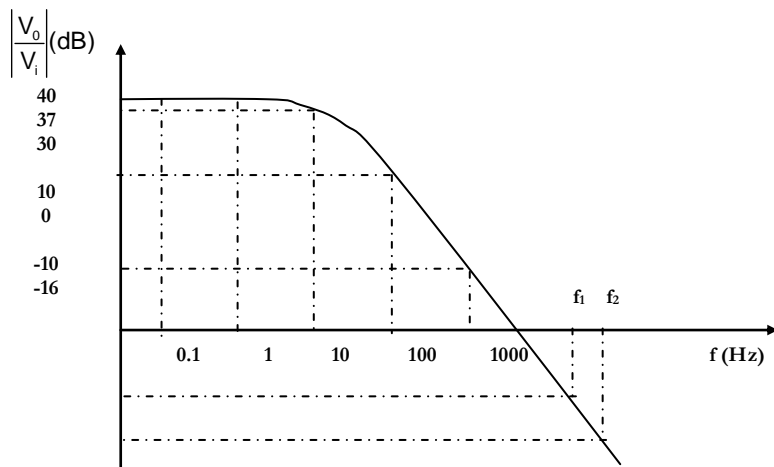
### Άσκηση 4

Δίνεται η απόκριση συχνότητας ενός ενεργού βαθυπερατού φίλτρου:

A) Να βρεθεί η κρίσιμη συχνότητα αποκοπής

B) Να βρεθούν οι συχνότητες  $f_1$  και  $f_2$ .

Γ) Αν το σήμα εισόδου είναι της μορφής  $V_i(t) = 2 \eta\mu(2\pi t) + 2 \eta\mu(2000\pi t)$ , να γραφεί η μορφή του σήματος εξόδου.



### Άσκηση 5

Να σχεδιαστεί ενεργό υπερβατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής  $f_0 = 1 \text{ KHz}$  χρησιμοποιώντας πυκνωτή  $15 \mu\text{F}$ . Το κέρδος στις υψηλές συχνότητες να είναι  $40 \text{ dB}$ . Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τα διαγράμματα Bode (μέτρο και φάση της συνάρτησης μεταφοράς).

Υποδείξεις:

Να σχεδιαστεί το κατάλληλο κύκλωμα και να επιλεγθούν κατάλληλες τιμές για τα στοιχεία του. Να θεωρηθεί η προσέγγιση  $3\pi \approx 10$ .

### Άσκηση 6

Το μέτρο της σύνθετης αντίστασης ενός πυκνωτή είναι  $10 \text{ K}\Omega$  για τη συχνότητα  $1 \text{ KHz}$ . Να βρεθεί το μέτρο της σύνθετης αντίστασης του ίδιου πυκνωτή για τη συχνότητα  $1 \text{ GHz}$ .

### Άσκηση 7

Δίνεται το διάγραμμα μέτρου συνάρτησης μεταφοράς ενός φίλτρου 1ης τάξης (διάγραμμα Bode).

A) Να χαρακτηρίσετε το φίλτρο ως προς τον τύπο στοιχείων και ως προς το εύρος ζώνης συχνοτήτων διέλευσης.

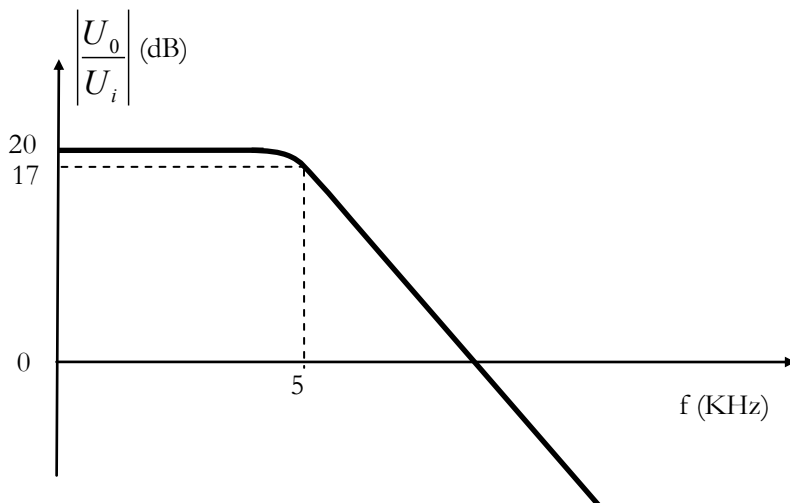
B) Να σχεδιαστεί το αντίστοιχο φίλτρο με τις τιμές των στοιχείων που περιέχει.

Γ) Σε ποια συχνότητα ισχύει  $U_{\text{out}} = U_{\text{in}}$ ;

Δ) Για ποιες συχνότητες το κέρδος του εν λόγω φίλτρου είναι μικρότερο από  $-26 \text{ dB}$ ;

Ε) Αγνοώντας τη μετατόπιση φάσης μεταξύ σήματος εισόδου και εξόδου, υπολογίστε το σήμα εξόδου αν το σήμα που εισέρχεται στο φίλτρο είναι της μορφής:

$$V_{in} = 10 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot 10^4 \cdot t) + 100 \cdot \sin(\pi \cdot 10^6 \cdot t) + 5 \cdot \sin(\pi \cdot 10^5 \cdot t)$$



## B2) Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων τύπου Ανάπτυξης

### Ασκηση 1

Το σήμα εισόδου είναι

$$V_{IN} = 20\sin(2\pi t), \text{ t σε msec.}$$

Η περίοδος του είναι  $T=1\text{ms}$  και επομένως η συχνότητά του είναι  $f=$

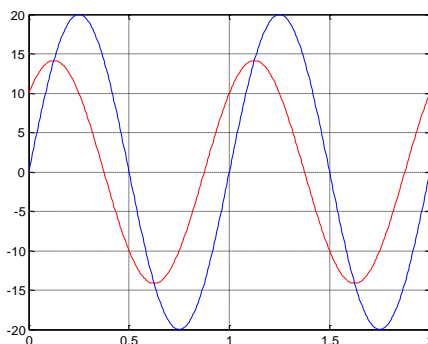
$$\frac{1}{T}=1\text{KHz.}$$

Η συχνότητα του σήματος ταυτίζεται με τη συχνότητα αποκοπής. Εφόσον είναι παθητικό το φίλτρο, γι' αυτή τη συχνότητα ισχύει

$$\frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = 0,707. \text{ Εφόσον είναι}$$

υπιπερατό θα ισχύει  $\varphi=90-45=45^\circ$ . Εφόσον οι  $360^\circ$  αντιστοιχούν σε  $1 \text{ ms}$  (ένας περιοδικός κύκλος), τότε οι  $45^\circ$  αντιστοιχούν σε  $0,125 \text{ ms}$ . Το σήμα εξόδου προηγείται του σήματος εισόδου κατά  $0,125 \text{ ms}$  και έχει πλάτος  $14,14 \text{ V}$ . Συνοπτικά, το σήμα

$$\text{εξόδου είναι: } V_{OUT} = 14,14\sin(360^\circ(t + \frac{1}{8})) \text{ ή } V_{OUT} = 14,14\sin(2\pi t + \frac{\pi}{4}), \text{ t σε ms.}$$



### Άσκηση 2

Θα μετατρέψουμε το κέρδος, από deciBel σε καθαρό αριθμό:

$$100\text{dB} = 20 \log \frac{V_{\text{OUT}}}{V_{\text{IN}}} \Rightarrow \frac{V_{\text{OUT}}}{V_{\text{IN}}} = 10^5$$

Το φίλτρο είναι βαθυπερατό. Άρα, ένα σήμα πολύ χαμηλής συχνότητας που θα εισέλθει στο φίλτρο, θα εξέλθει με πλάτος 100000 φορές μεγαλύτερο. Η περίοδος του σήματος είναι 100 ms. Η συχνότητά του είναι  $f=0,01\text{KHz}=10\text{Hz}$ . Το σήμα εισόδου είναι της μορφής

$$V_{\text{IN}} = 0,5\sin(3600t) = 0,5\sin(20\pi t) \text{ mV, } t \text{ σε sec.}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου είναι  $\frac{V_{\text{OUT}}}{V_{\text{IN}}} = \frac{10^5}{1 + j\frac{f}{f_c}}$  με μέτρο

$$\left| \frac{V_{\text{OUT}}}{V_{\text{IN}}} \right| = \frac{10^5}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \text{ και φάση } \varphi = -\text{τοξε}\varphi\left(\frac{f}{f_c}\right), \text{ όπου } f_c = 1\text{Hz. Επομένως, για το σήμα των}$$

$$10 \text{ Hz, προκύπτει } \left| \frac{V_{\text{OUT}}}{V_{\text{IN}}} \right| = \frac{10^5}{\sqrt{1 + \left(\frac{10}{1}\right)^2}} \approx 10000 \text{ και } \varphi = -\text{τοξε}\varphi(10) = -84,3^\circ = -$$

$1,47\text{rads} = -0,47\pi$ . Η μέγιστη τιμή του είναι 10000 φορές μεγαλύτερη από τη μέγιστη τιμή του σήματος εισόδου:  $0,5\text{mV} \cdot 10000 = 5\text{V}$ .

Το σήμα εξόδου λοιπόν είναι  $V_{\text{OUT}} = 5\sin(3600t - 84,3) = 5\sin(20\pi t - 1,47) \text{ V, } t \text{ σε sec.}$

Παρατηρούμε ότι το ημίτονο έγινε συνημίτονο. Πράγματι, σε υψηλές συχνότητες το βαθυπερατό φίλτρο ολοκληρώνει το σήμα εισόδου ( $\int \sin x dx = -\cos x$ )

### Άσκηση 3

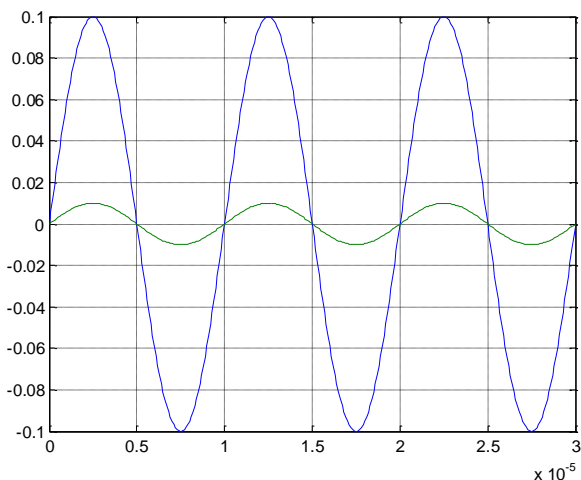
Στις υψηλές συχνότητες, το (μέγιστο) κέρδος του φίλτρου είναι  $20\text{dB}=10$ . Το σήμα εισόδου έχει περίοδο 10 μs και συχνότητα 0,1 MHz=100KHz. Η συχνότητα αυτή είναι πολύ υψηλή σε σχέση με τη συχνότητα αποκοπής και επομένως, το σήμα ενισχύεται κατά 10. Το σήμα εξόδου θα είναι της μορφής  $V_{\text{OUT}} = 10 \cdot 10\sin(2\pi \cdot 10^5 t)$



#### Άσκηση 4

A) Η κρίσιμη συχνότητα αποκοπής είναι η συχνότητα όπου το κέρδος πέφτει 3 dB σε σχέση με το μέγιστο δυνατό κέρδος. Επομένως, είναι η συχνότητα 10Hz.

B) Παρατηρούμε ότι το φίλτρο είναι ενεργό βαθυπερατό 1ης τάξης, εφόσον η κλίση της γραφικής παράστασης σε συχνότητες πολύ μεγαλύτερες από της



συχνότητα αποκοπής είναι 20dB/δεκάδα (διάστημα 100 – 1000 Hz). Η συχνότητα  $f_1$  είναι 10πλάσια της συχνότητας 1000 Hz, εφόσον το κέρδος από 10 dB γίνεται -10dB. Η συχνότητα  $f_2$  είναι 2πλάσια της  $f_1$ , εφόσον η διαφορά των αντιστοιχων κερδών είναι 6 dB. Επομένως  $f_1=10\text{KHz}$  και  $f_2=20\text{KHz}$ .

Γ) Το σήμα εισόδου αποτελείται από 2 συχνότητες: 1 Hz και 1000 Hz. Στο 1 Hz το κέρδος είναι 100 εφόσον  $20\log 100=40$ , ενώ στα 1000 Hz το κέρδος είναι 3,16 εφόσον

$20\log 3,16=10$ . Η φάση στο βαθυπερατό φίλτρο δίνεται από τη σχέση:  $\varphi = -\tau\omega\epsilon\varphi\left(\frac{f}{f_0}\right)$

όπου  $f_0=10$  Hz. Για τη συχνότητα 1 Hz προκύπτει  $\varphi_1=0^0$  ενώ για τη συχνότητα 1000 Hz προκύπτει  $\varphi_2=-90^0$  δηλαδή το σήμα εξόδου καθυστερεί κατά  $90^0$  να λάβει την τιμή του σήματος εισόδου.

$$V_{\text{OUT}} = 200\eta\mu(2\pi t) + 6,32\eta\mu\left(2000\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 200\eta\mu(2\pi t) - 6,32\sigma\upsilon\upsilon(2000\pi t)$$

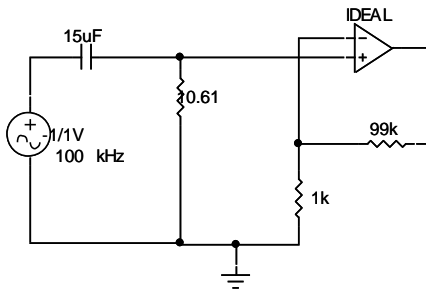
#### Άσκηση 5

Χρησιμοποιώντας τη συνδεσμολογία μη αναστρέφοντα ενισχυτή (τοπολογία Shallen-Key), σχεδιάζουμε το κύκλωμα. Το μέγιστο κέρδος είναι  $A_{\text{max}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$  και η

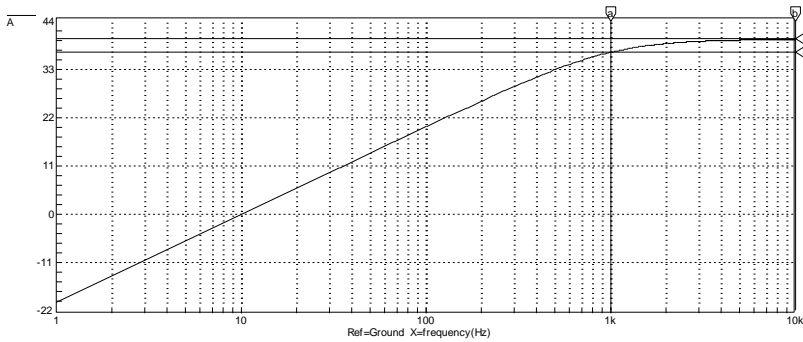
συχνότητα αποκοπής  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ . Ζητείται μέγιστο κέρδος 40dB=100 και επομένως

$R_1=1\text{K}$  (αυθαίρετα) και  $R_2=99\text{K}\Omega$ . Ομοίως, λύνοντας ως προς R τη σχέση για τη συχνότητα αποκοπής, προκύπτει  $R=10,61\Omega$ .

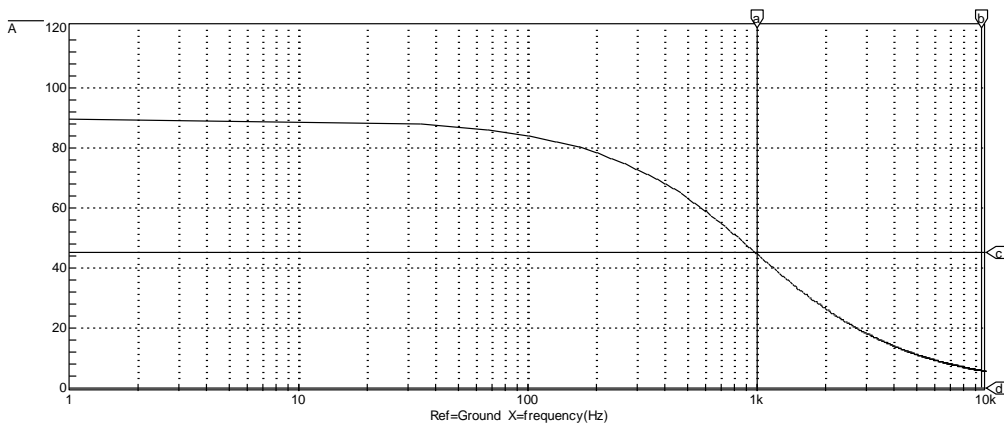
## Ασκήσεις



Xa: 1.001k    Xb: 10.00k    a-b: 8.999k  
Yc: 40.04    Yd: 36.96    c-d: 3.080



Xa: 1.000k    Xb: 9.529k    a-b: 8.529k  
Yc: 45.20    Yd: 0.000    c-d: 45.20



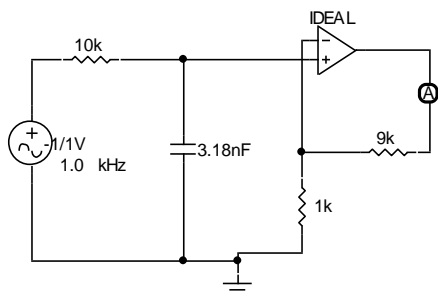
### Άσκηση 6

Το μέτρο της σύνθετης αντίστασης του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση  $|Z_C| = \frac{1}{\omega C}$ . Είναι αντιστρόφως ανάλογο της συχνότητας. Αν η συχνότητα γίνει  $10^6$  φορές μεγαλύτερη, τότε η αντίσταση θα γίνει  $10^6$  φορές μικρότερη, δηλαδή  $0,01 \Omega!$  (έχει γίνει βραχυκύκλωμα)

### Άσκηση 7

A) Ενεργό, βαθυπερατό.

$$B) f_C = 5\text{KHz} \Rightarrow \frac{1}{2\pi RC} = 5000 \Rightarrow RC = 3,18 \cdot 10^{-5} \Rightarrow R = 10\text{K}\Omega, C = 3,18\text{nF}$$



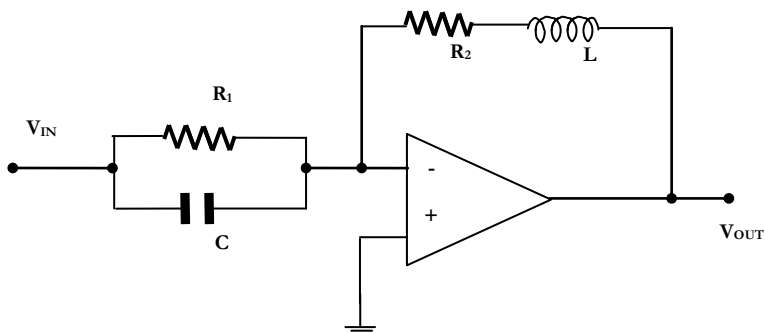
$$Γ) \left| \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} \right| = \frac{10}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{5}\right)^2}} \Rightarrow 10^2 = 1 + \left(\frac{f}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{f}{5}\right)^2 \approx 10^2 \Rightarrow f = 50\text{KHz}$$

Δ) Στα 50 KHz το κέρδος είναι 0 dB. Στα 500 KHz (10πλασιασμός συχνότητας) το κέρδος είναι -20 dB εφόσον είναι 1ης τάξης. Στο 1GHz (διπλασιασμός), το κέρδος είναι -26 dB. Επομένως, για συχνότητες μεγαλύτερες από 1 GHz.

$$E) V_{in} = 10 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot 10^4 \cdot t) + 100 \cdot \sin(\pi \cdot 10^6 \cdot t) + 5 \cdot \sin(\pi \cdot 10^5 \cdot t) \quad (10\%)$$

### Γ) Ασκήσεις για Εξάσκηση

1) Να σχεδιαστεί φίλτρο με κέρδος τουλάχιστον 10 dB για συχνότητες κάτω από 1 KHz. Σε υψηλές συχνότητες η κλίση να είναι τουλάχιστον -30dB/δεκάδα.



2) Στο προηγούμενο κύκλωμα, ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός, δηλαδή το ρεύμα εισόδου θεωρείται μηδενικό και οι ακροδέκτες εισόδου έχουν το ίδιο δυναμικό.

A) Για το κύκλωμα του σχήματος, να αποδειχθεί ότι η τάση εξόδου είναι  $V_0(t) = -\frac{R_2}{R_1} V_i(t) - \left( R_2 C + \frac{L}{R_1} \right) \frac{dV_i(t)}{dt} - LC \frac{d^2 V_i(t)}{dt^2}$

B) Σχεδιάστε κύκλωμα τελεστικού ενισχυτή που αν έχει είσοδο απόσταση, η έξοδος να είναι ταχύτητα.

3) Το μέτρο της σύνθετης αντίστασης ενός πηνίου είναι  $10 \Omega$  για τη συχνότητα  $10 \text{ KHz}$ . Να βρεθεί το μέτρο της σύνθετης αντίστασης του για τη συχνότητα της ΔΕΗ.

4) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος

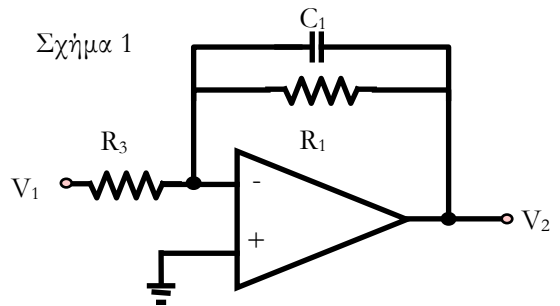
Αποδείξτε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του, είναι

$$A_V = -A_{V0} \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$

$$A_{V0} = \frac{R_1}{R_3} \quad \omega_0 = \frac{1}{R_1 C_1}$$

όπου

(Θεωρήστε ότι ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός, δηλαδή το ρεύμα εισόδου είναι μηδενικό και οι δύο εισοδοί έχουν το ίδιο δυναμικό).



5) Διαθέτουμε ενισχυτή ο οποίος ενισχύει σήμα  $1 \text{ KHz}$ . Το φορτίο του ενισχυτή μοντελοποιείται σαν μια αντίσταση  $50 \text{ K}\Omega$ . Στην έξοδο του ενισχυτή παρουσιάζεται σημαντικό ποσοστό θορύβου στα  $60 \text{ Hz}$ . Επιθυμούμε να μειώσουμε την επίδραση του θορύβου στο  $1/10$ . Γι' αυτό το λόγο, τοποθετούμε ένα παθητικό φίλτρο πρώτης τάξης μεταξύ του ενισχυτή και του φορτίου. Να σχεδιαστεί αυτό το φίλτρο. Θα μπορούσε αυτό το φίλτρο να επηρεάσει το σήμα του  $1 \text{ KHz}$  για το οποίο ενδιαφερόμαστε; Αν ναι, σε τι ποσοστό;

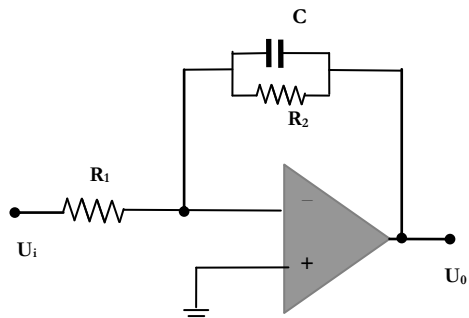
6) Ο επιλογέας συχνοτήτων ενός δέκτη FM (ράδιο στα FM) απαιτεί τη χρήση ενός ζωνοπερατού φίλτρου με κεντρική συχνότητα  $100 \text{ MHz}$  (συχνότητα ενός σταθμού FM) και εύρος ζώνης  $2 \text{ MHz}$ . (α) Να σχεδιαστεί το φίλτρο. (β) Ποιες είναι οι συχνότητες αποκοπής;

7) Μια τηλεφωνική γραμμή μεταφέρει και σήματα φωνής (ζώνη  $0-4 \text{ kHz}$ ) και δεδομένων (ζώνη  $25 \text{ kHz} - 1 \text{ MHz}$ ). Να σχεδιαστεί φίλτρο που να επιτρέπει τη διέλευση σημάτων φωνής και να απορρίπτει τα σήματα δεδομένων. Το φίλτρο πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες προδιαγραφές: α) Για τη ζώνη φωνής, η μεταβολή της συνάρτησης μεταφοράς

πρέπει να είναι το πολύ 1 dB και β) Η συνάρτηση μεταφοράς πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη στα 25 KHz, το κάτω άκρο της ζώνης δεδομένων.

8) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος. Ο τελεστικός ενισχυτής θεωρείται ιδανικός.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος συναρτήσει της  $\omega$ . Στη συνέχεια να βρεθεί παραμετρικά το μέτρο και η φάση αυτής. Να χαρακτηριστεί το κύκλωμα.



β) Θεωρώντας ότι  $R=1K\Omega$ , να επιλεγούν οι τιμές των υπόλοιπων παθητικών στοιχείων του κυκλώματος, ώστε το μέγιστο κέρδος του κυκλώματος να είναι 20 dB και η συχνότητα αποκοπής 16 KHz. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Bode του μέτρου για τις συγκεκριμένες τιμές των στοιχείων, στο οποίο να φαίνονται οι συχνότητες 16 KHz, 160 KHz, 320 KHz και 1,6 MHz.

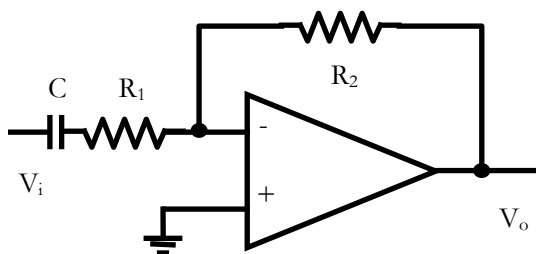
γ) Να βρεθεί η απόκριση του κυκλώματος για είσοδο:

(i) ημιτονικό σήμα πλάτους 1mV και περιόδου 628  $\mu$ s. (ii) ημιτονικό σήμα πλάτους 1 mV και περιόδου 1 ms.

δ) Για είσοδο  $V_i(t)=\eta\mu(10t)$  η έξοδος είναι  $V_o(t)=x\eta\mu(10t)+0,05\eta\mu(20t)+0,01\eta\mu(30t)$ . Να βρεθεί το x.

9) Δίνεται το κύκλωμα του διπλανού σχήματος.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος  $H(j\omega)$  συναρτήσει των στοιχείων C,  $R_1$ ,  $R_2$ . Να βρεθεί το μέτρο και η φάση της συνάρτησης μεταφοράς, συναρτήσει των  $\omega$ , C,  $R_1$ ,  $R_2$ . Ο τελεστικός ενισχυτής θεωρείται ιδανικός.



β) Να βρεθεί το κέρδος υψηλών και χαμηλών συχνοτήτων και να αποδειχθεί ότι η συχνότητα αποκοπής είναι

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

γ) Να βρεθούν οι τιμές των C,  $R_1$ ,  $R_2$  έτσι ώστε η συχνότητα αποκοπής να είναι 10 KHz και η ισχύς του σήματος δεδομένων να ενισχύεται κατά τουλάχιστον 10 dB.

δ) Να υπολογιστεί το μέτρο και η φάση της συνάρτησης μεταφοράς (που έχουν βρεθεί στο α ερώτημα), συναρτήσει της συχνότητας  $f$  για τις συχνότητες 2 kHz, 4 kHz, 5 kHz, 10 kHz, 20 kHz, 30 kHz. Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα Bode μέτρου (σε dB) και φάσης (σε degrees) στις παραπάνω συχνότητες. Πόσα dB εξασθένηση έχει το σήμα της ΔΕΗ;

## Ασκήσεις από το Κεφάλαιο 7

### A) Ασκήσεις για Εξάσκηση

1) Ενισχυτής με ανάδραση έχει κέρδος ανοικτού βρόχου  $A_V(s) = \frac{10^3}{\left(1 + \frac{s}{10^4}\right)^3}$ .

Ο συντελεστής ανάδρασης  $\beta$  είναι ανεξάρτητος της συχνότητας.

A) Να βρεθεί η συχνότητα  $\omega_0$  στην οποία η φάση του  $A_V$  είναι  $180^\circ$ .

B) Στη συνέχεια να υπολογιστεί η τιμή  $\beta_0$  του συντελεστή ανάδρασης  $\beta$  για την οποία έχουμε μετάβαση από ευσταθή σε ασταθή λειτουργία. Τι συμβαίνει όταν  $\beta = \beta_0$ ;

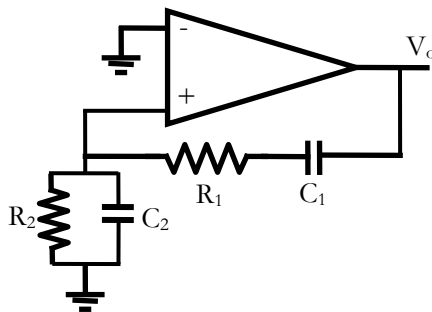
Γ) Ποιο θα είναι το κέρδος κλειστού βρόχου αν  $\beta = 0,0008$ ;

2) Να σχεδιαστεί ταλαντωτής με συχνότητα ταλάντωσης 10 KHz.

3) Ένας ενισχυτής χωρίς ανάδραση έχει μέγιστο κέρδος  $A=1000$ . Για ενίσχυση 3dB μικρότερη της μέγιστης οι συχνότητες αποκοπής είναι  $f_L=100\text{Hz}$  και  $f_H=1000\text{KHz}$ . Ο ενισχυτής όταν εργάζεται με ανάδραση έχει  $A_f=100$ . Να βρεθούν οι νέες συχνότητες αποκοπής και το εύρος ζώνης.

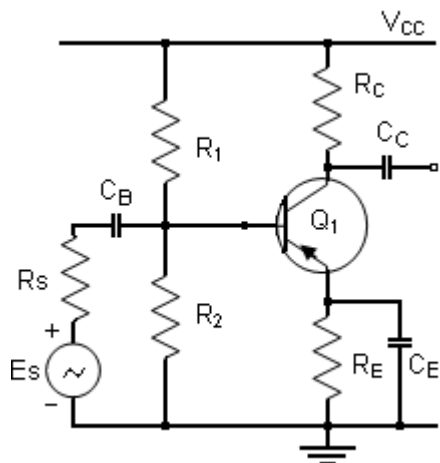
4) Ποιο κύκλωμα θα συνδέσουμε στην έξοδο ενός ταλαντωτή προκειμένου να «οδηγήσει» το σήμα σε άλλα κυκλώματα;

5) Δίνεται το κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Ποια η τιμή του  $A$  ώστε το κύκλωμα να λειτουργεί ως ταλαντωτής; Να βρεθεί η  $\omega_0$ . Δίνεται  $R_1=R_2=R$  και  $C_1=C_2=C$



## Β) Παραδείγματα με Αναλυτικές Λύσεις

1) Παράδειγμα ανάδρασης στη βάση BJT συνδεσμολογίας κοινού εκπομπού



Στο κύκλωμα του ενισχυτή του παρακάτω σχήματος δίδονται:

$$\begin{aligned} h_f &= 40 \\ h_i &= 10\text{K}\Omega \\ h_o &= 0 \\ h_r &= 0 \\ R_c &= 1,2\text{K}\Omega \\ R_E &= 1\text{K}\Omega \\ R_1 &= 30\text{K}\Omega \\ R_2 &= 15\text{K}\Omega \\ R_s &= 0 \\ C_i &= 10\text{nF} \\ C_B &= C_C = C_E = 10\mu \end{aligned}$$

Α) Εξηγήστε το ρόλο της αντίστασης  $R_E$  και του πυκνωτή  $C_E$  για το DC και το AC. Ποια θα πρέπει να είναι, κατά την εκτίμησή σας, η τιμή του πυκνωτή  $C_E$  σε σχέση με την αντίσταση  $R_E$ .

Β) Να σχεδιαστεί το AC υβριδικό ισοδύναμο κύκλωμα ( $f \gg 1,6\text{KHz}$ ), για δύο περιπτώσεις: (i) Χωρίς αντίσταση πόλωσης της βάσης και (ii) Με αντίσταση πόλωσης της βάσης. Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι το κέρδος ρεύματος είναι:

$$\text{Χωρίς αντίσταση πόλωσης βάσης} \quad A = \frac{A_0}{1 + j\frac{f}{f_0}} \quad \text{όπου} \quad A_0 = h_f \text{ και } f_0 = \frac{1}{2\pi h_i C_i}$$

$$\text{Με αντίσταση πόλωσης βάσης} \quad A' = \frac{A_0'}{1 + j\frac{f}{f_0'}} \quad \text{όπου} \quad A_0' = \frac{h_f R_{TH}}{h_i + R_{TH}} \text{ και } f_0' = \frac{h_i + R_{TH}}{2\pi h_i C_i R_{TH}}$$

και τέλος, αφού βρεθούν αριθμητικές τιμές, να σχεδιαστούν τα διαγράμματα κέρδους συναρτήσει της συχνότητας. Τι παρατηρείτε;

Γ) Θεωρούμε τις αντιστάσεις πώλωσης της βάσης ως κύκλωμα ανάδρασης. (i) Να βρεθεί ο συντελεστής ανάδρασης  $\beta_1$ . (ii) Για  $\beta_2 = -\beta_1$  τι θα συμβεί στο κύκλωμα; (iii) Αν υποτριπλασιάσουμε τις  $R_1$  και  $R_2$  να βρεθούν αριθμητικά: ο νέος συντελεστής ανάδρασης  $\beta_3$ , το νέο κέρδος χαμηλών συχνοτήτων  $A_{03}$  και η νέα συχνότητα αποκοπής  $f_{03}$ .

Δ) Έστω σήμα  $i_{in}(t) = 0,1 \cos(10^5 t)$  εισέρχεται στην είσοδο του ενισχυτή. Το σήμα εξόδου είναι

$$i_{out}(t) = x \cos\left(10^5 t + \frac{3\pi}{4}\right) + 0,05 \cos\left(2 \cdot 10^5 t + \frac{3\pi}{4}\right) + 0,02 \cos\left(3 \cdot 10^5 t + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Να βρεθεί το  $x$  και ο συνολικός συντελεστής αρμονικής παραμόρφωσης.

Υποδείξεις

Αποδεικνύεται ότι για συχνότητες  $f > 1,6$  KHz θεωρούμε τον εκπομπό γειωμένο.

Σε υψηλές συχνότητες η τιμή του  $h_f$  δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται - μεταξύ άλλων και - από την τιμή του πυκνωτή  $C_i$  (ο οποίος είναι παράλληλα συνδεδεμένος στην εσωτερική αντίσταση εισόδου):

$$h_f(\omega) = \frac{h_f}{1 + j\omega C_i h_i}$$

$$\text{Ισχύει } A_f = \frac{A}{1 - \beta A} \text{ και } \text{THD} = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + \dots}}{V_1}$$

$$\text{Θεωρείστε } \frac{10}{2\pi} \cong 1,6 \text{ και } \sqrt{26} \cong 5$$

ΛΥΣΗ:

**A)** Η τιμή της αντίστασης του πυκνωτή είναι  $|Z_C| = \frac{1}{\omega C}$

Στο DC ( $\omega=0$ ), η αντίστασή του είναι άπειρη, και επομένως τον αγνοούμε θεωρώντας τον ανοικτόκύκλωμα. Επομένως, στο DC υπάρχει μόνο η αντίσταση  $R_E$  η οποία παίζει το ρόλο του κυκλώματος ανάδρασης, και μάλιστα αρνητικής ανάδρασης (δηλαδή μειώνει το κέρδος). Μέρος της τάσης εξόδου ( $V_C = V_{CE} + V_E$ ), το  $V_E$ , ανατροφοδοτείται στην είσοδο (προστίθεται στην τάση εισόδου και επομένως το σήμα εισόδου γίνεται από μικρό, μεγάλο). Χωρίς την  $R_E$  η είσοδος είναι  $V_{BE}$  ενώ με την ανάδραση, η τάση εισόδου γίνεται  $V_B = V_{BE} + V_E$  (μεγάλο σήμα σε σχέση με το αρχικό  $V_{BE}$ ). Ο

συντελεστής ανάδρασης είναι  $\beta = \frac{V_E}{V_C}$ . Αποδείχθηκε ότι η ανάδραση στον εκπομπό

είναι ανάδραση τάσης.

Στο AC, σε πολύ υψηλές συχνότητες ο πυκνωτής έχει μηδενική αντίσταση και επομένως θεωρείται βραχυκύκλωμα. Παράλληλος συνδυασμός αντιστάσεων δίνει συνολική αντίσταση με τιμή πολύ κοντά στην τιμή της μικτότερης αντίστασης. Το ρεύμα



περνάει από τη μηδενική αντίσταση, δηλαδή από το βραχυκύκλωμα και η αντίσταση  $R_E$  αγνοείται. Ο εκπομπός γειώνεται.

Στο AC, σε μεσαίες συχνότητες, ο παράλληλος συνδυασμός των  $R_E$  και  $C_E$  δίνει

$$\text{μια συνολική αντίσταση } Z_E \approx \frac{R_E}{1 + \omega R_E C_E}.$$

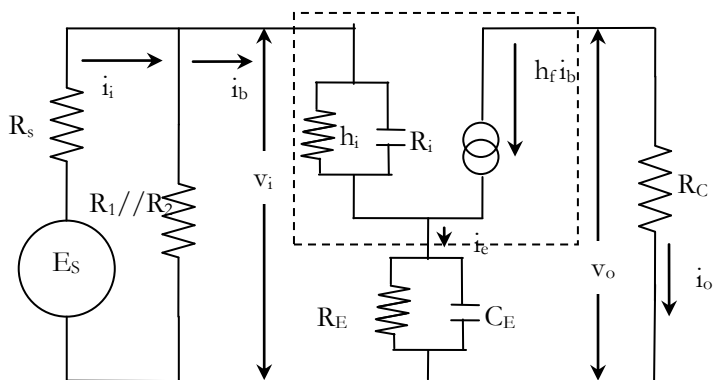
1η παρατήρηση: Αν  $f \gg 1,6\text{KHz}$  τότε  $|Z_C| \ll \frac{1}{2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^3 \cdot C} = \frac{1}{10^4 C}$

2η παρατήρηση: Αν  $\frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} \ll R_E \Rightarrow C \gg \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot R_E}$  τότε μπορούμε να

γειώσουμε τον εκπομπό. Για παράδειγμα, για συχνότητα 1,6 KHz και τη δεδομένη  $R_E=1\text{K}\Omega$ , για να γειωθεί ο εκπομπός (να γίνει βραχυκύκλωμα η χωρητικότητα), θα πρέπει  $C_E \gg 0,1\mu\text{F}$ .

**B)** Αν  $f \gg 1,6\text{KHz}$  και  $Z_E \approx \frac{R_E}{1 + \omega R_E C_E} = \frac{1000}{1 + 2\pi f 10^{-2}}$  τότε  $Z_E \ll 10\Omega$

Το υβριδικό ισοδύναμο του κυκλώματος, χωρίς καμία προσέγγιση είναι το ακόλουθο.

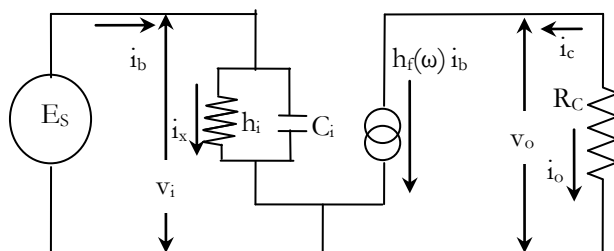


$$Z_i \approx \frac{R_i}{1 + \omega h_i C_i} = \frac{10^4}{1 + \omega 10^{-4}}$$

Δεδομένου ότι  $f \gg 1,6\text{KHz}$  προκύπτει  $Z_i \ll \frac{10^4}{1 + 2\pi 1,610^{-1}} \approx 1\text{K}\Omega$

Θεωρώντας όμως ότι  $Z_E \ll 10\Omega$ , μπορούμε να γειώσουμε τον εκπομπό και τα αντίστοιχα υβριδικά που ζητούνται είναι:

(i) Χωρίς αντίσταση πόλωσης της βάσης



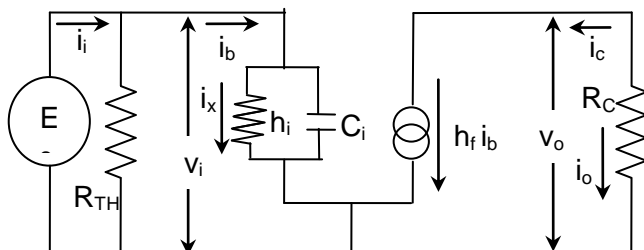
Ορισμοί: Κέρδος ρεύματος με  $C_i$ :  $h_f(\omega) = \frac{i_o}{i_b}$ , Κέρδος ρεύματος χωρίς  $C_i$ :  $h_f = \frac{i_o}{i_x}$

όπου το  $i_x$  είναι το ρεύμα που περνάει από την  $h_i$ . Διαιρώντας κατά μέλη αυτούς του δύο ορισμούς, προκύπτει ο ακόλουθος λόγος ρευμάτων στον οποίο εφαρμόζουμε διαιρέτη ρεύματος.

$$\frac{h_f(\omega)}{h_f} = \frac{i_x}{i_b} = \frac{\frac{1}{h_i}}{\frac{1}{h_i} + j\omega C_i} = \frac{1}{1 + j\omega h_i C_i} \Rightarrow h_f(\omega) = \frac{h_f}{1 + j\omega h_i C_i} \quad (1)$$

$$A_f = \frac{i_o}{i_b} = -\frac{h_f(\omega) i_b}{i_b} = -h_f(\omega) = -\frac{h_{fe}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{C1}}} \quad \text{με } \omega_{C1} = \frac{1}{h_i C_i}$$

(ii) Με αντίσταση πόλωσης της βάσης



Το ρεύμα εξόδου  $i_o$  ισούται με το  $i_c$  σύμφωνα με τον νόμο ρευμάτων του Κ. στον κόμβο του εκπομπού. Μέρος του ρεύματος εξόδου ( $i_b$  και  $i_o$ ), μόνο το  $i_b$  επιστρέφει στην είσοδο και επομένως η ανάδραση στη βάση είναι ανάδραση ρεύματος. Ο συντελεστής ανάδρασης ισούται με το ρεύμα που επιστρέφει προς το ρεύμα εξόδου  $i_b/i_o$

Διαιρέτης ρεύματος στην είσοδο του κυκλώματος

$$\frac{i_b}{i_i} = \frac{\frac{1}{h_i} + j\omega C}{\frac{1}{R_{TH}} + \frac{1}{h_i} + j\omega C} = \frac{(1 + j\omega h_i C_i) R_{TH}}{h_i + R_{TH} + j\omega h_i R_{TH} C_i} = \frac{(1 + j\omega h_i C_i) \frac{R_{TH}}{h_i + R_{TH}}}{1 + j\omega h_i \frac{R_{TH}}{h_i + R_{TH}} C_i} \quad (2)$$

Ορισμοί: Κέρδος ρεύματος με  $C_i$ :  $h_f(\omega) = \frac{i_o}{i_b}$ , Κέρδος ρεύματος χωρίς  $C_i$ :  $h_f = \frac{i_o}{i_x}$

όπου το  $i_x$  είναι το ρεύμα που περνάει από την  $h_i$ . Διαιρώντας κατά μέλη αυτούς τους δύο ορισμούς, προκύπτει ο ακόλουθος λόγος ρευμάτων στον οποίο εφαρμόζουμε πάλι διαιρέτη ρεύματος.

$$\frac{h_f(\omega)}{h_f} = \frac{i_x}{i_b} = \frac{\frac{1}{h_i}}{\frac{1}{h_i} + j\omega C_i} = \frac{1}{1 + j\omega h_i C_i} \Rightarrow h_f(\omega) = \frac{h_f}{1 + j\omega h_i C_i} \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2) και (3) έχουμε το κέρδος ρεύματος

$$A_{jf} = \frac{i_o}{i_i} = -\frac{h_f(\omega) i_b}{i_i} = -\frac{h_f}{1 + j\omega h_i C_i} \cdot \frac{(1 + j\omega h_i C_i) \frac{R_{TH}}{h_i + R_{TH}}}{1 + j\omega h_i \frac{R_{TH}}{h_i + R_{TH}} C_i} = -\frac{h_f \frac{R_{TH}}{h_i + R_{TH}}}{1 + j\omega h_i \frac{R_{TH}}{h_i + R_{TH}} C_i}$$

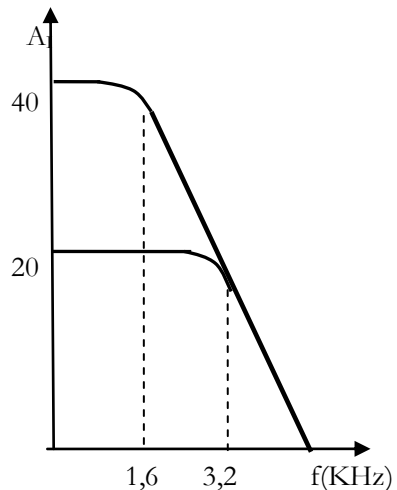
$$A_{jf} = -\frac{A_{I0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{όπου} \quad A_{I0} = h_f \frac{R_{TH}}{h_i + R_{TH}}$$

$$\omega_c = \frac{h_i + R_{TH}}{h_i R_{TH} C_i}$$

Οι αριθμητικές τιμές βρίσκονται από τα δεδομένα (χωρίς όλη την προηγούμενη ανάλυση):  
 $R_{TH} = R_1 // R_2 = 10 \text{ K}\Omega$

Χωρίς  $R_{TH}$ :  $A_I = -\frac{h_{fe}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{C1}}} = -\frac{40}{1 + j\frac{f}{f_{C1}}}$

με



$$f_{c1} = \frac{1}{2\pi h_i C_i} = 1,6 \text{ KHz}$$

Με  $R_{TH}$ :  $A_f = - \frac{A_{I0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{c2}}}$  με

$$A_{I0} = h_f \frac{R_{TH}}{h_i + R_{TH}} = 20 \text{ και } f_{c2} = \frac{h_i + R_{TH}}{2\pi h_i R_{TH} C_i} = 3,2 \text{ KHz}$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο μέγιστου κέρδους επί εύρος ζώνης είναι σταθερό. Επομένως, η συχνότητα μεταβάσεως είναι 64 KHz.

**Γ) (i)** Έχουμε αποδείξει ότι τα μέγιστα κέρδη είναι  $A_f = -20$   $A = -40$

Ισχύει

$$A_f = \frac{A}{1 - \beta_1 A} \Rightarrow -20 = \frac{-40}{1 + \beta_1 40} \Rightarrow \beta_1 = 0,025$$

**(ii)** Αν  $\beta_2 = -0,025 \Rightarrow \beta_2 A = 1 \Rightarrow$  Το κύκλωμα θα αρχίσει ταλαντώσεις

**(iii)** Αν υποτριπλασιάσουμε τις  $R_1$  και  $R_2$  η νέα  $R_{TH}$  που ήταν 10 ΚΩ, θα υποτριπλασιαστεί και το νέο μέγιστο κέρδος θα γίνει

$$A_{I0} = h_f \frac{R_{TH}/3}{h_i + R_{TH}/3} = 10$$

Η νέα συχνότητα αποκοπής θα γίνει

$$f_{c3} = \frac{h_i + R_{TH}}{2\pi \cdot h_i R_{TH} C_i} = \frac{10 + 10/3}{2 \cdot \pi \cdot 10^{10}/3 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 6,4 \text{ KHz}$$

Πάλι το γινόμενο

ισούται με 64KHz

$$-10 = \frac{-40}{1 + \beta_3 40} \Rightarrow \beta_3 = 0,075$$

**Δ)** Η συχνότητα είναι  $\omega=10^5$  ή  $f=16\text{KHz}$  και το κέρδος γι' αυτή τη συχνότητα είναι

$$\left| A_f \right| = \left| - \frac{20}{1 + j \frac{f}{6,4}} \right| = \frac{20}{\sqrt{1 + \left( \frac{f}{3,2} \right)^2}} = \frac{20}{\sqrt{26}} = 4$$

Άρα η ενίσχυση της θεμελιώδους είναι

4 και το πλάτος της είναι  $x=0,4$  στο σήμα εξόδου.

Το ποσοστό της ολικής αρμονικής παραμόρφωσης είναι:

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{0,05^2 + 0,02^2}}{0,4} = 13,5\%$$

2) Παράδειγμα Ανάδρασης στον εκπομπό και στη βάση

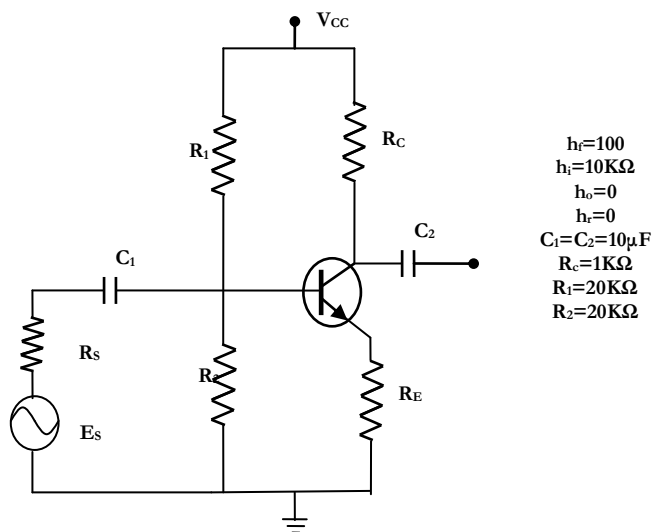
Για το κύκλωμα του σχήματος, η εσωτερική αντίσταση της γεννήτριας  $R_s$  θεωρείται αμελητέα και οι εσωτερικές χωρητικότητες του τρανζίστορ αγνοούνται.

A) Να βρεθεί αριθμητικά το κέρδος ρεύματος  $A$ , χωρίς την  $R_E$  (γείώστε τον εκπομπό).

B) Να βρεθεί παραμετρικά το κέρδος ρεύματος  $A_f$  με την αντίσταση  $R_E$ .

Γ) Να βρεθεί η τιμή της αντίστασης  $R_E$  έτσι ώστε το κέρδος ρεύματος (μέτρο) να είναι 10 dB.

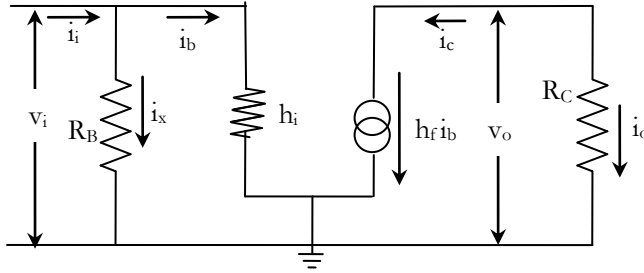
Δ) Να βρεθεί ο συντελεστής ανάδρασης ρεύματος  $\beta$ .



ΛΥΣΗ:

A) Χωρίς  $R_E$ :

Το ισοδύναμο υβριδικό κύκλωμα είναι το ακόλουθο, όπου  $R_B = R_1 // R_2 = 10\text{K}\Omega$



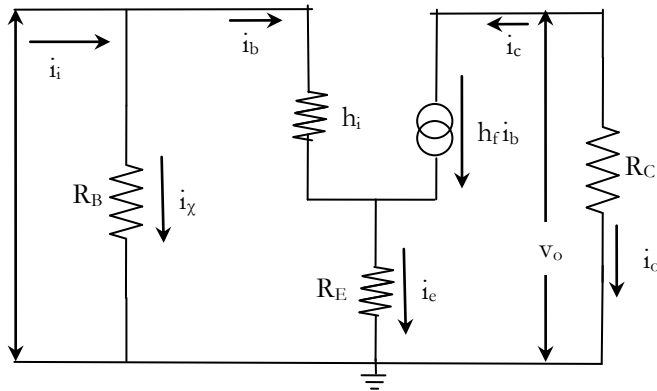
Στον κόμβο εισόδου μπορούμε να εφαρμόσουμε διαιρέτη ρεύματος αφού στις αντιστάσεις  $R_B$  και  $h_i$  εφαρμόζεται το ίδιο δυναμικό.

$$A = \frac{i_o}{i_i} = \frac{i_o}{i_b} \cdot \frac{i_b}{i_i} - \frac{h_f i_b}{i_b} \cdot \frac{i_b}{i_i} = -h_f \cdot \frac{\frac{1}{h_i}}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{R_B}} = -h_f \cdot \frac{R_B}{R_B + h_i} = -100 \cdot \frac{10}{10+10} = -50$$

(1)

**B) Με  $R_E$ :**

Το ισοδύναμο υβριδικό κύκλωμα είναι το ακόλουθο.



Στον κόμβο εισόδου (της βάσης) δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε διαιρέτη ρεύματος διότι στις αντιστάσεις  $R_B$  και  $h_i$  δεν εφαρμόζεται το ίδιο δυναμικό.

Στον κόμβο εξόδου (συλλέκτη), ισχύει

$$i_o = -i_c = -h_f \cdot i_b$$

Στον κόμβο του εκπομπού ισχύει:

$$h_f \gg 1$$

$$i_b + i_c = i_e \Rightarrow i_b + h_f \cdot i_b = i_e \Rightarrow h_f \cdot i_b = i_e = i_c \quad (2)$$

Για το κέρδος ρεύματος ισχύει:

$$A_f = \frac{i_o}{i_i} \cdot \frac{i_b}{i_i} = -\frac{h_f i_b}{i_b} \cdot \frac{i_b}{i_i} \quad (3)$$

Όπου

$$i_i = i_x + i_b = \frac{v_i}{R_B} + i_b = \frac{i_b h_i + i_e R_E}{R_B} + i_b = i_b \frac{h_i}{R_B} + i_b \frac{h_f R_E}{R_B} + i_b = i_b \frac{h_i + R_B + h_f R_E}{R_B} \quad (2)$$

$$\frac{i_i}{i_b} = \frac{h_i + R_B + h_f R_E}{R_B} \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε την (4) στην (3)

$$A_f = -\frac{h_f R_B}{h_i + R_B + h_f R_E} = -\frac{10^4}{2 \cdot 10^2 + R_E} \quad (5)$$

Γ) Λύνουμε την εξίσωση  $20 \log \frac{10^4}{2 \cdot 10^2 + R_E} = 10$  και προκύπτει  $R_E = 3K$

### Δ) 1<sup>ος</sup> τρόπος

Το μέρος του ρεύματος εξόδου που αναδράται, δηλαδή που προστίθεται στο μικρό σήμα εισόδου για να το κάνει μεγάλο, είναι το  $i_x$ . Το ρεύμα εξόδου είναι  $i_o = -i_c = -h_f \cdot i_b$ . Είναι προφανές ότι η ανάδραση που επιρραεύει το κέρδος ρεύματος είναι η ανάδραση στη βάση. Η ανάδραση στον εκπομπό δεν αλλάζει το ρεύμα εισόδου  $i_i$ . Η ανάδραση στον εκπομπό επιρραεύει το κέρδος τάσης αφού προστίθεται μέρος της τάσης εξόδου στην είσοδο. Επομένως, το κέρδος ρεύματος λόγω της ανάδρασης στον εκπομπό ΔΕΝ αλλάζει και ο συντελεστής ανάδρασης είναι 0. Το κέρδος ρεύματος λόγω της ανάδρασης στη βάση, μικραίνει όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (1) και (5)

$$A_f = \frac{i_o}{i_i} = \frac{i_o}{i_x + i_b} = \frac{\frac{i_o}{i_b}}{\frac{i_x}{i_b} + 1} = \frac{A}{1 + \frac{i_x}{i_b}} = \frac{A}{1 + \frac{i_x}{i_o} \cdot \frac{i_o}{i_b}} = \frac{A}{1 + \frac{i_x}{i_o} \cdot A} = \frac{A}{1 + \beta \cdot A}$$

$$\beta = \frac{i_x}{i_o} = \frac{v_i}{-i_c} = -\frac{i_b h_i + i_e R_E}{R_B i_c} = -\frac{i_b h_i}{R_B h_f i_b} - \frac{i_e R_E}{R_B i_e} = -\frac{h_i + h_f R_E}{h_f R_B} = -0,31$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Θα προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε την (5) ώστε να προκύψει μέσα στην εξίσωση η (1):

$$A = -\frac{h_f \cdot R_B}{R_B + h_i}$$

$$A_f = -\frac{h_f R_B}{h_i + R_B + h_f R_E} = \frac{-\frac{h_f R_B}{h_i + R_B}}{1 + \frac{h_f R_E}{h_i + R_B}} = \frac{A}{1 + \frac{h_f R_E}{h_i + R_B} \cdot \frac{R_B}{R_B}}$$

(5):

$$\frac{A}{1 + \frac{h_f R_B}{h_i + R_B} \cdot \frac{R_E}{R_B}} = \frac{A}{1 + \left(-\frac{h_f R_B}{h_i + R_B}\right) \cdot \left(-\frac{R_E}{R_B}\right)}$$

$$A_f = \frac{A}{1 + A \cdot \left(-\frac{R_E}{R_B}\right)} = \frac{A}{1 + \beta \cdot A}$$

$$\beta = -\frac{R_E}{R_B} = -0,3$$

**Ασκήσεις από το Κεφάλαιο 8**

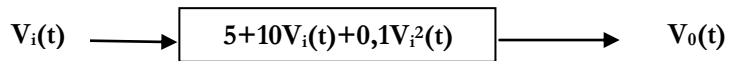
1) Η είσοδος σε έναν ενισχυτή είναι  $v_{in}(t) = 0.1\cos(3000\pi t)$  και η αντίστοιχη έξοδος είναι  $v_o(t) = 10\cos(3000\pi t) + 0.3\cos(6000\pi t) + 0.1\cos(9000\pi t)$ . Να καθοριστούν οι συντελεστές παραμόρφωσης  $D_2$ ,  $D_3$  και  $D_4$ . Επίσης, να υπολογιστεί το ποσοστό της ολικής αρμονικής παραμόρφωσης.

2) Η συνάρτηση μεταφοράς ενός ενισχυτή περιγράφεται από την εξίσωση  $v_o(t) = 10v_{in}(t) + 0.8v_{in}^2(t) + 0.5v_{in}^3(t)$ . Για είσοδο  $v_{in}(t) = 3\cos(250\pi t)$  να καθοριστούν οι συντελεστές παραμόρφωσης  $D_2$ ,  $D_3$  και  $D_4$ . Επίσης να υπολογιστεί το ποσοστό της ολικής αρμονικής παραμόρφωσης. Υπενθύμιση:  $4\cos^3(x) = 3\cos(x) + \cos(3x)$ .



3) Η συνάρτηση μεταφοράς ενός ενισχυτή περιγράφεται από την εξίσωση  $v_0(t) = v_{in}(t) + 0.2v_{in}^2(t)$ . Για είσοδο  $v_{in}(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$ , να καθοριστεί η συχνότητα και το πλάτος κάθε συνιστώσας του σήματος εξόδου. Υπενθύμιση:  $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$

4) Ένα μη γραμμικό σύστημα υπακούει το νόμο του τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σήμα εισόδου είναι ένα συνημίτονο πλάτους 10 mV και περιόδου 1ms. Να βρεθεί το ποσοστό της αρμονικής παραμόρφωσης του σήματος εξόδου.





# Ευερετήριο Όρων

- AC σήμα, 3, 26
- band pass, 30
- band reject, 31
- band stop, 31
- bandwidth, 63
- clipping, 127
- crossover distortion, 131
- dBm, 19
- DC σήμα, 3, 26
- decibel (dB), 18
- distortion, 125
- feedback, 107
- gain, 41
- high pass, 30
- hum, 131
- limiting, 131
- linear detector, 151
- loss, 42
- low pass, 29
- matlab, 36, 39, 106
- narrow band pass, 32
- narrow band stop, 32
- narrowband filter, 68
- noise, 131
- overdriving, 127
- passband, 26
- passband edge frequency, 27
- Push-Pull, 132
- RF σήμα, 2
- RF σήματα, 26
- roll-off, 42
- stop band rejection, 27
- stopband, 26
- stopband edge frequency, 27
- wideband filter, 68
- αθροιστής, 88, 90
- ακραία συχνότητα ζώνης αποκοπής, 27
- ακραία συχνότητα ζώνης διέλευσης, 27
- ανάδραση, 107
- αναστρέφουσα συνδεσμολογία, 88, 95
- Ανιχνευτής Περιβάλλουσας, 151
- αντίσταση εξόδου, 55
- άνω συχνότητα αποκοπής, 68
- απόκριση συχνότητας, 4
- απολαβή, 27
- απώλειες, 42
- αρμονικές, 3, 128
- αρμονική παραμόρφωση, 132
- βαθυπερατό φίλτρο 1<sup>ης</sup> τάξης, 59
- βαθυπερατό φίλτρο 2<sup>ης</sup> τάξης, 63, 64
- βόμβος, 131
- γεωμετρικός μέσος, 70
- γραμμικός φωρατής, 151
- δεκάδα, 42
- δέκτης, 150, 153
- διαιρέτης ρεύματος, 11
- διαιρέτης τάσης, 11
- διαμόρφωση, 142
- διαφοριστής, 88
- ελλειπτικό φίλτρο, 39
- ενεργά φίλτρα, 29
- ενεργό στοιχείο, 26
- εύρος ζώνης, 63, 70, 71, 98
- ζώνη αποκοπής, 26
- ζώνη διέλευσης, 26
- ζωνοπερατό φίλτρο 2<sup>ης</sup> τάξης, 74
- θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος, 15
- θόρυβος, 30, 131
- ιδανικό φίλτρο, 27
- κάτω συχνότητα αποκοπής, 68
- κεντρική συχνότητα, 62, 68, 70, 71, 98
- κεντρική συχνότητας, 98

---

κέρδος, 41  
κλίση, 42, 59  
κρίσιμη συχνότητα αποκοπής, 17, 52  
κύκλωμα ολοκλήρωσης, 76  
κύκλωμα παραγωγής, 76  
κυμάτωση, 27, 37  
μετασχηματισμός Fourier, 2  
μετασχηματισμός Laplace, 13  
μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία, 90, 94  
μιγαδικός αριθμός, 8  
οκτάβα, 42  
ολοκληρωτής, 88  
παθητικά φίλτρα, 29  
παθητικό στοιχείο, 25  
παραμόρφωση, 28  
παραμόρφωση μη-γραμμικότητας, 128  
παραμόρφωση συχνότητας, 128  
παραμόρφωση φάσης, 129  
παραμόρφωση, 125  
πολλαπλασιαστής, 89  
πολυώνυμα Butterworth, 33  
πολυώνυμο Chebyshev, 35, 37  
πόλωση, 127  
πομπός, 19, 145, 151  
προσαρμογή, 55  
συνάρτηση μεταφοράς, 21  
σύνθετη αντίσταση πηνίου, 14  
συντελεστής THD, 133  
συντελεστής ανάδρασης, 110  
συντελεστής απόσβεσης, 63  
συντελεστής ποιότητας, 63, 68, 71, 98  
σύστημα ανοικτού βρόχου, 107  
σύστημα κλειστού βρόχου, 107  
συχνότητα αποκοπής, 27  
συχνότητες αποκοπής, 62, 70, 71  
Total Harmonic Distortion, 133  
τελεστικός ενισχυτής, 85  
υπερβολικό συνημίτονο, 35  
υψιπερατό φίλτρο 2<sup>ης</sup> τάξης, 68  
υψιπερατού φίλτρου 1<sup>ης</sup> τάξης, 67  
φάσμα συχνοτήτων, 6  
φέρων, 142  
φίλτρα Bessel, 39  
φίλτρο Butterworth, 23, 33, 103  
φίλτρο Cauer, 39  
φίλτρο Chebyshev, 35  
φίλτρο Shallen-Key, 94, 96  
φίλτρο ευρείας ζώνης, 68  
φίλτρο στενής ζώνης, 68  
φωρατής κλίσεως, 153

## Βιβλιογραφία

- [1] The Art of Electronic, Paul Horowitz, Winfield Hill, Cambridge University Press  
[2] Ολοκληρωμένη Ηλεκτρονική, J. Millman, X. Χαλκιάς, ΕΜΠ  
[3] Στοιχεία Ηλεκτρονικής τόμος ΙΙΙ (Ενισχυτάι – Ταλαντωτάι), Γ. Πρωτοπαπαδάκη, ΣΝΔ