

**ΣΧΟΛΗ Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑΣ & Η/Υ**

**ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ
και
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**Δρ. Α. ΜΑΓΟΥΛΑΣ
Επικ. Καθηγητής Σ.Ν.Δ.**

2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

| | | |
|------------|--|----|
| 1.1 | Συστήματα συντεταγμένων | 1 |
| 1.1.1 | Καρτεσιανό | 1 |
| 1.1.2 | Κυλινδρικό | 2 |
| 1.1.3 | Σφαιρικό | 2 |
| 1.1.4 | Σχέσεις μετατροπής μεταξύ των συντεταγμένων των τριών συστημάτων | 3 |
| 1.2 | Διανύσματα | 4 |
| 1.2.1 | Ορισμός διανύσματος | 4 |
| 1.2.2 | Ορισμός τανυστή | 4 |
| 1.2.3 | Πράξεις διανυσμάτων | 5 |
| 1.2.4 | Διανυσματική συνάρτηση τριών μεταβλητών | 7 |
| 1.3 | Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συναρτήσεως | 7 |
| 1.3.1 | Ορισμός επικαμπυλίου ολοκληρώματος | 7 |
| 1.3.2 | Τρόπος υπολογισμού του επικαμπυλίου ολοκληρώματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες | 8 |
| 1.4 | Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συναρτήσεως | 10 |
| 1.5 | Διανυσματικό πεδίο | 11 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

| | | |
|------------|---|----|
| 2.1 | Γενικά για την επιστήμη της Ηλεκτρολογίας | 13 |
| 2.2 | Οι πηγές του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου | 14 |
| 2.2.1 | Το ηλεκτρικό φορτίο | 14 |
| 2.2.2 | Κατανομές ηλεκτρικού φορτίου | 15 |
| 2.2.3 | Το ηλεκτρικό ρεύμα – ένταση ρεύματος | 16 |
| 2.2.4 | Πυκνότητα ρεύματος | 17 |
| 2.2.5 | Σχέσεις πυκνοτήτων ρεύματος και φορτίου | 20 |
| 2.3 | Νόμος διατήρησης του φορτίου | 22 |
| 2.4 | Βασικά μεγέθη του Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου | 23 |
| 2.4.1 | Η μέθοδος του πεδίου | 23 |
| 2.4.2 | Ηλεκτρομαγνητική δύναμη Lorentz. Ορισμός πεδίων \vec{E} και \vec{B} | 25 |
| 2.5 | Συντακτικές σχέσεις των πεδίων | 28 |
| 2.6 | Ηλεκτρική τάση – Ηλεκτρεγερτική δύναμη | 33 |
| 2.6.1 | Ηλεκτρική τάση | 33 |
| 2.6.2 | Ηλεκτρεγερτική δύναμη | 35 |
| 2.7 | Νόμος των Biot – Savart | 37 |
| 2.8 | Ασκήσεις Κεφαλαίου 2 | 38 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ LORENTZ

| | | |
|------------|---|----|
| 3.1 | Δύναμη που ασκείται σε ευθύγραμμο αγωγό μήκους L εντός πεδίου με μαγνητική επαγωγή \vec{B} | 47 |
| 3.2 | Όργανο κινητού πηνίου | 48 |
| 3.3 | Κίνηση φορτίου q σε ομογενές μαγνητοστατικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή \vec{B} | 49 |
| 3.4 | Αρχή λειτουργίας ηλεκτρικής γεννήτριας | 50 |
| 3.4.1 | Λειτουργία χωρίς φορτίο | 50 |
| 3.4.2 | Λειτουργία με φορτίο | 51 |
| 3.4.3 | Ισοζύγιο ισχύος της γεννήτριας | 53 |
| 3.5 | Αρχή λειτουργίας ηλεκτρικού κινητήρα | 54 |
| 3.5.1 | Εισαγωγικά | 54 |
| 3.5.2 | Ισοζύγιο ισχύος του ηλεκτρικού κινητήρα | 55 |
| 3.6 | Αρχή λειτουργίας ηλεκτρικής πέδης | 56 |
| 3.7 | Φαινόμενο Hall | 56 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΕΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

| | | |
|------------|---|----|
| 4.1 | Εισαγωγή | 59 |
| 4.2 | Επιφάνειες και καμπύλες στον χώρο | 60 |
| 4.3 | Διατύπωση των εξισώσεων Maxwell | 62 |
| 4.3.1 | Εισαγωγικά | 62 |
| 4.3.2 | Νόμος Faraday | 64 |
| 4.3.3 | Νόμος Ampere- Maxwell | 65 |
| 4.3.4 | Νόμος Gauss (για το ηλεκτρικό πεδίο) | 68 |
| 4.3.5 | Νόμος Gauss (για το μαγνητικό πεδίο) | 69 |
| 4.4 | Αλληλοεξάρτηση των εξισώσεων Maxwell | 70 |
| 4.5 | Εξειδίκευση των εξισώσεων Maxwell σε στατικά πεδία | 72 |
| 4.6 | Ασκήσεις Κεφαλαίου 4 | 74 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

| | | |
|------------|---|----|
| 5.1 | Εισαγωγικά | 83 |
| 5.2 | Μαγνητική ροπή – Μαγνήτιση | 83 |
| 5.3 | Συμπεριφορά των υλικών στο Μαγνητικό πεδίο | 85 |
| 5.3.1 | Διαμαγνητικά υλικά | 86 |
| 5.3.2 | Παραμαγνητικά υλικά | 86 |
| 5.3.3 | Σιδηρομαγνητικά υλικά | 86 |
| 5.4 | Εξήγηση του φαινομένου του σιδηρομαγνητισμού | 87 |
| 5.5 | Καμπύλη μαγνήτισης των σιδηρομαγνητικών υλικών | 88 |

| | | |
|------------|---|----|
| 5.6 | Βρόχος υστέρησης των σιδηρομαγνητικών υλικών | 89 |
| 5.7 | Το μαγνητικό πεδίο της Γης | 92 |
| 5.8 | Ασκήσεις Κεφαλαίου 5 | 93 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

| | | |
|------------|--|-----|
| 5.1 | Εισαγωγικά | 95 |
| 6.1.1 | Ορισμός μαγνητικού κυκλώματος | 95 |
| 6.1.2 | Παραδείγματα μαγνητικών κυκλωμάτων | 96 |
| 6.2 | Επίλυση μαγνητικών κυκλωμάτων | 97 |
| 6.2.1 | Διεγέρσεις και αποκρίσεις σε μαγνητικό κύκλωμα | 97 |
| 6.2.2 | Βασικές παραδοχές επίλυσης μαγνητικών κυκλωμάτων | 98 |
| 6.2.3 | Νόμοι επίλυσης μαγνητικών κυκλωμάτων | 99 |
| 6.3 | Εισαγωγικό παράδειγμα μαγνητικού κυκλώματος | 100 |
| 6.3.1 | Αρχική πορεία επίλυσης | 100 |
| 6.3.2 | Σκέδαση των δυναμικών γραμμών | 103 |
| 6.3.3 | Συντελεστής πλήρωσης | 103 |
| 6.4 | Αντιστοιχίες μεγεθών μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών κυκλωμάτων | 104 |
| 6.5 | Επίλυση μαγνητικού κυκλώματος μέσω του αντίστοιχου ισοδύναμου ηλεκτρικού κυκλώματος | 106 |
| 6.6 | Μη γραμμικό μαγνητικό κύκλωμα | 107 |
| 6.7 | Ασκήσεις Κεφαλαίου 6 | 108 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

| | | |
|-------------|--|-----|
| 7.1 | Εισαγωγικά | 113 |
| 7.2 | Διατύπωση του Νόμου της Επαγωγής | 114 |
| 7.3 | Ανάπτυξη Ηλεκτρεγερτικής Δύναμης εξ' Επαγωγής | 116 |
| 7.4 | Κανόνας του Lenz | 117 |
| 7.5 | Παραδείγματα Ηλεκτρομαγνητικής Επαγωγής | 118 |
| 7.5.1 | Κινούμενο ορθογώνιο πλαίσιο σε ομογενές στατικό πεδίο \vec{B} | 118 |
| 7.5.2 | Κινούμενο ορθογώνιο πλαίσιο σε μη ομογενές στατικό πεδίο \vec{B} | 120 |
| 7.5.3 | Ακίνητος βρόχος σε χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο \vec{B} | 121 |
| 7.5.4 | Ανοικτός βρόχος | 122 |
| 7.6 | Αυτεπαγωγή | 123 |
| 7.6.1 | Γενικά για το φαινόμενο της αυτεπαγωγής | 123 |
| 7.6.2 | Σπειροειδής αγωγός | 124 |
| 7.6.3 | Πηνίο N σπειρών | 125 |
| 7.7 | Αμοιβαία επαγωγή | 126 |
| 7.8 | Εφαρμογές της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής | 128 |
| 7.9 | Επιδερμικό φαινόμενο | 130 |
| 7.10 | Ασκήσεις Κεφαλαίου 7 | 132 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

| | | |
|------------|--|-----|
| 8.1 | Γενικά | 135 |
| 8.2 | Οι 4 βασικές προτάσεις για την ενέργεια και τις απώλειες στο Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο | 136 |
| 8.2.1 | Πυκνότητα αποθηκευμένης ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου | 136 |
| 8.2.2 | Πυκνότητα αποθηκευμένης ενέργειας μαγνητικού πεδίου | 137 |
| 8.2.3 | Ειδική ισχύς απωλειών Joule | 138 |
| 8.2.4 | Πυκνότητα διαδιδόμενης ισχύος | 138 |
| 8.3 | Απώλειες υστερήσεως σιδηρομαγνητικού υλικού | 139 |
| 8.4 | Απώλειες δινορρευμάτων | 144 |
| 8.5 | Ασκήσεις Κεφαλαίου 7 | 145 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

| | | |
|------------|---|-----|
| 9.1 | Γενικά | 149 |
| 9.2 | Εξισώσεις Απόκλισης | 149 |
| 9.3 | Εξισώσεις Περιστροφής | 151 |
| 9.4 | Οριακές συνθήκες | 154 |
| 9.4.1 | Κάθετες συνιστώσες | 154 |
| 9.4.2 | Εφαπτομενικές συνιστώσες | 155 |
| 9.5 | Εξειδίκευση των εξισώσεων Maxwell σε στατικά πεδία | 156 |

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ

159

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

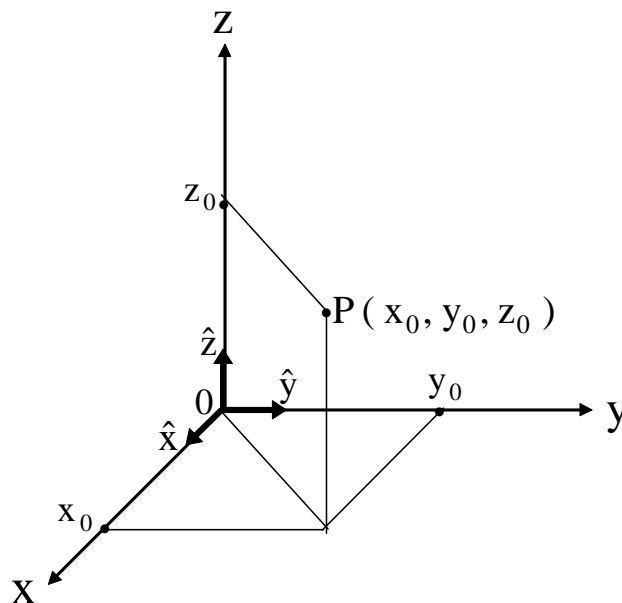
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1. 1) Συστήματα συντεταγμένων

Για τον καθορισμό της θέσης ενός σημείου στον τρισδιάστατο χώρο, υπάρχουν, στα Μαθηματικά, αρκετά συστήματα συντεταγμένων. Από αυτά τα τρία πλέον χρησιμοποιούμενα είναι το Καρτεσιανό, το Κυλινδρικό και το Σφαιρικό σύστημα. Κάθε σύστημα διαθέτει τρία **γραμμικά ανεξάρτητα** μοναδιαία διανύσματα. Για οποιοδήποτε σημείο **P** στον χώρο, αντιστοιχεί, σε κάθε σύστημα, μια τριάδα αριθμών (οι τρεις συντεταγμένες του σημείου). Ανάλογα με την μορφή και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (συμμετρίες κ.λ.π.) του εκάστοτε μαθηματικού προβλήματος που μελετάται, η χρήση του καταλληλότερου συστήματος συντεταγμένων μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά την ανάλυση.

Παρακάτω θα εξετάσουμε τα τρία συστήματα συντεταγμένων.

1. 1. 1) Καρτεσιανό (x , y , z)

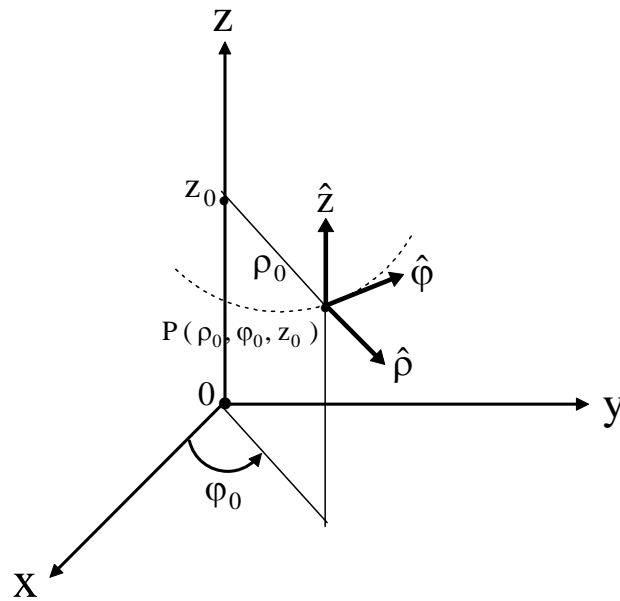


Σχ. 1.1

Τα 3 μοναδιαία διανύσματα είναι τα \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} και στο τυχόν σημείο P στο χώρο, αντιστοιχούν οι συντεταγμένες (x_0, y_0, z_0)

Τα διαφορικά (απειροστά) μήκη είναι: dx, dy, dz

1. 1. 2) Κυλινδρικό (ρ , φ , z)

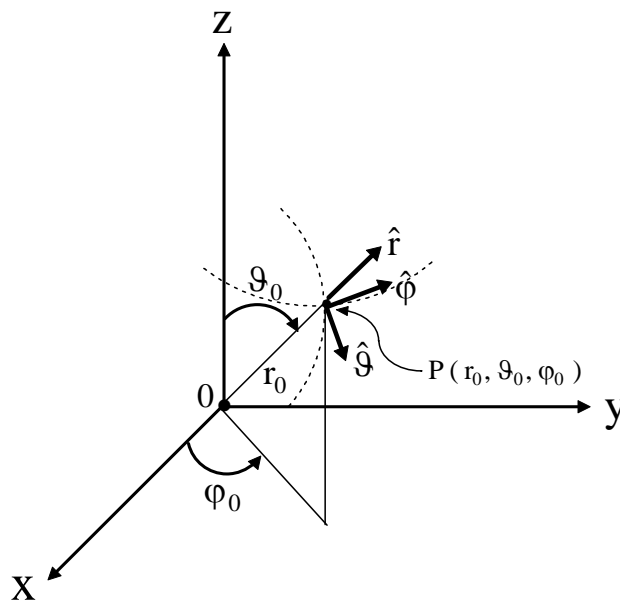


Σχ. 1.2

Τα 3 μοναδιαία διανύσματα είναι τα $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, \hat{z} και στο τυχόν σημείο P στο χώρο, αντιστοιχούν οι συντεταγμένες (ρ_0, φ_0, z_0)

Τα διαφορικά (απειροστά) μήκη είναι: $d\rho$, $\rho d\varphi$, dz

1. 1. 3) Σφαιρικό (r , ϑ , φ)



Σχ. 1.3

Τα 3 μοναδιαία διανύσματα είναι τα \hat{r} , $\hat{\vartheta}$, $\hat{\varphi}$ και στο τυχόν σημείο P στο χώρο, αντιστοιχούν οι συντεταγμένες $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$

Τα διαφορικά (απειροστά) μήκη είναι: dr , $r d\vartheta$, $r \sin \vartheta d\varphi$

1. 1. 4) Σχέσεις μετατροπής μεταξύ των συντεταγμένων των τριών συστημάτωνα) από καρτεσιανό (x, y, z)

σε κυλινδρικό:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} , \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) , \quad z = z$$

σε σφαιρικό:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} , \quad \vartheta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) , \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

β) από κυλινδρικό (ρ, φ, z)

σε καρτεσιανό:

$$x = \rho \cos \varphi , \quad y = \rho \sin \varphi , \quad z = z$$

σε σφαιρικό:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} , \quad \vartheta = \tan^{-1} \left(\frac{\rho}{z} \right) , \quad \varphi = \varphi$$

γ) από σφαιρικό (r, ϑ, φ)

σε καρτεσιανό:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi , \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi , \quad z = r \cos \vartheta$$

σε κυλινδρικό:

$$\rho = r \sin \vartheta , \quad \varphi = \varphi , \quad z = r \cos \vartheta$$

1.2) Διανύσματα

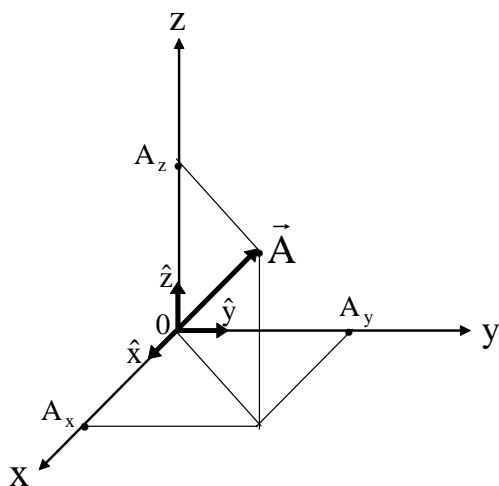
Τα διάφορα φυσικά μεγέθη διακρίνονται ως γνωστόν σε βαθμωτά και διανυσματικά. Για την παράσταση ενός βαθμωτού μεγέθους αρκεί ένας πραγματικός αριθμός. Για την παράσταση ενός διανυσματικού μεγέθους χρειάζονται ένας θετικός πραγματικός αριθμός και μία κατεύθυνση στον χώρο ή ισοδύναμα τρεις πραγματικοί αριθμοί. Μπορούμε να διατυπώσουμε έτσι τον ακόλουθο ορισμό του διανύσματος:

1.2.1) Ορισμός διανύσματος

- Ένα διάνυσμα συνδέει έναν αριθμό με μια κατεύθυνση του χώρου.

Ο αριθμός αυτός είναι το μέτρο της προβολής του διανύσματος στην δεδομένη κατεύθυνση.

Όπως προαναφέραμε ένα διάνυσμα, στο χώρο των τριών διαστάσεων, απαιτεί 3 αριθμούς για την παράστασή του. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες το διάνυσμα \vec{A} θα γράφεται:



$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

και το μέτρο του θα είναι:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Σχ. 1.4

1.2.2) Ορισμός τανυστή

Ο προηγούμενος ορισμός του διανύσματος μπορεί να γενικευτεί και έτσι να εισαχθεί η έννοια του τανυστή

Ένας τανυστής \hat{C} συνδέει ένα διάνυσμα \vec{A} με μια κατεύθυνση \vec{e} του χώρου μέσω της σχέσης:

$$\vec{A} = \hat{C} \cdot \vec{e}$$

όπου \vec{e} ένα διάνυσμα που εκφράζει την δεδομένη κατεύθυνση του χώρου και \hat{C} ένας τετραγωνικός πίνακας 3×3 (ο τανυστής).

Ο τανυστής \hat{C} μπορεί να γράφει:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix}$$

και το διάνυσμα \vec{e}

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα \vec{A} προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό \hat{C} επί \vec{e} .

Προφανώς ο τανυστής, απαιτεί 9 αριθμούς για την παράστασή του σε χώρο τριών διαστάσεων.

Αναφέρουμε τέλος ότι στη φύση εκτός από βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη υπάρχουν και **τανυστικά** μεγέθη.

1. 2. 3) Πράξεις διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα: $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ και $\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$

Η πρόσθεση και η αφαίρεση διανυσμάτων ανάγεται ως γνωστόν σε πρόσθεση και αφαίρεση των αντιστοιχών συνιστωσών τους:

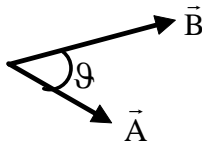
$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x) \hat{x} + (A_y \pm B_y) \hat{y} + (A_z \pm B_z) \hat{z}$$

Η πρόσθεση και η αφαίρεση διανυσμάτων δεν παρουσιάζουν κανένα πρόβλημα στην κατανόησή τους και προκύπτουν ως προφανείς συνέπειες του ορισμού του διανύσματος

Ο πολλαπλασιασμός διανυσμάτων προέκυψε από την προσπάθεια μαθηματικής διατύπωσης φυσικών νόμων, στους οποίους εμπλέκονταν διανυσματικά μεγέθη

Συγκεκριμένα έχουμε δύο είδη γινομένων διανυσμάτων:

α) Εσωτερικό γινόμενο $\vec{A} \cdot \vec{B}$



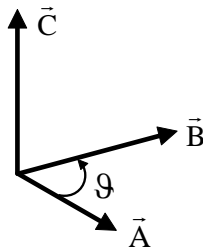
Σχ. 1.5

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \vartheta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος

β) Εξωτερικό γινόμενο $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

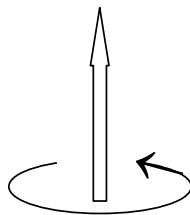
Το εξωτερικό γινόμενο είναι διανυσματικό μέγεθος



Σχ. 1.6

το διάνυσμα \vec{C} έχει μέτρο $|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \vartheta$ και είναι κάθετο στο επίπεδο των (\vec{A}, \vec{B}) .

Η φορά του είναι τέτοια ώστε όταν το \vec{A} (πρώτο διάνυσμα) στρεφόμενο, πλησιάζει το \vec{B} (δεύτερο διάνυσμα) **ακολουθώντας την μικρότερη γωνία** η φορά του \vec{C} να προκύπτει από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου, (βλ. και Σχ. 1.7)



Σχ. 1.7

Προφανώς για το εξωτερικό γινόμενο ισχύει: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

Υπενθυμίζεται και ο ακόλουθος τύπος υπολογισμού του εξωτερικού γινομένου σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

1. 2. 4) Διανυσματική συνάρτηση τριών μεταβλητών

Μια διανυσματική συνάρτηση 3 μεταβλητών $\vec{F}(x, y, z)$ θα γράφεται:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z) \hat{x} + F_y(x, y, z) \hat{y} + F_z(x, y, z) \hat{z}$$

Μπορεί να ορίζεται σε μια περιοχή του τρισδιάστατου χώρου R^3 ή και σε όλο τον χώρο αυτό.

Πιο γενικά μπορούμε να εισάγουμε και ως 4^η μεταβλητή τον χρόνο t και έτσι να έχουμε:

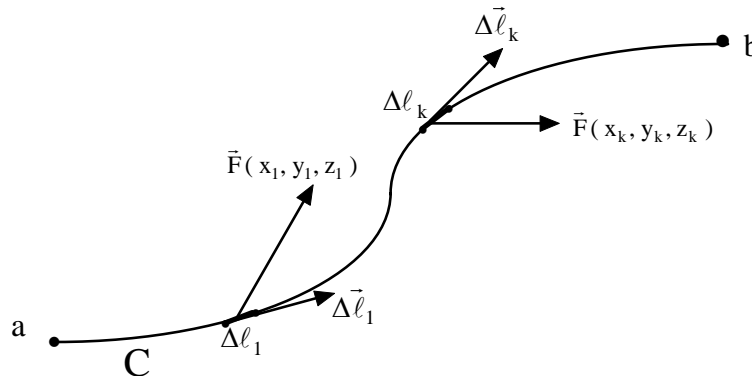
$$\vec{F}(x, y, z, t)$$

Στην θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων χρησιμοποιούνται πάρα πολύ τέτοιες διανυσματικές συναρτήσεις

1. 3) Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συναρτήσεως

1. 3. 1) Ορισμός επικαμπυλίου ολοκληρώματος

Έστω μια «λεία» καμπύλη C στον τρισδιάστατο χώρο («λεία» καμπύλη σημαίνει ότι δεν σχηματίζει γωνίες), και έστω επίσης μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z)$ που παίρνει τιμές σε κάθε σημείο του τμήματος $(a-b)$ της καμπύλης C (βλ. Σχ. 1.8)



Σχ. 1.8

Χωρίζουμε το τμήμα $(a-b)$ της καμπύλης σε N στοιχειώδη τμήματα $\Delta l_1, \Delta l_2 \dots \Delta l_k \dots \Delta l_N$ και σε κάθε τέτοιο στοιχειώδες τμήμα θεωρούμε το αντίστοιχο εφαπτομενικό διάνυσμα στην καμπύλη, $\vec{\Delta l}_1, \vec{\Delta l}_2 \dots \vec{\Delta l}_k \dots \vec{\Delta l}_N$

Σχηματίζουμε το ακόλουθο άθροισμα εσωτερικών γινομένων:

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot \vec{\Delta l}_k$$

όπου (x_k, y_k, z_k) οι συντεταγμένες του κέντρου του στοιχειώδους τμήματος $\Delta \ell_k$ όταν ο αριθμός N των στοιχειωδών τμημάτων $\Delta \ell_k$ τείνει στο άπειρο τότε το άθροισμα τείνει στο ολοκλήρωμα:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \vec{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta \vec{\ell}_k = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Το $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ ονομάζεται **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συναρτήσεως**

$\vec{F}(x, y, z)$ στο τμήμα **(a-b)** της καμπύλης **C**.

Προφανώς ισχύει:

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Αν καμπύλη επί της οποίας υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι κλειστή (δηλαδή η αρχή και το τέλος της συμπίπτουν) τότε χρησιμοποιείται το σύμβολο:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (\text{επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε κλειστή καμπύλη})$$

1. 3. 2) Τρόπος υπολογισμού του επικαμπυλίου ολοκληρώματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Μια καμπύλη στον τρισδιάστατο χώρο μπορεί να περιγραφεί από μία παράμετρο s μέσω των τριών παραμετρικών εξισώσεων:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

όπου η παράμετρος s παίρνει τιμές από ένα διάστημα $[a, b]$

Το πέρας του διανύσματος $\vec{r}(s) = x(s)\hat{x} + y(s)\hat{y} + z(s)\hat{z}$, καθώς το s μεταβάλλεται στο διάστημα $[a, b]$, διαγράφει όλα τα σημεία της καμπύλης.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{\ell}(s)$ σε κάθε σημείο $\vec{r}(s)$ της καμπύλης δίδεται από την σχέση:

$$\vec{\ell}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \frac{dx(s)}{ds}\hat{x} + \frac{dy(s)}{ds}\hat{y} + \frac{dz(s)}{ds}\hat{z}$$

και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ μιας διανυσματικής συναρτήσεως $\vec{F}(x, y, z)$ στο

τιμήμα $[a, b]$ της καμπύλης υπολογίζεται από την σχέση:

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b F_x(x(s), y(s), z(s)) \frac{dx(s)}{ds} ds + \int_a^b F_y(x(s), y(s), z(s)) \frac{dy(s)}{ds} ds + \int_a^b F_z(x(s), y(s), z(s)) \frac{dz(s)}{ds} ds$$

δηλαδή ανάγεται στον υπολογισμό τριών απλών ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα:

Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση:

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz) \hat{x} + (2y + 3xz) \hat{y} + (1 - 4xyz^2) \hat{z}$$

και η καμπύλη C με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x(s) = s \quad y(s) = s^2 \quad z(s) = s^3$$

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}(x, y, z)$ επί της καμπύλης C όταν η παράμετρος s μεταβάλλεται από το 0 έως το 1

Λύση:

Το εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{\ell}(s)$ σε κάθε σημείο της καμπύλης C θα δίνεται από την σχέση:

$$\vec{\ell}(s) = \frac{dx(s)}{ds} \hat{x} + \frac{dy(s)}{ds} \hat{y} + \frac{dz(s)}{ds} \hat{z} = \hat{x} + 2s \hat{y} + 3s^2 \hat{z}$$

Παρατηρούμε ότι όταν $s = 0$ τότε $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ αρχικό σημείο a

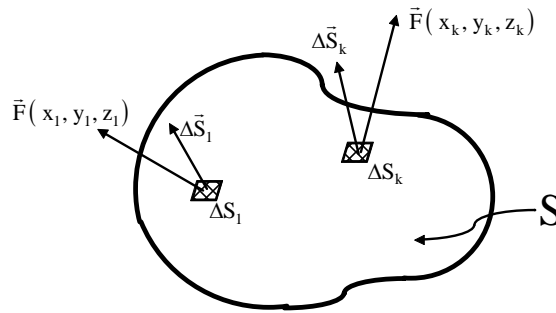
όταν $s = 1$ τότε $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ τελικό σημείο b

Άρα
$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 [(3s^2 - 6s^5) + (2s^2 + 3s^4) 2s + (1 - 4s^9) 3s^2] ds =$$

$$= \int_0^1 [6s^2 + 4s^3 - 12s^{11}] ds = 2$$

1.4) Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συναρτήσεως

Έστω μια «λεία» επιφάνεια S στον τρισδιάστατο χώρο. Με τον όρο «λεία» εννοούμε ότι η επιφάνεια δεν έχει ακμές ή αιχμές. (η ακριβέστερα η κάθετος στην επιφάνεια είναι συνεχής)
 Έστω επίσης μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z)$ που παίρνει τιμές σε κάθε σημείο του της επιφάνειας S (βλ. Σχ. 1.9)



Σχ. 1.9

Χωρίζουμε την επιφάνεια S σε N στοιχειώδη τμήματα με εμβαδόν $\Delta S_1, \Delta S_2 \dots \Delta S_k \dots \Delta S_N$
 Σε κάθε τέτοιο στοιχειώδες τμήμα, που θεωρείται επίπεδο, υπάρχει το αντίστοιχο κάθετο διάνυσμα $\hat{n}_1, \hat{n}_2 \dots \hat{n}_k \dots \hat{n}_N$.

Ορίζουμε σε κάθε τμήμα ΔS_k ένα διάνυσμα $\vec{\Delta S}_k = \hat{n}_k \Delta S_k$ (δηλ. το διάνυσμα $\vec{\Delta S}_k$ είναι κάθετο στην επιφάνεια ΔS_k και έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν ΔS_k)

Σχηματίζουμε το ακόλουθο άθροισμα εσωτερικών γινομένων:

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot \vec{\Delta S}_k$$

όπου (x_k, y_k, z_k) οι συντεταγμένες του κέντρου του στοιχειώδους τμήματος ΔS_k

όταν ο αριθμός N των στοιχειωδών τμημάτων ΔS_k τείνει στο άπειρο τότε το άθροισμα τείνει στο ολοκλήρωμα:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \vec{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot \vec{\Delta S}_k = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Το $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ ονομάζεται επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματικής συναρτήσεως

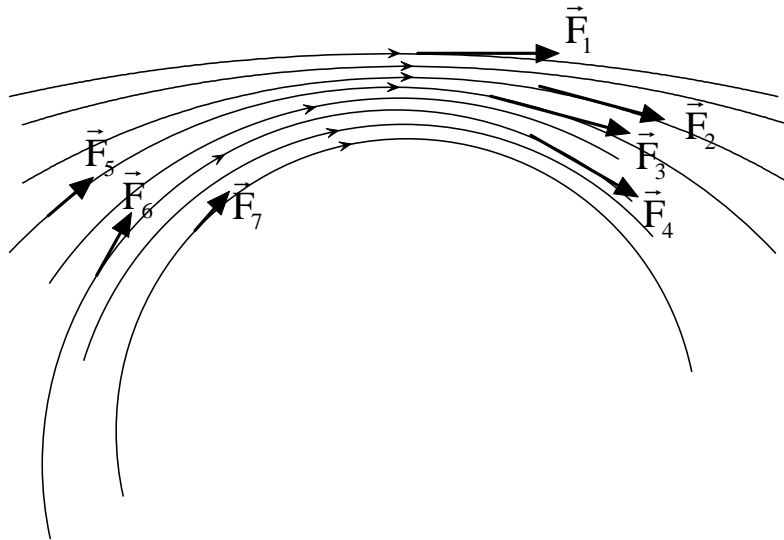
$\vec{F}(x, y, z)$ στην επιφάνεια S .

1.5) Διανυσματικό πεδίο

Με τον όρο «πεδίο» εννοούμε μια περιοχή του χώρου μέσα στην οποία ένα φυσικό μέγεθος (βαθμωτό ή διανυσματικό ή τανυστικό) λαμβάνει τιμές.

Στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία ιδιαίτερα ενδιαφέρουν τα διανυσματικά πεδία. Ένα διανυσματικό πεδίο μπορεί να παρασταθεί γραφικά από τις δυναμικές γραμμές του.

Οι δυναμικές γραμμές είναι καμπύλες γραμμές στις οποίες έχει σημειωθεί κάποια **φορά**. Το διανυσματικό μέγεθος \vec{F} του πεδίου είναι εφαπτομενικό σε κάθε σημείο των δυναμικών γραμμών. Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών είναι ανάλογη με το μέτρο του \vec{F} (βλ. και Σχ. 1.10)



Σχ. 1.10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

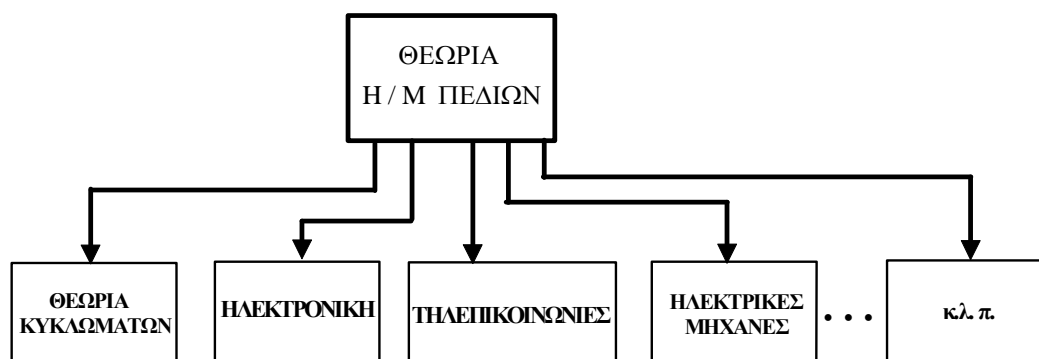
2. 1) Γενικά για την επιστήμη της Ηλεκτρολογίας

Σκοπός της Ηλεκτρολογίας είναι η μελέτη των ηλεκτρικών και μαγνητικών φαινομένων και η χρησιμοποίησή τους σε τεχνικές εφαρμογές, οι οποίες στη σημερινή μας εποχή είναι πλέον αναρίθμητες.

Τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα κυβερνώνται από τις **ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις**, οι οποίες ανήκουν σε μία από τις διάφορες κατηγορίες δυνάμεων που υπάρχουν στην φύση. Άλλες κατηγορίες δυνάμεων είναι οι βαρυτικές δυνάμεις, οι πυρηνικές δυνάμεις κλπ.

Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις και τα φαινόμενα που προκαλούν εξετάζονται από την **ηλεκτρομαγνητική θεωρία ή θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων**.

Μπορούμε να πούμε ότι η θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων αποτελεί την βάση της Επιστήμης της Ηλεκτρολογίας και όλα τα επί μέρους αντικείμενα που εξετάζει η Επιστήμη αυτή προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις της θεωρίας αυτής.



Σχ. 2.1

2. 2) Οι πηγές του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου

Το ηλεκτρομαγνητικό (H / M) πεδίο συνίσταται, όπως είναι γνωστό, από δύο διαφορετικά πεδία: το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} και το μαγνητικό πεδίο \vec{H} . Τον ακριβή ορισμό των πεδίων αυτών θα τον διατυπώσουμε σε επόμενη παράγραφο. Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε τις πηγές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δηλαδή τα φυσικά μεγέθη που δημιουργούν το πεδίο.

Οι πηγές του H/M πεδίου είναι οι ακόλουθες δύο:

- Τα ηλεκτρικά φορτία

- Τα ηλεκτρικά ρεύματα (δηλαδή τα φορτία σε κίνηση)

2. 2. 1) Το ηλεκτρικό φορτίο

Το ηλεκτρικό φορτίο q (ή η «ποσότητα ηλεκτρισμού») είναι ένα φυσικό μέγεθος το οποίο δεν έχει υλική υπόσταση, δηλαδή δεν μπορεί να υπάρξει φορτίο χωρίς την ύπαρξη μάζας η οποία να το «φέρει». Αντίθετα είναι δυνατή η ύπαρξη μάζας χωρίς φορτίο. Για το φορτίο γίνονται δεκτές οι ακόλουθες τέσσερις παραδοχές.

α) Υπάρχουν δύο διαφορετικά «είδη» φορτίου τα οποία ονομάζουμε «θετικό» και «αρνητικό» φορτίο.

β) Το φορτίο είναι κβαντισμένο μέγεθος, δηλαδή οποιαδήποτε τιμή φορτίου στη φύση είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας στοιχειώδους ποσότητας η οποία είναι ίση με την απόλυτο τιμή του φορτίου που φέρει ένα ηλεκτρόνιο. Η τιμή αυτή είναι:

$$|q_e| = 1.602 \times 10^{-19} \text{ Cb}$$

όπου 1 Coulomb (1 Cb) η μονάδα φορτίου στο σύστημα SI.

γ) Το φορτίο διατηρείται, δηλαδή το συνολικό φορτίο Q που υπάρχει μέσα σε μια κλειστή περιοχή του χώρου παραμένει πάντοτε σταθερό. Επομένως δεν είναι δυνατή η εξαφάνιση φορτίου ούτε και η παραγωγή φορτίου από το πουθενά.

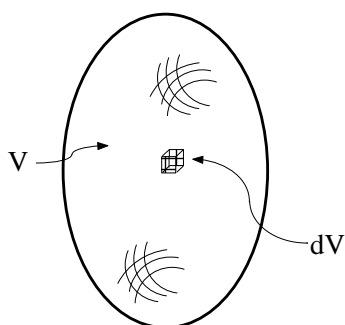
δ) Το φορτίο είναι ανεξάρτητο από την ταχύτητα του φορέα του (Αυτό, ως γνωστόν, δεν ισχύει για την μάζα, σύμφωνα με την θεωρία της σχετικότητας)

2. 2. 2) Κατανομές ηλεκτρικού φορτίου

Σε μακροσκοπικό επίπεδο (δηλαδή όχι σε επίπεδο ατομικών σωματιδίων) το ηλεκτρικό φορτίο κατανέμεται σε όγκους, σε επιφάνειες, και σε γραμμές. Αναφέρουμε εδώ ότι τα «σημειακά φορτία» δεν υπάρχουν στον μακρόκοσμο και απλώς εισάγονται για απλοποίηση μαθηματικών περιγραφών διαφόρων φαινομένων.

Για κάθε περίπτωση κατανομής φορτίου ορίζεται και μια αντίστοιχη πυκνότητα φορτίου. Εξετάζουμε παρακάτω τις κατανομές αυτές.

α) Κατανομή φορτίου σε όγκο (χωρική κατανομή)

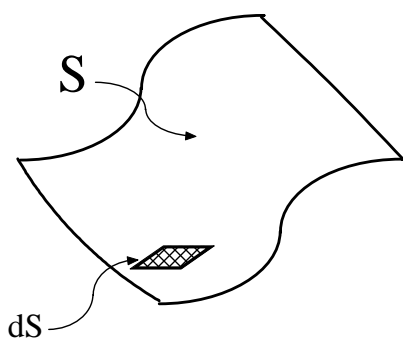


Σχ. 2.2

Αν είναι dV ο στοιχειώδης όγκος, μέσα στον οποίο περιέχεται φορτίο dq , τότε ορίζεται η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad \left(\frac{Cb}{m^3} \right)$$

β) Κατανομή φορτίου σε επιφάνεια (επιφανειακή κατανομή)



Σχ. 2.3

Αν είναι dS η στοιχειώδης επιφάνεια, στην οποία περιέχεται φορτίο dq , τότε ορίζεται η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad \left(\frac{Cb}{m^2} \right)$$

γ) Κατανομή φορτίου σε γραμμή (γραμμική κατανομή)



Σχ. 2.4

Αν είναι dl το στοιχειώδες μήκος τόξου, στο οποίο περιέχεται φορτίο dq , τότε ορίζεται η γραμμική πυκνότητα φορτίου λ

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad \left(\frac{Cb}{m} \right)$$

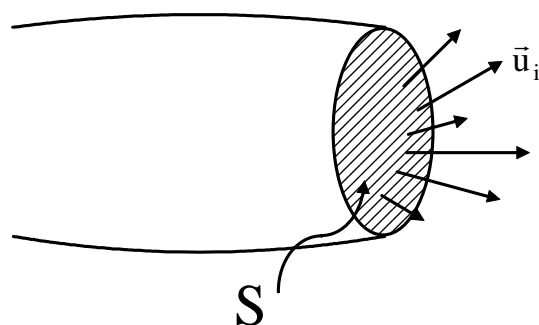
Αναφέρουμε εδώ ότι η επιφανειακή και η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι μαθηματικές εξιδανικεύσεις και στην πράξη υπάρχουν μόνον χωρικές κατανομές φορτίου.

2.2.3) Το ηλεκτρικό ρεύμα – ένταση ρεύματος

Η έννοια του ηλεκτρικού ρεύματος θεωρείται γενικά γνωστή. Λέγοντας **ηλεκτρικό ρεύμα** εννοούμε την **προσανατολισμένη** κίνηση ηλεκτρικών φορτίων (θετικών ή αρνητικών). Ως συμβατική φορά ρεύματος λαμβάνεται η φορά κίνησης των θετικών φορτίων.

Το φαινόμενο του ηλεκτρικού ρεύματος περιγράφεται ποσοτικά από το φυσικό μέγεθος ένταση ηλεκτρικού ρεύματος i , το οποίο και πολύ συχνά αποκαλούμε απλώς ηλεκτρικό ρεύμα.

Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος είναι ο ρυθμός ροής των ηλεκτρικών φορτίων διαμέσου κάποιας επιφάνειας S .



Σχ. 2.5

Σε κάθε σημείο της διατομής S τα βέλη παριστάνουν τα διανύσματα ταχύτητας των φορέων φορτίου. Τα διανύσματα αυτά δεν είναι απαραίτητα κάθετα στην επιφάνεια S και επίσης δεν έχουν παντού το ίδιο μέτρο και την ίδια διεύθυνση. Η ένταση i του ηλεκτρικού ρεύματος ορίζεται ως :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \left(1 \text{ Ampere} = \frac{1 \text{ C b}}{1 \text{ sec}} \right)$$

2. 2. 4) Πυκνότητα ρεύματος

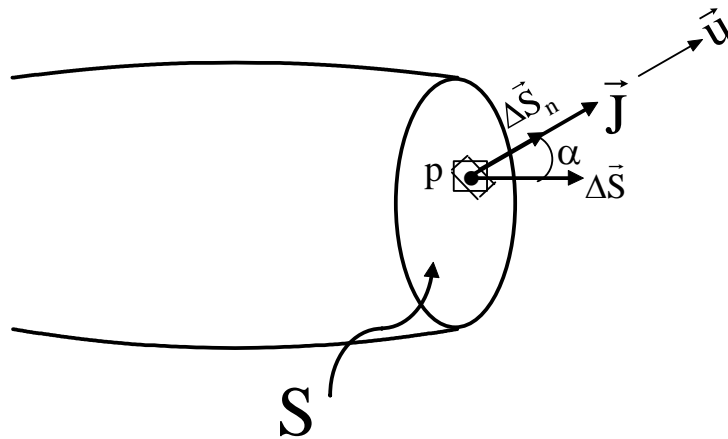
Στην θεωρία των Η/Μ πεδίων, εκτός από την ένταση ρεύματος χρησιμοποιείται και το διανυσματικό μέγεθος πυκνότητα ρεύματος.

Διακρίνουμε δύο είδη πυκνοτήτων ρεύματος, ανάλογα με τον τρόπο ροής.

α) Χωρική πυκνότητα ρεύματος

Όταν το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει σε μέσα σε όγκο τότε η χωρική πυκνότητα ρεύματος \vec{J} ορίζεται ως εξής:

Θεωρούμε μια διατομή S δια της οποίας διέρχονται οι φορείς φορτίου (βλ. Σχ. 2.6)



Σχ. 2.6

Η φορά του διανύσματος \vec{J} , σε κάθε σημείο της επιφάνειας S , είναι η ίδια με αυτήν του διανύσματος \vec{u} της ταχύτητας των φορέων στο ίδιο σημείο. Το μέτρο του \vec{J} θα είναι:

$$|\vec{J}| = \frac{\Delta i}{\Delta S_n} \quad \left(\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right)$$

όπου Δi η στοιχειώδης ένταση ρεύματος που διέρχεται από την στοιχειώδη επίπεδη επιφάνεια με εμβαδόν ΔS_n , η οποία είναι κάθετη στο διάνυσμα \vec{J} (ή στο \vec{u}).

Για κάθε σημείο p της (όχι επίπεδης) επιφάνειας S θα έχουμε:

$\Delta \vec{S}_n$: διάνυσμα κάθετο στη στοιχειώδη επίπεδη επιφάνεια με εμβαδόν ΔS_n , και με μέτρο ΔS_n . Η στοιχειώδης αυτή επιφάνεια είναι, όπως προαναφέραμε, κάθετη στο \vec{J} . Άρα τα διανύσματα $\Delta \vec{S}_n$ και \vec{J} (ή \vec{u}) είναι συγγραμμικά.

$\Delta \vec{S}$: διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια S , στο σημείο p , και με μέτρο το εμβαδόν ΔS της στοιχειώδους επίπεδης επιφάνειας γύρω από το σημείο p .

Γενικά τα διανύσματα $\Delta \vec{S}_n$ και $\Delta \vec{S}$ σχηματίζουν μεταξύ τους μια γωνία α διότι **δεν είναι απαραίτητο η ροή του ρεύματος να γίνεται κάθετα στην επιφάνεια S .**

Επομένως θα ισχύει:

$$\Delta i = |\vec{J}| \Delta S_n = |\vec{J}| |\Delta \vec{S}| \cos \alpha \Rightarrow \Delta i = \vec{J} \cdot \Delta \vec{S}$$

Δηλαδή η στοιχειώδης ένταση ρεύματος Δi σε κάθε σημείο p της επιφάνειας S ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{J} και $\Delta \vec{S}$.

Άρα για το ολικό ρεύμα i που διέρχεται από την S μπορούμε να γράψουμε:

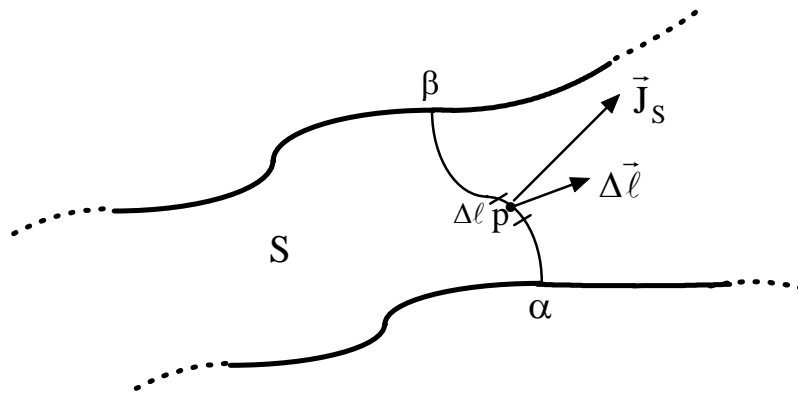
$$i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Delta i_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \vec{J}_k \cdot \Delta \vec{S}_k = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Δηλαδή η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος i που ρέει δια της επιφάνειας S είναι ίση με το επιφανειακό ολοκλήρωμα της πυκνότητας ρεύματος \vec{J} στην επιφάνεια S .

β) Επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος

Θεωρητικά είναι δυνατή η περίπτωση ροής ρεύματος σε επιφάνεια S . Στην περίπτωση αυτή ορίζεται η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος \vec{J}_S .

Θεωρούμε μία καμπύλη α - β επάνω στην επιφάνεια S (βλ. σχ. 2.7)



Σχ. 2.7

Το διάνυσμα \vec{J}_s , σε κάθε σημείο p της καμπύλης α-β, θα έχει φορά ίδια με αυτήν του διανύσματος \vec{u} της ταχύτητας των φορέων στο ίδιο σημείο. Το μέτρο του \vec{J}_s θα είναι:

$$|\vec{J}_s| = \frac{\Delta i}{\Delta \ell_n} \quad \left(\frac{\text{A}}{\text{m}} \right)$$

όπου Δi η στοιχειώδης ένταση ρεύματος που διέρχεται από το στοιχειώδες ευθύγραμμο τμήμα με μήκος $\Delta \ell_n$, το οποίο είναι **κάθετο** στο διάνυσμα \vec{J}_s (ή στο \vec{u}).

Σε αντιστοιχία με την χωρική πυκνότητα ρεύματος, η στοιχειώδης ένταση ρεύματος σε κάθε σημείο της καμπύλης α-β ορίζεται και εδώ ως ένα εσωτερικό γινόμενο και μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta i = \vec{J}_s \cdot \Delta \vec{\ell}$$

όπου $\Delta \vec{\ell}$: διάνυσμα κάθετο στην καμπύλη α-β, στο σημείο p, και με μέτρο το μήκος του στοιχειώδους ευθύγραμμου τμήματος $\Delta \ell$ γύρω από το σημείο p. Προφανώς τα τμήματα $\Delta \ell$ και $\Delta \ell_n$ δεν είναι απαραίτητα συγγραμμικά διότι η ροή δεν γίνεται κάθετα σε κάθε σημείο της καμπύλης α-β

Αντίστοιχα το ολικό ρεύμα i θα δίνεται από την σχέση:

$$i = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{J}_s \cdot d\vec{\ell}$$

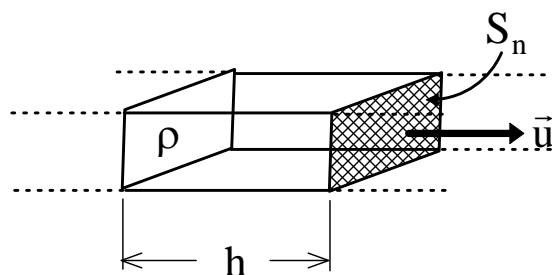
Δηλαδή η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος i που ρέει διασχίζοντας την καμπύλη α-β, είναι ίση με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος \vec{J}_s

στην καμπύλη α-β. (Προσοχή όμως! Το διάνυσμα $d\vec{\ell}$ δεν είναι εφαπτομενικό αλλά κάθετο στην καμπύλη)

2.2.5) Σχέσεις πυκνοτήτων ρεύματος και φορτίου

Παρακάτω θα θεωρήσουμε περιπτώσεις ηλεκτρικών ρευμάτων που ρέουν μέσα σε όγκους, σε επιφάνειες ή σε γραμμές και επομένως θα έχουμε τις αντίστοιχες πυκνότητες ρευμάτων. Σε κάθε περίπτωση θα διατυπώσουμε τις σχέσεις μεταξύ των πυκνοτήτων ρεύματος και πυκνοτήτων φορτίου.

Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση χωρικής κατανομής κινούμενου φορτίου με χωρική πυκνότητα ρ και πυκνότητα ρεύματος \vec{J} .



Σχ. 2.8

Για απλότητα στους υπολογισμούς θεωρούμε την γεωμετρία του σχήματος 2.8. Στο πρίσμα ορθογωνικού σχήματος, με μήκος h εμβαδόν διατομής S_n , υπάρχει κατανεμημένο ηλεκτρικό φορτίο με χωρική πυκνότητα ρ . Θεωρούμε ότι το φορτίο αυτό κινείται με **σταθερή ταχύτητα** \vec{u} σύμφωνα με την με φορά του σχήματος. Αυτή η παραδοχή χρειάζεται μια εξήγηση που θα δοθεί αργότερα.

Το συνολικό φορτίο Δq που περιέχεται στον όγκο του πρίσματος θα είναι:

$$\Delta q = \rho h S_n$$

Εφ' όσον το φορτίο αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα με μέτρο u , τότε θα διασχίζει την διατομή S_n σε χρόνο Δt όπου:

$$u = \frac{h}{\Delta t}$$

άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta q = \rho u \Delta t S_n$$

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος θα είναι:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho u S_n$$

και η πυκνότητα ρεύματος J θα έχει μέτρο

$$J = \frac{i}{S_n} = \rho u$$

Η σχέση αυτή γενικεύεται διανυσματικά και έτσι μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη βασική σχέση:

$$\vec{J} = \rho \vec{u}$$

Δηλαδή, σε κάθε σημείο, το διάνυσμα της χωρικής πυκνότητας ρεύματος \vec{J} είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα \vec{u} της ταχύτητας φορέων στο σημείο αυτό, και έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της ταχύτητας \vec{u} πολλαπλασιασμένο επί την χωρική πυκνότητα φορτίου ρ .

Για την περίπτωση επιφανειακής κατανομής κινούμενου φορτίου η τελευταία σχέση παίρνει την μορφή:

$$\vec{J}_S = \sigma \vec{u}$$

όπου \vec{J}_S η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος και σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

Τέλος για την περίπτωση γραμμικής κατανομής κινούμενου φορτίου θα έχουμε:

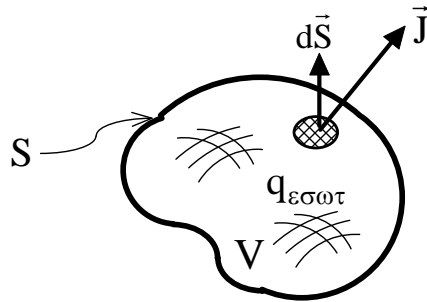
$$i = \lambda u$$

όπου i η ένταση του ρεύματος και λ η γραμμική πυκνότητα φορτίου

2.3) Νόμος διατήρησης του φορτίου

Παρακάτω θα διατυπώσουμε μια μαθηματική σχέση η οποία εκφράζει τον νόμο της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου.

Έστω μια κλειστή περιοχή του χώρου, με τη μορφή «μπαλονιού» με όγκο V . Το συνολικό εμβαδόν επιφάνειας που περιβάλλει τον όγκο αυτό είναι S . Μέσα στην περιοχή αυτή περικλείεται συνολικό φορτίο $q_{\epsilon\sigma}$, με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ .



Σχ. 2.9

Το συνολικό φορτίο $q_{\epsilon\sigma}$ μέσα στον όγκο V μπορεί να γραφεί:

$$q_{\epsilon\sigma} = \iiint_V \rho \, dV$$

Αν από τον όγκο V εξέρχεται ηλεκτρικό φορτίο με τη μορφή ηλεκτρικού ρεύματος με χωρική πυκνότητα \vec{J} τότε θα ισχύει:

$$i = \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

και επίσης:

$$i = -\frac{dq_{\epsilon\sigma}}{dt}$$

γιατί το συνολικό φορτίο μέσα στον όγκο V θα μειώνεται (η συνάρτηση $q_{\epsilon\sigma}(t)$ είναι φθίνουσα)

Συνδυάζοντας τις τρεις αυτές σχέσεις θα πάρουμε:

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV$$

Η σχέση αυτή εκφράζει την αρχή διατήρησης του φορτίου

2.4) Βασικά μεγέθη του Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

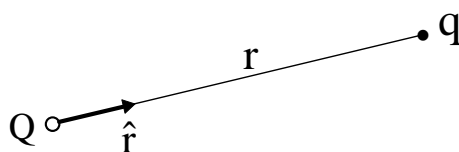
2.4.1) Η μέθοδος του πεδίου

Για την μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων, που όπως προαναφέραμε κυβερνώνται από τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις, μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο μέθοδοι:

α) Η μέθοδος των **δυνάμεων από απόσταση**, που εφαρμόστηκε στα πρώτα χρόνια της μελέτης του ηλεκτρομαγνητισμού, με την ανακάλυψη του νόμου του Coulomb κ.λ.π

β) Η **μέθοδος του πεδίου**, η οποία οφείλεται κυρίως στον Faraday, και είναι αυτή που χρησιμοποιείται σήμερα. Η μέθοδος αυτή έδωσε ουσιαστική ώθηση στην μαθηματική επεξεργασία της μελέτης των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων.

Για παράδειγμα ας εξετάσουμε τον γνωστό νόμο του Coulomb:



Σχ. 2.10

Η δύναμη \vec{F}_e που ασκείται στο φορτίο q θα είναι:

$$\vec{F}_e = C \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad (\text{όπου } C \text{ μια σταθερά})$$

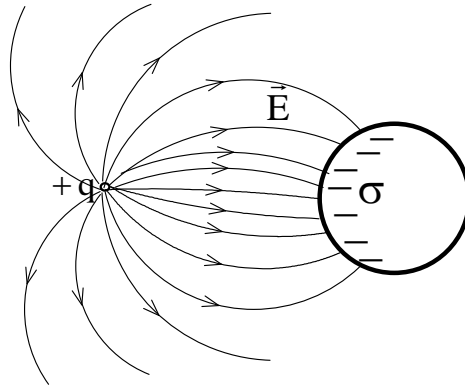
παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{F}_e = q \vec{E} \quad \text{όπου:} \quad \vec{E} = C \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

το διανυσματικό μέγεθος \vec{E} το αποκαλούμε **ένταση του ηλεκτρικού πεδίου** και μέσω αυτού μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλεκτρική δύναμη. Αναφέρουμε ότι το μέγεθος \vec{E} άμεσα δεν υπάρχει αλλά έμμεσα το παρατηρούμε από τα αποτελέσματά του (εξάσκηση δυνάμεων σε φορτία).

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} μπορεί να βρεθεί από τις πηγές του πεδίου. Υπάρχουν όμως πολλές περιπτώσεις στις οποίες οι πηγές του πεδίου δεν είναι ακριβώς γνωστές.

Για παράδειγμα αν ένα θετικό σημειακό φορτίο q τοποθετηθεί κοντά σε μια τέλεια αγώγιμη σφαίρα θα προκαλέσει την εμφάνιση αρνητικών φορτίων κατανεμημένων στην επιφάνεια της σφαίρας και οι δυναμικές γραμμές του πεδίου θα έχουν τη μορφή που φαίνεται στο σχ. 2.11

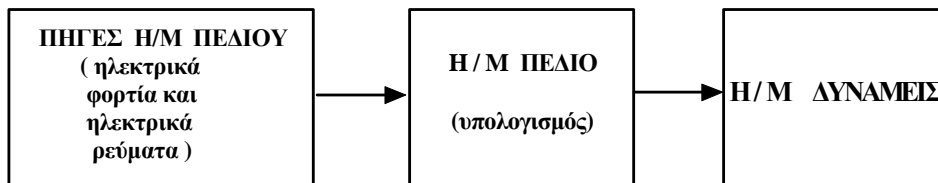


Σχ. 2.11

Η επιφανειακή κατανομή με πυκνότητα σ μας είναι άγνωστη, δηλαδή ουσιαστικά οι πηγές του πεδίου δεν είναι πλήρως γνωστές. Μπορούν όμως να χρησιμοποιηθούν κάποιες άλλες ιδιότητες για την εύρεση του πεδίου \vec{E} . Δεν θα εξηγήσουμε εδώ τον τρόπο χρήσης αυτών των ιδιοτήτων, απλώς θα αναφέρουμε ότι πρόκειται για ένα μαθηματικό πρόβλημα οριακών συνθηκών.

Το πεδίο λοιπόν μπορεί να βρεθεί ακόμα και όταν δεν είναι γνωστές οι πηγές του, και αυτό είναι το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου του πεδίου.

Συνοπτικά η εφαρμογή της μεθόδου του πεδίου φαίνεται στο σχ. 2.12



Σχ. 2.12

2. 4. 2) Ηλεκτρομαγνητική δύναμη Lorentz. Ορισμός πεδίων \vec{E} και \vec{B}

Θεωρούμε ένα θετικό σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q το οποίο κινείται με ταχύτητα \vec{u} μέσα σε ένα χώρο όπου είναι εγκατεστημένο ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Από **πειραματικές μετρήσεις** προκύπτει ότι στο φορτίο αυτό ασκούνται δύο δυνάμεις:

- Η **ηλεκτρική δύναμη**: $\vec{F}_e = q \vec{E}$
- Η **μαγνητική δύναμη**: $\vec{F}_m = q (\vec{u} \times \vec{B})$

Το μέγεθος \vec{E} ονομάζεται **ένταση ηλεκτρικού πεδίου** και η μονάδα μετρήσεώς του είναι το $\left(\frac{Nt}{Cb} \right)$ ή ισοδύναμα το $\left(\frac{V}{m} \right)$

Το μέγεθος \vec{B} ονομάζεται **μαγνητική επαγωγή** ή **πυκνότητα μαγνητικής ροής** και η μονάδα μετρήσεώς του είναι το $\left(\frac{V}{m \cdot (m/sec)} \right) = \left(\frac{V \text{ sec}}{m^2} \right)$ το οποίο αποκαλείται και Tesla

Τα μεγέθη \vec{E} και \vec{B} είναι τα δύο πεδία μέσω των οποίων εκφράζεται η **ηλεκτρομαγνητική δύναμη** $\vec{F}_{e,m}$

$$\vec{F}_{em} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Παρατηρούμε ότι η μαγνητική δύναμη είναι πάντοτε κάθετη στην ταχύτητα.

Αναφέρουμε όμως εδώ το εξής σημαντικό:

Η μαγνητική επαγωγή \vec{B} **σχετίζεται άμεσα**, όπως θα δούμε, με το πεδίο \vec{H} , το αποκαλούμενο **μαγνητικό πεδίο** και τελικά μπορούμε να γράψουμε ότι τα δύο πεδία της Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας, είναι:

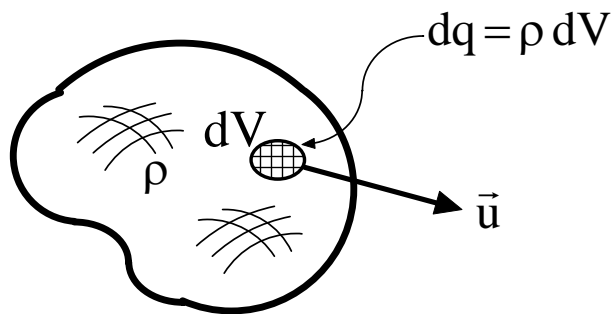
- το **ηλεκτρικό πεδίο** \vec{E}
- το **μαγνητικό πεδίο** \vec{H}

Η έκφραση της δύναμης Lorentz για ένα σημειακό φορτίο έχει πρακτική αξία μόνο για μελέτη στο μικροκόσμο (σωματίδια). Αν θέλουμε να εκφράσουμε τη δύναμη αυτή μακροσκοπικά τότε θα πρέπει να κάνουμε χρήση κατανεμημένων φορτίων και πυκνοτήτων ρεύματος.

Θα εξετάσουμε παρακάτω αυτές τις περιπτώσεις.

α) Χωρική πυκνότητα φορτίου – δύναμη ανα μονάδα όγκου

Έστω ότι μέσα σε ένα χώρο που είναι εγκατεστημένο ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο υπάρχει μια χωρική κατανομή φορτίου με πυκνότητα ρ . Θεωρούμε ένα στοιχειώδη όγκο dV στον οποίο υπάρχει φορτίο $dq = \rho dV$ και ο στοιχειώδης αυτός όγκος κινείται με ταχύτητα \vec{u} .



Σχ. 2.13

Η στοιχειώδης ηλεκτρομαγνητική δύναμη $d\vec{F}_{em}$ στον όγκο dV θα γράφεται:

$$d\vec{F}_{em} = dq (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \rho dV (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = (\rho \vec{E} + \rho \vec{u} \times \vec{B}) dV$$

αλλά όπως δείξαμε στα προηγούμενα : $\rho \vec{u} = \vec{J}$

άρα:

$$d\vec{F}_{em} = (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV$$

και η δύναμη ανά μονάδα όγκου θα είναι:

$$\frac{d\vec{F}_{em}}{dV} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

αν δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο τότε

$$\frac{d\vec{F}_m}{dV} = \vec{J} \times \vec{B}$$

η τελευταία σχέση χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην μελέτη των ηλεκτρικών μηχανών.

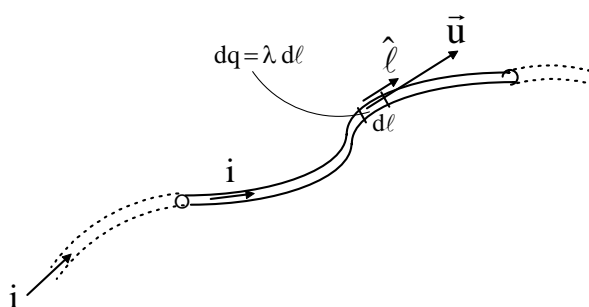
β) Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου – δύναμη ανα μονάδα επιφάνειας

Κάνοντας αντίστοιχους συλλογισμούς προκύπτει η ακόλουθη σχέση, για την ηλεκτρομαγνητική δύναμη ανα μονάδα επιφάνειας, στην περίπτωση φορτίων κατανεμημένων σε επιφάνειες:

$$\frac{d \vec{F}_{em}}{d S} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \times \vec{B}$$

γ) Γραμμική πυκνότητα φορτίου – δύναμη ανα μονάδα μήκους

Έστω ότι μέσα σε ένα χώρο που είναι εγκατεστημένο ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο υπάρχει ένας καμπυλόγραμμος αγωγός, με απειροστά μικρή διατομή, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα i . Στον αγωγό υπάρχει κατανεμημένο φορτίο με γραμμική πυκνότητα λ . Το φορτίο αυτό κινείται με ταχύτητα \vec{u} και ακριβώς η κίνηση αυτή δημιουργεί το ηλεκτρικό ρεύμα i (βλ. σχ. 2.14)



Σχ. 2.14

Σε ένα στοιχειώδες μήκος $d\ell$ του αγωγού, με φορτίο $dq = \lambda d\ell$ θα ασκείται η στοιχειώδης δύναμη:

$$d \vec{F}_{em} = d q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \lambda d\ell (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \lambda \vec{E} d\ell + (\lambda \vec{u} \times \vec{B}) d\ell$$

παρατηρούμε ότι η διανυσματική ποσότητα $\lambda \vec{u} = \left(\frac{\text{φορτιο}}{\text{μηκος}} \times \frac{\text{μηκος}}{\text{χρονος}} \right)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\left(\frac{\text{φορτιο}}{\text{χρονος}} \right) \hat{\ell} = \text{ένταση ρεύματος} \hat{\ell}. \text{ Δηλαδή τελικά } \lambda \vec{u} = i \hat{\ell}$$

Το $\hat{\ell}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτομενικό στην καμπύλη, αρά συγγραμμικό με την ταχύτητα \vec{u} των φορτίων, σε κάθε σημείο της καμπύλης.

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε:

$$d\vec{F}_{em} = \lambda \vec{E} d\ell + (i \hat{\ell} \times \vec{B}) d\ell$$

και επειδή η έκφραση $d\ell \hat{\ell}$ μπορεί να γραφεί και ως $d\ell \hat{\ell} = d\vec{\ell}$ όπου $d\vec{\ell}$ απειροστό διάνυσμα, τελικά θα έχουμε:

$$d\vec{F}_{em} = \lambda \vec{E} d\ell + i (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

και στην περίπτωση που δέν έχουμε ηλεκτρικό πεδίο:

$$d\vec{F}_m = i (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

όπου $d\vec{F}_m$ η στοιχειώδης μαγνητική δύναμη που ασκείται στο στοιχειώδες τμήμα $d\ell$ του αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα i . Η φορά του διανύσματος $d\vec{\ell}$ είναι ίδια με την φορά του ρεύματος. Η τελευταία αυτή σχέση έχει σημαντικότερη αξία στις εφαρμογές.

2.5) Συντακτικές σχέσεις των πεδίων

Όπως προαναφέρθηκε, δύο είναι τα πεδία που εξετάζει η Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία

- το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}

- το μαγνητικό πεδίο \vec{H}

Επειδή η παρατήρηση των ηλεκτρικών και μαγνητικών “δράσεων” ξεκίνησε (αρχές 19^{ου} αιώνα) με εφαρμογές συνεχών ρευμάτων, που λαμβάνονταν από συσσωρευτές, αλλά και για άλλους λόγους οι οποίοι θα εξηγηθούν στα επόμενα, έχει δοθεί μια ιδιαίτερη σημασία στην μελέτη της ροής του **συνεχούς (χρονικά σταθερού ή μόνιμου) ρεύματος** μέσα σε αγωγούς, και των αποτελεσμάτων που αυτή προκαλεί.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε εδώ, σαν ιδιαίτερη κατηγορία μελέτης, το λεγόμενο **πεδίο ροής (συνεχούς) ηλεκτρικού ρεύματος μέσα σε αγωγούς.**

Άρα λοιπόν έχουμε, από πλευράς μελέτης, τα 3 “είδη” πεδίων

- ηλεκτρικό πεδίο
- μαγνητικό πεδίο
- πεδίο ροής συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος μέσα σε αγωγούς

Τα δύο βασικά πεδία είναι βέβαια το ηλεκτρικό και το μαγνητικό. Το πεδίο ροής συνεχούς ρεύματος έχει γενεσιουργό αιτία το ηλεκτρικό πεδίο. Αναφερόμενοι στα δύο αυτά πεδία \vec{E} και \vec{H} έχουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

Τα πεδία \vec{E} και \vec{H} θεωρείται ότι αναπτύσσονται στο **απόλυτο κενό**. Όταν έχουμε ανάπτυξη πεδίων μέσα σε υλικά σώματα, τότε για την μαθηματική περιγραφή χρησιμοποιούνται διαφορετικά μεγέθη από τα \vec{E} και \vec{H} . Συγκεκριμένα για το ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιείται το μέγεθος \vec{D} το οποίο ονομάζεται πυκνότητα ηλεκτρικής ροής ή αλλιώς διηλεκτρική μετατόπιση, ενώ για το μαγνητικό πεδίο το μέγεθος \vec{B} , το οποίο αντίστοιχα ονομάζεται πυκνότητα μαγνητικής ροής ή μαγνητική επαγωγή.

Μέσω των μεγεθών \vec{D} και \vec{B} περιγράφεται η επίδραση της ύλης στο ηλεκτρικό και στο μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα. Μπορούμε να πούμε ότι τα μεγέθη \vec{E} και \vec{H} αποτελούν τα **αίτια** και αντίστοιχα τα \vec{D} και \vec{B} είναι τα **αποτελέσματα**. Παρατηρούμε επίσης ότι τα μεγέθη \vec{D} και \vec{B} φέρουν και το όνομα **πυκνότητα ροής** δηλαδή ροή ανά μονάδα επιφάνειας. Αυτό σημαίνει ότι αν ληφθούν τα επιφανειακά ολοκληρώματα των μεγεθών \vec{D} και \vec{B} σε κάποια επιφάνεια το αποτέλεσμα θα είναι η **ηλεκτρική** και η **μαγνητική ροή** αντίστοιχα δια μέσου της επιφάνειας αυτής. Η σημασία των μεγεθών της **ηλεκτρικής** και της **μαγνητικής ροής** είναι σημαντικότερη για την διατύπωση των βασικών εξισώσεων του Ηλεκτρομαγνητισμού (εξισώσεις Maxwell) όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Συνοψίζοντας λοιπόν, κάθε πεδίο έχει 3 βασικά χαρακτηριστικά μεγέθη:

- **Ένταση**

- **Ροή**

- **Πυκνότητα ροής**

Οι σχέσεις που συνδέουν την ένταση κάθε πεδίου με την αντίστοιχη πυκνότητα ροής ονομάζονται συντακτικές σχέσεις.

Παρακάτω θα εξετάσουμε τις συντακτικές σχέσεις για κάθε πεδίο ξεχωριστά:

α) Ηλεκτρικό πεδίοΈνταση ηλεκτρικού πεδίου: \vec{E} (V / m) ή (Nt / Cb)Πυκνότητα ηλεκτρικής ροής : \vec{D} (A sec / m² ή Cb / m²)
(ή διηλεκτρική μετατόπιση)Ηλεκτρική Ροή: $\Psi_e = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$ (A sec ή Cb)Συντακτική σχέση: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ όπου: $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ ϵ = διηλεκτρική σταθερά του μέσου (Farad / m) ϵ_0 = απόλυτη διηλεκτρική σταθερά του κενού, με τιμή $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ (F / m) $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ σχετική διηλεκτρική σταθερά του μέσου (αδιάστατη) χ_e = ηλεκτρική επιδεκτικότητα του μέσου (αδιάστατη)

Τα διανύσματα \vec{E} και \vec{D} είναι συγγραμικά εφ' όσον το μέγεθος ϵ_r είναι ένας απλός αριθμός .
Υπάρχουν όμως και υλικά, στα οποία το ϵ_r έχει την μορφή τανυστή και τότε τα \vec{E} και \vec{D} δεν είναι συγγραμικά. Τα υλικά αυτά λέγονται **ανισότροπα**.

β) Μαγνητικό πεδίοΈνταση μαγνητικού πεδίου: \vec{H} (A / m)Πυκνότητα μαγνητικής ροής: \vec{B} (V sec / m² ή Tesla)
(ή μαγνητική επαγωγή)Μαγνητική Ροή: $\Psi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ (V sec ή Weber)Συντακτική σχέση: $\vec{B} = \mu \vec{H}$ όπου: $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 (1 + \chi_m)$

μ = μαγνητική διαπερατότητα του μέσου (Henry / m)

μ_0 = απόλυτη μαγνητική διαπερατότητα του κενού, με τιμή $\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7}$ (H/m)

$\mu_r = 1 + \chi_m$ σχετική μαγνητική διαπερατότητα του μέσου (αδιάστατη)

χ_m = μαγνητική επιδεκτικότητα του μέσου (αδιάστατη)

Τα διανύσματα \vec{H} και \vec{B} είναι συγγραμικά εφ' όσον το μέγεθος μ_r είναι ένας απλός αριθμός . Υπάρχουν όμως και υλικά, στα οποία το μ_r έχει την μορφή τανυστή και τότε τα \vec{H} και \vec{B} δεν είναι συγγραμικά. Τα υλικά αυτά λέγονται **ανισότροπα**.

γ) Πεδίο ροής συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος μέσα σε αγωγούς

Όπως είναι γνωστό για να δημιουργηθεί ηλεκτρικό ρεύμα, πρέπει να ικανοποιούνται οι δύο ακόλουθες συνθήκες:

- να υπάρχει διαφορά δυναμικού (ηλεκτρική τάση) μεταξύ δύο σημείων
- να υπάρχουν ελεύθεροι φορείς φορτίου με δυνατότητα κίνησης ώστε να δημιουργηθεί ένας αγωγίμος δρόμος

Η ηλεκτρική τάση μεταξύ δύο σημείων, σε ένα υλικό μέσο, δημιουργείται άμεσα με την εγκατάσταση ενός ηλεκτρικού πεδίου στο μέσο αυτό. Αν το μέσο διαθέτει και ελεύθερα κινούμενους φορείς φορτίου τότε έχουμε ροή ηλεκτρικού ρεύματος.

Στην περίπτωση που το επιβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο είναι χρονικά αμετάβλητο τότε, αποδεικνύεται πειραματικά, ότι οι φορείς φορτίου κινούνται με σταθερή ταχύτητα και το ηλεκτρικό ρεύμα θα έχει **σταθερή τιμή** ή όπως λέγεται, θα είναι **συνεχές ρεύμα**.

Στο σημείο αυτό όμως κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση:

- Για να συντηρηθεί η ροή του ηλεκτρικού ρεύματος σε έναν αγωγό θα πρέπει να δρουν συνεχώς (στην περιοχή των πηγών!) οι λεγόμενες « ηλεκτροδιαχωριστικές » δυνάμεις (βλ. παραγρ 2.6.2) οι οποίες και διατηρούν την διαφορά δυναμικού στον αγωγό.

Σε αντιστοιχία με το ηλεκτρικό πεδίο όπου η συντακτική σχέση γράφεται $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, όπου \vec{E} το αίτιο και \vec{D} το αποτέλεσμα, στην περίπτωση του πεδίου ροής συνεχούς ρεύματος όπου έχουμε:

- αίτιο η ένταση ηλεκτρικού πεδίου \vec{E}
- αποτέλεσμα το ηλεκτρικό ρεύμα, που εδώ θα περιγραφεί μέσω της χωρικής πυκνότητας ρεύματος \vec{J} (πυκνότητα ροής ρεύματος)

θα πρέπει να ισχύει μια συντακτική σχέση της μορφής: (*)

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

όπου γ ένας συντελεστής που θα χαρακτηρίζει το υλικό μέσα στο οποίο γίνεται η ροή του ρεύματος. Η ανωτέρω σχέση είναι γνωστή και σαν Νόμος του Ohm (εδώ σε πεδιακή μορφή)

Ο συντελεστής γ ονομάζεται ειδική αγωγιμότητα του υλικού με μονάδες $(\Omega \text{ m})^{-1}$

Σε υλικά στα οποία το γ έχει πολύ μεγάλη τιμή (καλοί αγωγοί), η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου λαμβάνει πολύ μικρές τιμές. Στην (θεωρητική) περίπτωση άπειρης αγωγιμότητας, ή τέλει αγωγού όπως λέγεται, ($\gamma = \infty$) για πεπερασμένο \vec{J} , θα πρέπει η ένταση \vec{E} να πάρει μηδενική τιμή. Μπορεί να δειχθεί τότε, ότι στην περίπτωση αυτή η αγωγή του ρεύματος γίνεται μόνον στην επιφάνεια του αγωγού, μέσω επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος \vec{J}_s

(*) Για μια πιο λεπτομερή ανάλυση του θέματος βλ. ΑΣΚ. 2-1

Ο ακόλουθος πίνακας συνοψίζει όλες τις συντακτικές σχέσεις για τα τρία είδη πεδίων που προαναφέρθηκαν :

| Πεδίο | Αίτιο: Ένταση πεδίου | Αποτέλεσμα: Πυκνότητα ροής | Συντακτική Σχέση πυκνότητα ροής = ένταση πεδίου επί έναν συντελεστή | Ροή του πεδίου επιφανειακό ολοκλήρωμα της πυκνότητας ροής |
|--|-------------------------|-------------------------------------|---|--|
| Ηλεκτρικό | \vec{E} (V / m) | \vec{D} (A sec / m ²) | $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ | $\psi_e = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$ |
| Μαγνητικό | \vec{H} (A / m) | \vec{B} (V sec / m ²) | $\vec{B} = \mu \vec{H}$ | $\psi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ |
| Πεδίο ροής συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος | \vec{E} (V / m) | \vec{J} (A / m ²) | $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ | $i = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ |

2. 6) Ηλεκτρική τάση – Ηλεκτρεγερτική δύναμη

Οι έννοιες της ηλεκτρικής τάσης και της ηλεκτρεγερτικής δύναμης είναι πολύ σημαντικές στην θεωρία των ηλεκτρικών πεδίων, αλλά βέβαια και στην θεωρία των κυκλωμάτων.

2. 6. 1) Ηλεκτρική τάση

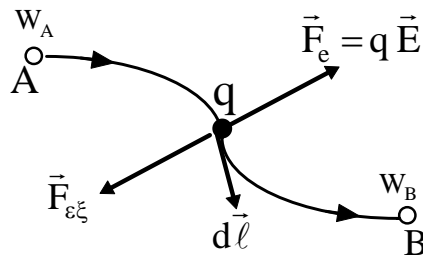
Αναφέρουμε αρχικά ότι για να οριστεί η ηλεκτρική τάση, μεταξύ δύο σημείων μέσα σε ένα χώρο όπου επικρατεί ένα ηλεκτρικό πεδίο θα πρέπει το πεδίο αυτό να είναι στατικό, δηλαδή ανεξάρτητο του χρόνου. Αυτό είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τον αυστηρό ορισμό της τάσης. Παρ' όλα αυτά όμως είναι δυνατόν, υπό ορισμένες συνθήκες, να χρησιμοποιηθεί η έννοια της τάσης και για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία.

Θα διατυπώσουμε παρακάτω τον ορισμό της ηλεκτρικής τάσης

Έστω ότι σε μία περιοχή του χώρου επικρατεί ένα **στατικό** ηλεκτρικό πεδίο με ένταση \vec{E} . Είναι γνωστό ότι για να εγκατασταθεί ένα πεδίο απαιτείται προσφορά ενέργειας η οποία αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια του πεδίου.

Αν εισάγουμε ένα φορτίο q μέσα στο πεδίο αυτό, τότε στο φορτίο θα ασκούνται δύο δυνάμεις

- η ηλεκτρική δύναμη \vec{F}_e
- η εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{εξ}$



Σχ. 2.15

Σε κάθε μετακίνηση του φορτίου μέσα στο πεδίο, από ένα σημείο A σε ένα σημείο B, με **σταθερή ταχύτητα** (άρα χωρίς μεταβολή της κινητικής ενέργειας) θα έχουμε παραγωγή ή κατανάλωση έργου από τις δύο αυτές δυνάμεις και προφανώς όταν η μία παράγει έργο ή άλλη θα καταναλώνει έργο. Παράλληλα θα έχουμε αύξηση ή μείωση της δυναμικής ενέργειας του πεδίου

Θεωρούμε λοιπόν ότι οι δύο δυνάμεις \vec{F}_e και $\vec{F}_{εξ}$ ισορροπούν (κίνηση χωρίς επιτάχυνση) και θα ισχύει:

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_{εξ}$$

Αν κατά την κίνηση του φορτίου, από το σημείο **A** στο σημείο **B**, ελαττώνεται η δυναμική ενέργεια του φορτίου αυτού (δηλαδή ουσιαστικά ελαττώνεται η δυναμική ενέργεια του πεδίου) τότε αυτό σημαίνει ότι η ηλεκτρική δύναμη του πεδίου \vec{F}_e παράγει έργο, το οποίο καταναλώνει η εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{εξ}$.

Μπορούμε να πούμε, με άλλα λόγια, ότι το ηλεκτρικό πεδίο προσφέρει ενέργεια στον εξωτερικό κόσμο με ισόποση μείωση της αποθηκευμένης δυναμικής του ενέργειας.

Αν το φορτίο q στο σημείο **A** έχει δυναμική ενέργεια W_A , και στο σημείο **B** έχει δυναμική ενέργεια W_B , και ισχύει $W_A > W_B$, τότε το παραγόμενο έργο από την **ηλεκτρική δύναμη** \vec{F}_e , κατά την μετακίνηση από το **A** στο **B**, ισούται με την διαφορά $W_A - W_B$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$W_A - W_B = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Ορίζεται ως ηλεκτρική τάση V_{AB} μεταξύ των σημείων **A** και **B** το μέγεθος:

$$V_{AB} = \frac{W_A - W_B}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \left(1 \text{ Volt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Cb}} \right)$$

Δηλαδή η ηλεκτρική τάση V_{AB} μεταξύ δύο σημείων **A** - **B**, μέσα σε ένα στατικό ηλεκτρικό πεδίο, ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της έντασης \vec{E} του πεδίου, κατά μήκος μιας καμπύλης που συνδέει τα σημεία **A** και **B** (με φορά από το **A** προς το **B**).

Προφανώς όταν $V_{AB} > 0$ τότε $W_A > W_B$ και όταν $V_{AB} < 0$ τότε $W_A < W_B$

Όπως προαναφέραμε ο ανωτέρω ορισμός της ηλεκτρικής τάσης ισχύει αυστηρά μόνον σε στατικά ηλεκτρικά πεδία. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και σε χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία αρκεί αυτά να έχουν «βραδεία» χρονική μεταβολή. Η ποσοτική έκφραση της «βραδείας μεταβολής» διατυπώνεται ως εξής:

Αν το ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλεται με μια συχνότητα f , τότε στη συχνότητα αυτή αντιστοιχεί ένα μήκος κύματος $\lambda = c / f$, όπου c η ταχύτητα του φωτός. Με δεδομένο το μήκος κύματος λ ,

συγκρίνεται το μήκος της διαδρομής $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ με το μήκος λ . Αν το μήκος κύματος λ είναι **κατά πολύ μεγαλύτερο** του μήκους της διαδρομής $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, τότε ο ορισμός της ηλεκτρικής τάσης που προαναφέρθηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ένα πολύ μικρό (πρακτικά αμελητέο) σφάλμα. Αν όμως το μήκος κύματος λ , είναι συγκρίσιμο με το μήκος της διαδρομής $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ τότε **δεν μπορεί να οριστεί** η ηλεκτρική τάση μεταξύ των σημείων A και B. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή δεν έχει έννοια η ηλεκτρική τάση V_{AB} .

Για παράδειγμα αναφέρουμε π.χ. ένα ηλεκτρικό πεδίο που έχει ημιτονοειδή χρονική μεταβολή με συχνότητα 50 Hz. Το αντίστοιχο μήκος κύματος είναι $\lambda = 6000 \text{ km}$. Είναι προφανές ότι για διαδρομές $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ της τάξεως ακόμα και μερικών εκατοντάδων μέτρων μπορεί άνετα να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της ηλεκτρικής τάσης.

2. 6. 2) Ηλεκτρεγερτική δύναμη

Η ηλεκτρική τάση, όπως είδαμε, έχει ως αίτιο δημιουργίας της την ηλεκτρική δύναμη ή συνεπακόλουθα την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη, αντίθετα, έχει ως αίτιο δημιουργίας της δυνάμεις οι οποίες αναπτύσσονται μέσα στις πηγές της ηλεκτρικής ενέργειας. Οι δυνάμεις αυτές οφείλουν την ύπαρξή τους σε χημικές, μηχανικές, μαγνητικές κ.λ.π. δράσεις, και προσδίδουν δυναμική ενέργεια στα ηλεκτρικά φορτία διαχωρίζοντας τα θετικά από τα αρνητικά φορτία. Για τον λόγο αυτό οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται και **ηλεκτροδιαχωριστικές δυνάμεις** και τις συμβολίζουμε με το σύμβολο \vec{F}_s .

Σε αντιστοιχία με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} ορίζουμε την ηλεκτρεγερτική πεδιακή ένταση \vec{E}_s ως εξής:

$$\vec{E}_s = \frac{\vec{F}_s}{q}$$

και σε αντιστοιχία με την ηλεκτρική τάση V_{AB} ορίζουμε την ηλεκτρεγερτική δύναμη e_{BA} ως εξής:

$$e_{BA} = \frac{\int_B^A \vec{F}_s \cdot d\vec{\ell}}{q} = \int_B^A \vec{E}_s \cdot d\vec{\ell}$$

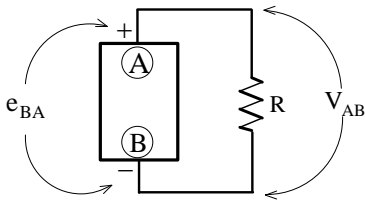
Δηλαδή η ηλεκτρεγερτική δύναμη e_{BA} μεταξύ δύο σημείων **B** - **A** , ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ηλεκτρεγερτικής πεδιακής έντασης \vec{E}_s του πεδίου, κατά μήκος μιας καμπύλης που συνδέει τα σημεία **B** και **A** (με φορά από το **B** προς το **A**).

Αναφέρουμε εδώ ότι ο όρος ηλεκτρεγερτική «δύναμη» ίσως δεν είναι απόλυτα επιτυχημένος διότι το μέγεθος e_{BA} δεν έχει καμία σχέση με «μηχανική δύναμη»

Όταν $e_{BA} > 0$ τότε η δύναμη \vec{F}_s παράγει έργο το οποίο προσδίδεται στο ηλεκτρικό πεδίο με την μορφή αύξησης της δυναμικής του ενέργειας. Άρα λοιπόν όταν $e_{BA} > 0$ τότε το σημείο **A** θα έχει μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου από το σημείο **B**.

Δηλαδή: $e_{BA} > 0$ σημαίνει: $W_A > W_B$ και $e_{BA} < 0$ σημαίνει $W_A < W_B$

Για παράδειγμα σε μια ιδανική πηγή τάσεως συνδεδεμένη με αντίσταση R θα έχουμε:



$$V_{AB} = e_{BA} \quad \text{ή} \quad V_{AB} = -e_{AB}$$

Δηλαδή το έργο που παράγει η ηλεκτροδιαχωριστική δύναμη F_s μέσα στην πηγή είναι ίσο με το έργο που παράγει η ηλεκτρική δύναμη F_e μέσα στον καταναλωτή R (και γίνεται τελικά θερμότητα)

Σχ. 2.16

Αναφέραμε στα προηγούμενα ότι η ηλεκτρεγερτική δύναμη οφείλει την ύπαρξή της σε δράσεις (δυνάμεις) μη ηλεκτρικές.

Υπάρχει όμως, όπως θα δούμε, και μία περίπτωση εμφάνισης ηλεκτρεγερτικής δύναμης με αίτιο ένα αναπτυσσόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Πρόκειται για την περίπτωση της ηλεκτρεγερτικής δύναμης εξ' επαγωγής που περιγράφεται από τον νόμο του Faraday. Σε επόμενο κεφάλαιο θα μελετηθεί πλήρως η περίπτωση αυτή.

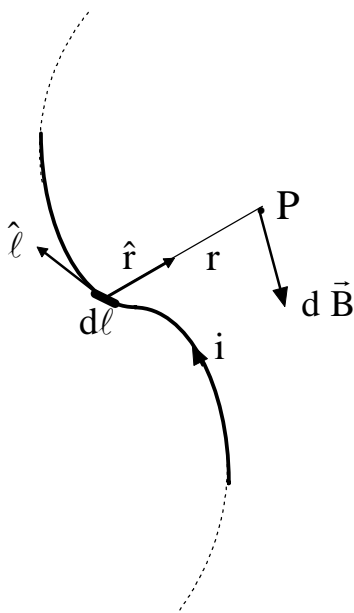
2.7) Νόμος των Biot - Savart

Ο νόμος αυτός διατυπώθηκε αφού είχε προηγηθεί το γνωστό ιστορικό πείραμα του Oersted το 1820 (απόκλιση μαγνητικής βελόνης όταν αυτή βρίσκεται κοντά σε ρευματοφόρο αγωγό). Ο νόμος αυτός «εντάχθηκε» αργότερα μέσα σε μια πιο γενικευμένη διατύπωση που ονομάστηκε νόμος του Ampere. Παρ' όλα αυτά η αρχική διατύπωση του νόμου είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις.

Ο νόμος των Biot - Savart δίνει μια μαθηματική έκφραση για το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το συνεχές (σταθερό) ρεύμα και διατυπώνεται ως εξής:

- Έστω ένας απειροστά λεπτός αγωγός (νηματοειδής αγωγός) καμπυλόγραμμου γενικά σχήματος. Ο αγωγός διαρρέεται από συνεχές ρεύμα i .

Το στοιχειώδες μήκος $d\ell$ του αγωγού (που διαρρέεται από ρεύμα i) δημιουργεί σε ένα σημείο P σε απόσταση r από τον αγωγό, στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή $d\vec{B}$ (βλ. σχ. 2.17)



Σχ. 2.17

Η τιμή του $d\vec{B}$ δίδεται από την σχέση:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i (\hat{\ell} \times \hat{r})}{r^2} d\ell$$

όπου:

$\hat{\ell}$: μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτομενικό στον αγωγό στην περιοχή του $d\ell$

\hat{r} : μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση αυτήν της ευθείας που ενώνει $d\ell$ και P, και φορά από το $d\ell$ προς το P

r : η απόσταση μεταξύ $d\ell$ και P

Το συνολικό πεδίο \vec{B} που οφείλεται σε ολόκληρο τον αγωγό υπολογίζεται από το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{(\hat{\ell} \times \hat{r})}{r^2} d\ell$$

γιατί ολόκληρος ο αγωγός σχηματίζει πάντοτε κλειστό βρόχο.

Αν μας ενδιαφέρει η συνεισφορά μόνον ενός τμήματος A-B του αγωγού τότε θα έχουμε το ολοκλήρωμα:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_A^B \frac{\hat{\ell} \times \hat{r}}{r^2} d\ell$$

2.8) Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

ΑΣΚ 2.1) Να μελετηθεί η σχέση μεταξύ χωρικής πυκνότητας ρεύματος \vec{J} και έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} στο εσωτερικό ενός μεταλλικού αγωγού.

Σε ένα ηλεκτρικά αγώγιμο υλικό ισχύει η σχέση:

$$\vec{J} = \rho \vec{u}$$

όπου \vec{J} η χωρική πυκνότητα ρεύματος, ρ η χωρική πυκνότητα κινουμένου φορτίου και \vec{u} η ταχύτητα των κινούμενων φορτίων.

Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ της χωρικής πυκνότητας ρεύματος \vec{J} και της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} , που αναπτύσσεται μέσα στο αγώγιμο υλικό και οφείλεται σε **εξωτερικά αίτια**, σκεπτόμαστε ως εξής:

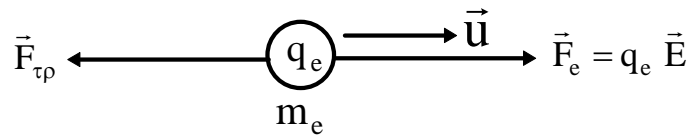
Οι φορείς φορτίου κινούνται, όπως προαναφέρθηκε, με σταθερή ταχύτητα άρα χωρίς επιτάχυνση. Επομένως η ηλεκτρική δύναμη \vec{F}_e που ασκείται σε ένα ελεύθερο φορέα φορτίου

θα πρέπει να εξισορροπείται από μια δύναμη τριβής $\vec{F}_{\tau\rho}$ η οποία «στατιστικά» αναπτύσσεται λόγω των συνεχών κρούσεων των φορέων στο κρυσταλλικό πλέγμα του αγωγού.

Θα θεωρήσουμε ότι αυτή η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας των φορέων και έχει βέβαια αντίθετη φορά. Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{F}_{\tau\rho} = -k \vec{u}$$

όπου k μια σταθερά με φυσικές διαστάσεις [kgf/sec]



Σχ. 2.18

q_e , m_e το φορτίο και η μάζα του ελεύθερου φορέα φορτίου αντίστοιχα

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.18 θα ισχύει

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{\tau\rho} = 0$$

άρα

$$q_e \vec{E} - k \vec{u} = 0$$

η τελευταία σχέση δίνει

$$\vec{u} = \frac{q_e}{k} \vec{E}$$

η σχέση αυτή συνδυαζόμενη με την $\vec{J} = \rho \vec{u}$ θα δώσει τελικά:

$$\vec{J} = \rho \frac{q_e}{k} \vec{E}$$

όπου το μέγεθος $\gamma = \rho \frac{q_e}{k}$ είναι η **ειδική αγωγιμότητα** του αγωγού και έτσι μπορούμε να

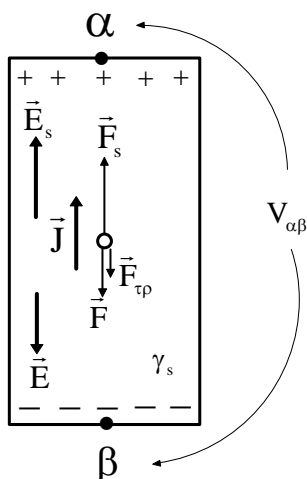
γράψουμε την τελική έκφραση

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

η οποία εκφράζει τον Νόμο του Ohm σε πεδιακή μορφή.

ΑΣΚ 2.2) Να μελετηθεί η σχέση μεταξύ χωρικής πυκνότητας ρεύματος \vec{J} και έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} στο εσωτερικό μιας ηλεκτρικής πηγής

Όπως είναι γνωστό μέσα σε μια ηλεκτρική πηγή υπάρχει η ηλεκτροδιαχωριστική πεδιακή ένταση \vec{E}_s η οποία δημιουργεί την ηλεκτροδιαχωριστική δύναμη \vec{F}_s . Επίσης, λόγω του διαχωρισμού των φορτίων αναπτύσσεται, μέσα στην πηγή, και ένα ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} με την αντίστοιχη ηλεκτρική δύναμη \vec{F}_e . Τέλος, εφ' όσον έχουμε κινούμενα φορτία, υπάρχει και εδώ η δύναμη τριβής $\vec{F}_{\tau\rho} = -k \vec{u}$ (βλ. σχ. 2.19)



Σχ. 2.19

Η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα ελεύθερο φορτίο θα είναι προφανώς μηδενική άρα θα ισχύει:

$$\vec{F}_s + \vec{F}_e + \vec{F}_{\tau\rho} = 0$$

και επειδή $\vec{F}_s = \vec{E}_s q_e$, $\vec{F}_e = \vec{E} q_e$, $\vec{F}_{\tau\rho} = -k \vec{u}$

θα πάρουμε τελικά: $q_e (\vec{E} + \vec{E}_s) - k \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \frac{q_e}{k} (\vec{E} + \vec{E}_s)$

και επειδή $\vec{J} = \rho \vec{u}$

θα προκύψει η σχέση: $\vec{J} = \rho \frac{q_e}{k} (\vec{E} + \vec{E}_s)$

$$\vec{J} = \gamma_s (\vec{E} + \vec{E}_s)$$

όπου γ_s η ειδική αγωγιμότητα του υλικού της ηλεκτρικής πηγής.

Παρατηρήσεις

α) Όταν η πηγή δεν διαρρέεται από ρεύμα (ανοικτοκυκλωμένη) θα ισχύει $\vec{J} = 0$, άρα και $(\vec{E} + \vec{E}_s) = 0$ δηλ. $\vec{E} = -\vec{E}_s$, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση εξουδετερώνει την ηλεκτροδιαχωριστική πεδιακή ένταση και έχουμε κατάσταση ισορροπίας.

β) Όταν η πηγή διαρρέεται από ρεύμα, δηλ. έχουμε $\vec{J} \neq 0$, τότε και $(\vec{E} + \vec{E}_s) \neq 0$

Στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} εξασθενεί σε κάποιο βαθμό λόγω ακριβώς της ροής φορτίων έξω από την πηγή και έτσι το πεδίο \vec{E}_s υπερिशύει του \vec{E} .

$$\text{Από την σχέση} \quad \vec{J} = \gamma_s (\vec{E} + \vec{E}_s)$$

$$\text{προκύπτει:} \quad \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma_s} - \vec{E}_s$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την διαφορά δυναμικού $V_{\alpha\beta}$ μεταξύ των δύο πόλων της πηγής θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\vec{J}}{\gamma_s} - \vec{E}_s \right) \cdot d\vec{\ell} = \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} \vec{E}_s \cdot d\vec{\ell} - \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\vec{J}}{\gamma_s} \cdot d\vec{\ell} = e_{\beta\alpha} - \int_{\beta}^{\alpha} \frac{i/S}{\gamma_s} \cdot d\ell \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο ολοκλήρωμα τέθηκε η απλοποιημένη έκφραση $J = i/S$ για την πυκνότητα ρεύματος (S η γεωμετρική διατομή του «υλικού» της πηγής)

Είναι προφανές ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\beta}^{\alpha} \frac{i/S}{\gamma_s} \cdot d\ell$ κατά το γεωμετρικό μήκος της πηγής και εφ'

όσον θεωρείται ομοιόμορφη κατανομή ρεύματος θα δώσει σαν αποτέλεσμα:

$$\int_{\beta}^{\alpha} \frac{i/S}{\gamma_s} \cdot d\ell = i \frac{1}{\gamma_s} \cdot \frac{L}{S} = i R_s$$

όπου L το γεωμετρικό μήκος της πηγής και βέβαια R_s η εσωτερική αντίσταση της πηγής

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η έκφραση για την τάση $V_{\alpha\beta}$ στα άκρα της πηγής, παίρνει τη γνωστή μορφή από τη θεωρία κυκλωμάτων:

$$V_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha} - i R_s$$

Όπου $e_{\beta\alpha}$ η ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής.

Όταν η εσωτερική αντίσταση της πηγής R_s είναι μηδενική (ιδανική κατάσταση) τότε προφανώς ισχύει :

$$V_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha}$$

ΑΣΚ 2. 3) Ρεύμα με ένταση $i = 40 \text{ Amp}$ ρέει σε χάλκινο αγωγό με διατομή $S = 4 \text{ mm}^2$. Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα u των ελευθέρων ηλεκτρονίων. Υποθέστε ότι ένα μόριο χαλκού δίνει ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο.

Δίδονται επίσης: πυκνότητα μάζας χαλκού $n_{Cu} = 8.98 \times 10^3 \text{ kgr} / \text{m}^3$

μοριακή μάζα χαλκού $m_{Cu} = 63.54 \text{ gr} / \text{mol}$

Αριθμός Avogadro $N_{Av} = 6.023 \times 10^{23} \text{ μόρια} / \text{mol}$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\vec{J} = \rho \vec{u}$

και παίρνοντας μόνο τα μέτρα των διανυσμάτων $u = \frac{J}{\rho}$

η πυκνότητα ρεύματος εύκολα υπολογίζεται

$$J = \frac{i}{S} = \frac{40 \text{ Amp}}{4 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 10^7 \text{ Amp} / \text{m}^2$$

Πρέπει να υπολογίσουμε και την πυκνότητα ελευθέρων φορτίων ρ_{Cu} (Cb / m^3) στο χαλκό.

Αμέσως φαίνεται ότι:

σε 1 m^3 χαλκού που έχει μάζα $8.98 \times 10^3 \text{ kgr}$ περιέχονται

$$N_{\text{moles Cu}} = \frac{8.98 \times 10^3 \text{ kgr}}{63.54 \times 10^{-3} \text{ kgr} / \text{mol}} = 1.4133 \times 10^5 \text{ moles (γραμμομόρια) χαλκού}$$

και δεδομένου ότι έχουμε 6.023×10^{23} μόρια / mol και το κάθε μόριο δίνει 1 ελεύθερο ηλεκτρόνιο με φορτίο $|q_e| = 1.602 \times 10^{-19}$ Cb, το συνολικό ελεύθερο ηλεκτρικό φορτίο που υπάρχει σε 1 m^3 χαλκού θα είναι:

$$q_{\text{ελευθ}} = 1.4133 \times 10^5 \text{ moles} \times 6.023 \times 10^{23} \text{ μορια} / \text{mol} \times 1.602 \times 10^{-19} \text{ Cb}$$

ή τελικά $q_{\text{ελευθ}} = 1.364 \times 10^{10} \text{ Cb}$

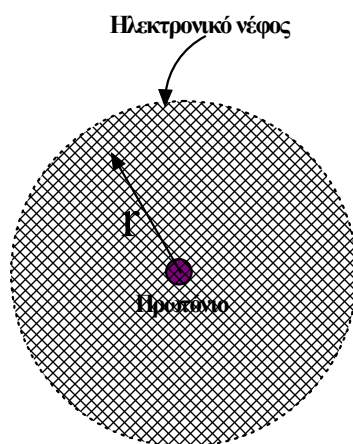
άρα η πυκνότητα ελευθέρων φορτίων ρ_{Cu} (Cb/m³) στο χαλκό θα είναι:

$$\rho_{\text{Cu}} = 1.364 \times 10^{10} \text{ Cb} / \text{m}^3$$

και η μέση ταχύτητα των φορέων (ηλεκτρονίων) θα είναι:

$$u = \frac{J}{\rho} = \frac{10^7 \text{ Amp} / \text{m}^2}{1.364 \times 10^{10} \text{ Cb} / \text{m}^3} = 7.333 \times 10^{-4} \text{ m} / \text{sec} = 0.7333 \text{ mm} / \text{sec}$$

ΑΣΚ 2. 4) Στο σχ. 2.20 δίδεται ένα απλό μοντέλο για το άτομο του Υδρογόνου



Σχ. 2.20

Στο κέντρο του ατόμου υπάρχει ένα πρωτόνιο με φορτίο $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Cb. Το ηλεκτρονικό νέφος που το περιβάλλει εκτείνεται μέχρι το άπειρο και έχει σφαιρική συμμετρία. Η χωρική πυκνότητα φορτίου του νέφους είναι:

$$\rho_e = k e^{-\frac{2r}{a}} \text{ Cb} / \text{m}^3$$

όπου k μια σταθερά και $a = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$, η ακτίνα του Bohr

Ζητείται να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς k

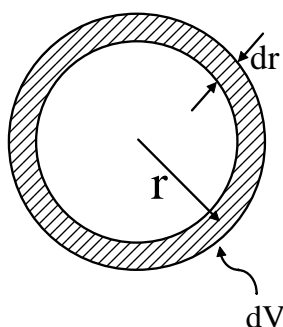
Δίδεται το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x^2 e^{bx} dx = e^{bx} \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2x}{b^2} + \frac{2}{b^3} \right)$

Όπως είναι προφανές η χωρική πυκνότητα φορτίου εξαρτάται μόνον από την ακτινική απόσταση r . Το συνολικό φορτίο ενός ατόμου πρέπει να είναι μηδενικό άρα θα πρέπει:

$$\iiint_{\substack{\text{ολος} \\ \text{ο χωρος}}} \rho_e dV + q_e = 0 \quad \text{ή} \quad \iiint_{\substack{\text{ολος} \\ \text{ο χωρος}}} \rho_e dV = -q_e$$

Το τριπλό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί σχετικά εύκολα λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζει η συνάρτηση $\rho_e(r)$.

Για να υπολογίσουμε τον στοιχειώδη όγκο dV σκεπτόμαστε ως εξής:



Σχ. 2.21

Ένα σφαιρικό κέλυφος με πάχος dr και μέση ακτίνα r θα έχει στοιχειώδη όγκο

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

άρα το ολοκλήρωμα $\iiint_{\substack{\text{ολος} \\ \text{ο χωρος}}} \rho_e dV$ γράφεται

$$\iiint_{\substack{\text{ολος} \\ \text{ο χωρος}}} \rho_e dV = \int_0^{\infty} k e^{-\frac{2r}{\alpha}} 4\pi r^2 dr$$

και χρησιμοποιώντας το δεδομένο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int_0^{\infty} k e^{-\frac{2r}{\alpha}} 4\pi r^2 dr = \left[4\pi k e^{-\frac{2r}{\alpha}} \left(-\frac{r^2 \alpha}{2} + \frac{2\alpha^2 r}{4} - \frac{2\alpha^3}{8} \right) \right]_0^{\infty} = 4\pi k \frac{2\alpha^3}{8}$$

και επειδή πρέπει να ισχύει

$$\int_0^{\infty} k e^{-\frac{2r}{\alpha}} 4\pi r^2 dr = -q_e \quad \text{άρα} \quad 4\pi k \frac{2\alpha^3}{8} = -q_e$$

προκύπτει αμέσως ότι

$$k = -\frac{q_e}{\pi \alpha^3} = -\frac{1.602 \times 10^{-19} \text{ Cb}}{\pi \cdot (5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^3} = -3.42 \times 10^{11} \text{ Cb / m}^3$$

ΑΣΚ 2.5) Σε σφαίρα με ακτίνα α υπάρχει κατανεμημένο ηλεκτρικό φορτίο με χωρική πυκνότητα

$$\rho(r, \vartheta) = k r \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (\text{Cb / m}^3)$$

όπου k μία σταθερά. Να υπολογιστεί το συνολικό φορτίο Q εντός της σφαίρας.

Το φορτίο Q θα δίδεται από το ολοκλήρωμα:

$$Q = \iiint_V \rho dV = \int_0^{\alpha} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} k r \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

η ως προς φ ολοκλήρωση εκτελείται αμέσως διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι ανεξάρτητη του φ . Άρα:

$$Q = \int_0^{\alpha} \int_0^{\pi} 2\pi k r^3 \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin \vartheta dr d\vartheta$$

Για να εκτελέσουμε στη συνέχεια την ως προς ϑ ολοκλήρωση χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική σχέση:

$$\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin \vartheta = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right]$$

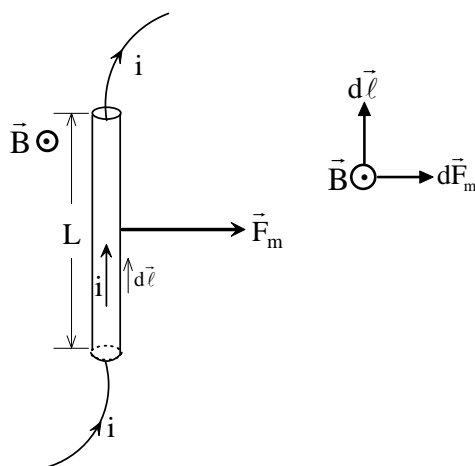
άρα:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\alpha} \int_0^{\pi} 2\pi k r^3 \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right] dr d\vartheta = \int_0^{\alpha} \pi k r^3 dr \left[-\frac{2}{3} \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right]_0^{\pi} \\ &= \int_0^{\alpha} \pi k r^3 dr (-0 - 0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{7\pi}{6} k \int_0^{\alpha} r^3 dr = \frac{7\pi}{6} k \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\alpha} = \frac{7\pi k \alpha^4}{24} \text{ Cb} \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ
ΔΥΝΑΜΗΣ LORENTZ

3.1) Δύναμη που ασκείται σε ευθύγραμμο αγωγό μήκους L εντός πεδίου με μαγνητική επαγωγή \vec{B}

Έστω ευθύγραμμος αγωγός με μήκος L ο οποίος διαρρέεται από συνεχές ρεύμα i και βρίσκεται μέσα πεδίο μαγνητικής επαγωγής \vec{B} . Το διάνυσμα $d\vec{\ell}$ εκφράζει την φορά του ρεύματος i και στην περίπτωση μας είναι κάθετο στο διάνυσμα \vec{B} . Η σχετική γεωμετρία φαίνεται και στο σχήμα 3.1



Σχ. 3.1

Η σχέση που δίνει τη στοιχειώδη δύναμη $d\vec{F}_m$ για ένα στοιχειώδες μήκος $d\ell$ του αγωγού είναι:

$$d\vec{F}_m = i (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

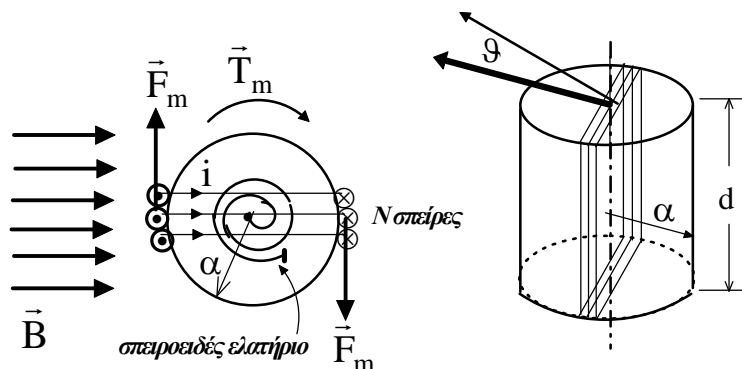
λόγω της καθετότητας των διανυσμάτων $d\vec{\ell}$ και \vec{B} , εύκολα προκύπτει ότι η φορά της δύναμης $d\vec{F}_m$ θα είναι όπως στο σχήμα, και το μέτρο της θα είναι $dF_m = B i d\ell$

Για να υπολογίσουμε την ολική δύναμη \vec{F}_m για το μήκος L του αγωγού θα ολοκληρώσουμε το μέγεθος της στοιχειώδους δύναμης $d\vec{F}_m$ για όλο το μήκος L . Προφανώς, λόγω της ευθύγραμμης μορφής του αγωγού, η φορά της \vec{F}_m θα είναι ίδια με αυτήν της $d\vec{F}_m$. Το μέτρο της \vec{F}_m θα είναι:

$$F_m = \int_0^L dF_m = \int_0^L B i d\ell = B i L$$

3.2) Όργανο κινητού πηνίου

Τα όργανα κινητού πηνίου χρησιμοποιούνται ευρύτατα στις ηλεκτρικές μετρήσεις. Στο σχ. 3.2 φαίνεται η κατασκευαστική δομή ενός οργάνου κινητού πηνίου. Σε ένα κύλινδρο με ακτίνα a και ύψος d είναι περιτυλιγμένες N σπείρες από αγωγίμο σύρμα . Ο κύλινδρος βρίσκεται μέσα σε πεδίο με μαγνητική επαγωγή \vec{B} , και μπορεί να περιστρέφεται περί τον άξονά του. Στην περιστροφή του κυλίνδρου αντιτίθεται ένα σπειροειδές ελατήριο. Ο δείκτης του οργάνου είναι στερεωμένος επάνω στον κύλινδρο.



Σχ 3.2

Όπως φαίνεται και από το σχήμα και λόγω της καθετότητας του \vec{B} με τη διεύθυνση του ρεύματος, σε κάθε αγωγό, μήκους d , θα ασκείται δύναμη με μέτρο

$$F_m = i d B$$

και φορά όπως στο σχήμα. Άρα σε N αγωγούς η δύναμη θα είναι

$$F_{m,ολ} = N i d B$$

Όπως βλέπουμε αναπτύσσεται ένα ζεύγος δυνάμεων. Η ροπή του ζεύγους θα έχει μέτρο

$$T_m = F_{m,ολ} 2a = 2a d N i B$$

Η ροπή αυτή τείνει να περιστρέψει τον κύλινδρο σύμφωνα με την φορά που φαίνεται στο σχήμα. Στη ροπή αυτή αντιτίθεται η ροπή του ελατηρίου η οποία ακολουθεί την γραμμική σχέση

$$T_{ελατ} = k \vartheta$$

όπου k μία σταθερά και ϑ η γωνία στροφής.

Στην κατάσταση ισορροπίας θα ισχύει: $T_m = T_{ελατ}$

Άρα:

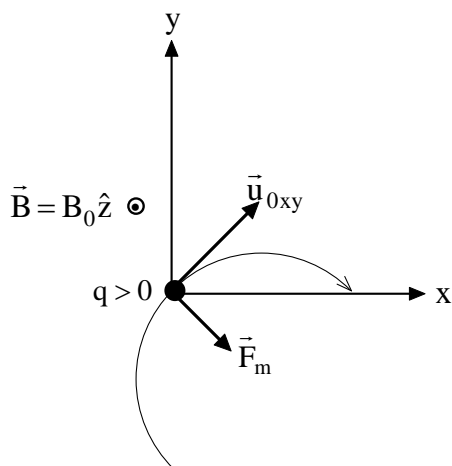
$$k\vartheta = 2a d N i B$$

και τελικά η στροφή του δείκτη σε (μοίρες / Amp) θα είναι

$$\frac{\vartheta}{i} \text{ (μοίρες / Amp)} = \frac{2a d N B}{k}$$

3.3) Κίνηση φορτίου q σε ομογενές μαγνητοστατικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή \vec{B}

Έστω ένα σωματίδιο με μάζα m και φορτίο q το οποίο εισέρχεται με ταχύτητα \vec{u}_0 μέσα σε χώρο που επικρατεί πεδίο \vec{B} . Η γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στο σχήμα 3.3



Σχ. 3.3

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $q > 0$ και ότι η ταχύτητα \vec{u}_0 αναλύεται σε δύο συνιστώσες.

$$\vec{u}_0 = \vec{u}_{0xy} + u_{0z} \hat{z}$$

Η συνιστώσα \vec{u}_{0xy} είναι κάθετη στο \vec{B} , ενώ η συνιστώσα $u_{0z} \hat{z}$ είναι παράλληλη στο \vec{B} και επομένως δεν επηρεάζεται από αυτό. Άρα αρχικά συμπεραίνουμε ότι η κίνηση κατά τον z-άξονα είναι ομαλή ευθύγραμμη με ταχύτητα $u_{0z} \hat{z}$.

Στο επίπεδο x-y θα αναπτυχθεί η μαγνητική δύναμη

$$\vec{F}_m = q (\vec{u}_{0xy} \times \vec{B})$$

Η δύναμη αυτή θα είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα \vec{u}_{0xy} άρα θα δρα ως κεντρομόλος.

Συνεπώς η κίνηση του σωματιδίου στο x-y επίπεδο θα είναι ομαλή κυκλική.

Θα ισχύουν οι σχέσεις (εδώ χρησιμοποιούμε τα μέτρα των δυνάμεων)

$$F_m = \frac{m u_{0xy}^2}{r} = q u_{0xy} B_0$$

όπου r είναι η ακτίνα περιστροφής του σωματιδίου.

$$\text{άρα} \quad \omega = \frac{u_{0xy}}{r} = \frac{q B_0}{m}$$

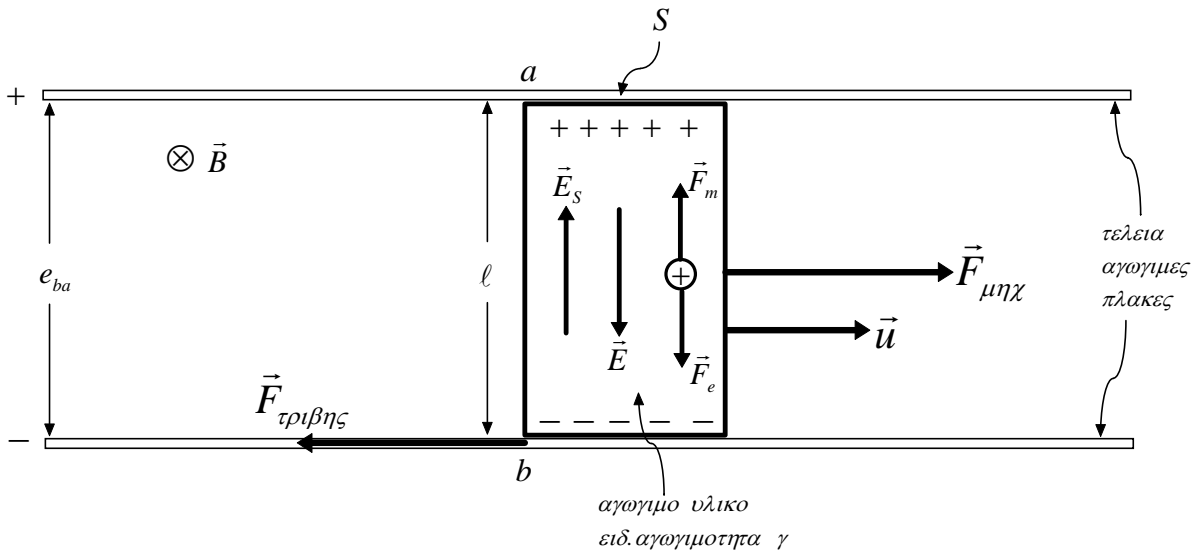
Όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής

Συνδυάζοντας τις δύο κινήσεις που εκτελεί το σωματίδιο συμπεραίνουμε ότι η κίνηση του είναι μια σπειροειδής καμπύλη στο χώρο.

3. 4) Αρχή λειτουργίας ηλεκτρικής γεννήτριας

Στις ηλεκτρικές γεννήτριες εφαρμόζουμε μηχανικές δυνάμεις θέτοντας σε κίνηση αγωγούς που βρίσκονται μέσα σε πεδία \vec{B} . Τότε στα ελεύθερα φορτία των αγωγών αναπτύσσονται δυνάμεις Lorentz οι οποίες δρουν ως ηλεκτροδιαχωριστικές (διαχωρίζουν τα θετικά από τα αρνητικά φορτία, δίνοντάς τους ηλεκτρική ενέργεια). Το αποτέλεσμα είναι να αναπτυχθεί ηλεκτρεγερτική δύναμη και επομένως να έχουμε λειτουργία ηλεκτρικής πηγής (γεννήτριας). Στο σχήμα 3. 4 φαίνεται ένα απλοποιημένο μοντέλο ηλεκτρικής γεννήτριας.

3. 4. 1) Λειτουργία χωρίς φορτίο



Σχ.3.4

Τεμάχιο αγωγού μήκους ℓ και ειδικής αγωγιμότητας γ κινείται με σταθερή ταχύτητα \vec{u} εντός πεδίου \vec{B} και βρίσκεται συνεχώς σε επαφή με δύο τέλεια αγωγίμες πλάκες. Το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής με κάθε πλάκα είναι S . Θεωρούμε ότι υπάρχει δύναμη τριβής $\vec{F}_{\text{τριβης}}$ η οποία σε κάθε χρονική στιγμή είναι αντίθετη από την κινούσα δύναμή $\vec{F}_{\mu\chi}$ δηλαδή

$$\vec{F}_{\mu\chi} = -\vec{F}_{\text{τριβης}}$$

και έτσι εξασφαλίζεται ότι έχουμε κίνηση με σταθερή ταχύτητα \vec{u}

Ας θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο αγωγός φέρει **θετικά** ελεύθερα φορτία (πρόκειται για εφαρμογή του γνωστού κανόνα της συμβατικής φοράς ρεύματος). Σε ένα ελεύθερο θετικό φορτίο του αγωγού εφαρμόζεται μαγνητική δύναμη \vec{F}_m όπου:

$$\vec{F}_m = q_e (\vec{u} \times \vec{B}) \quad \text{όπου } q_e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Cb}$$

Η φορά της δύναμης \vec{F}_m θα είναι προς τα επάνω (βλ. σχ. 3.4)

Εύκολα προκύπτει ότι θα έχουμε συσσώρευση θετικών φορτίων στην άνω επιφάνεια και συσσώρευση αρνητικών φορτίων στην κάτω επιφάνεια του αγωγού. Επομένως η δύναμη \vec{F}_m δρα ως ηλεκτροδιαχωριστική δύναμη και δημιουργεί την ηλεκτροδιαχωριστική πεδιακή ένταση \vec{E}_s .

Η συσσώρευση όμως αντιθέτων φορτίων, στα δύο άκρα του αγωγού θα δημιουργήσει, μέσα στον αγωγό, ένα ηλεκτρικό πεδίο με ένταση \vec{E} και φορά όπως στο σχ. 3.4

Το πεδίο \vec{E} ασκεί στα ελεύθερα φορτία του αγωγού μια ηλεκτρική δύναμη \vec{F}_e . Συνεπώς σε κάθε ελεύθερο φορτίο θα ασκούνται δύο δυνάμεις η μαγνητική δύναμη \vec{F}_m και η ηλεκτρική δύναμη \vec{F}_e . Στις δύο αυτές δυνάμεις αντιστοιχούν οι δύο πεδιακές εντάσεις \vec{E}_s και \vec{E} .

Σε κάποια στιγμή θα επέλθει μια κατάσταση ισορροπίας κατά την οποία η δύναμη \vec{F}_e θα είναι αντίθετη από την δύναμη \vec{F}_m , η οποία όπως προαναφέραμε δρα ως ηλεκτροδιαχωριστική.

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0 \quad \eta \quad \vec{F}_e = -\vec{F}_m$$

και αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε: $\vec{E} = -\vec{E}_s$

$$\text{άρα:} \quad q_e \vec{E} = -q_e (\vec{u} \times \vec{B}) \quad \eta \quad \vec{E} = -(\vec{u} \times \vec{B})$$

και συνεπώς η ηλεκτροδιαχωριστική πεδιακή ένταση \vec{E}_s θα είναι $\vec{E}_s = -\vec{E} = \vec{u} \times \vec{B}$.

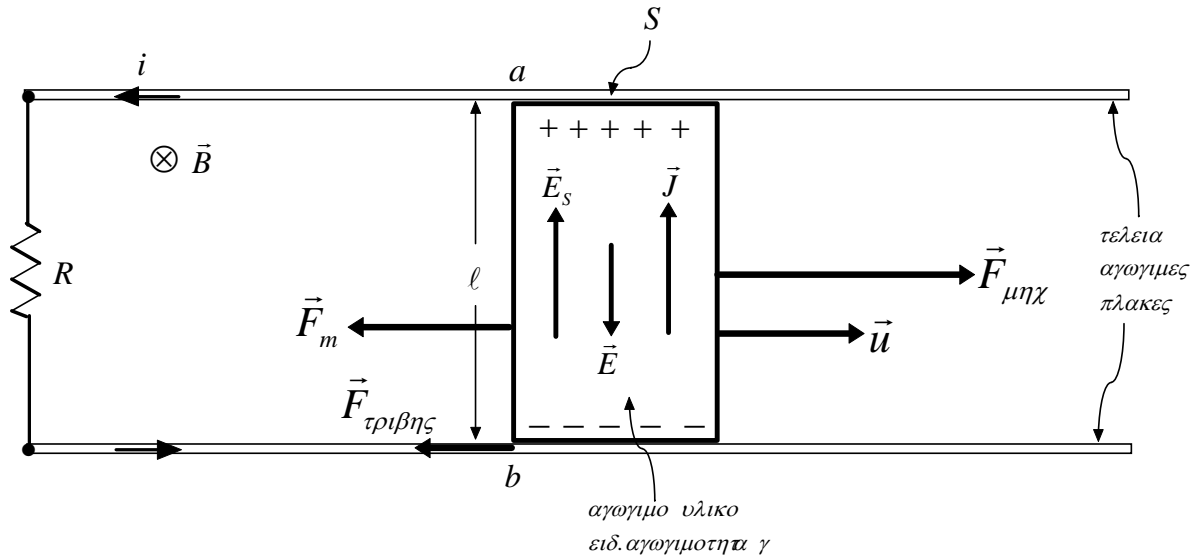
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη e_{ba} , λόγω της απλής γεωμετρίας, θα είναι

$$e_{ba} = \int_b^a \vec{E}_s \cdot d\vec{\ell} = \int_b^a (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = u B \ell$$

Δεν θα κυκλοφορήσει ρεύμα διότι δεν υπάρχει συνδεδεμένο φορτίο στη γεννήτρια.

3. 4. 2) Λειτουργία με φορτίο

Έστω τώρα ότι συνδέουμε μία αντίσταση R στα άκρα των δύο τέλειων αγωγών. (βλέπε σχήματα 3.5α και 3.5β όπου φαίνεται και το ισοδύναμο κύκλωμα της γεννήτριας)

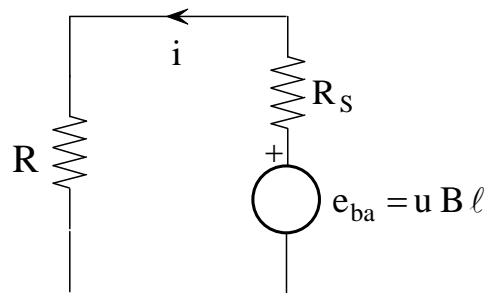


Σχ. 3.5α

Στην περίπτωση αυτή θα κυκλοφορήσει ηλεκτρικό ρεύμα (με τη φορά του σχήματος) . Δεν θα ισχύει τώρα η σχέση $\vec{E} + \vec{E}_s = 0$ διότι , λόγω της διαρροής φορτίων προς τα έξω , το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} εξασθενεί ενώ το \vec{E}_s παραμένει σταθερό (εφ' όσον $\vec{u} = \text{σταθερό}$) Προφανώς θα ισχύει ο νόμος του Ohm

$$\vec{J} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_s) \neq 0$$

Το ρεύμα i θα δίνεται από τη σχέση $i = \frac{e_{ba}}{R + R_s}$ όπου $R_s = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{S}$



Σχ. 3.5β

Όπου R_s αντίσταση του τεμαχίου αγωγού (εσωτερική αντίσταση της γεννήτριας)

Τώρα όμως έχουμε την περίπτωση αγωγού μήκους ℓ που διαρρέεται από ρεύμα i και ευρίσκεται σε πεδίο \vec{B} . Προφανώς θα αναπτυχθεί δύναμη Lorentz \vec{F}_m

(ΠΡΟΣΟΧΗ! η δύναμη αυτή δεν έχει σχέση με την δύναμη \vec{F}_m , που αναφέρθηκε στα προηγούμενα να επιδρά στα ηλεκτρόνια του αγωγού)

Η δύναμη αυτή θα έχει φορά αντίθετη από την κίνηση όπως εύκολα προκύπτει. Το μέτρο της δύναμης θα είναι , κατα τα γνωστά.

$$F_m = B i \ell$$

Στην κατάσταση ισορροπίας (κίνηση με σταθερή ταχύτητα) θα ισχύει

$$\vec{F}_{μηχ} = -\vec{F}_{τριβης} - \vec{F}_m$$

3. 4. 3) Ισοζύγιο ισχύος της γεννήτριας

Παρακάτω θα κάνουμε ένα ισοζύγιο ισχύος της γεννήτριας υπό φορτίο.

Στο σύστημα προσφέρεται απο τον «εξωτερικό κόσμο» **μηχανική ισχύς**

$$P_{μηχ} = F_{μηχ} u$$

Η **μηχανική ισχύς που απορροφάται** θα είναι :

$$(F_m + F_{τριβης})u = (B i \ell)u + F_{τριβης}u = (u B \ell)i + F_{τριβης}u = e_{ba} i + F_{τριβης}u$$

Παρατηρούμε ότι $P_{ηλ} = e_{ba} i$ είναι η ισχύς που μετατρέπεται σε ηλεκτρική

$P_{τριβης} = F_{τριβης}u$ είναι η ισχύς που χάνεται ως απώλεια λόγω τριβών

Η καθαρή ηλεκτρική ισχύς μπορεί να γραφεί ως εξής

$$P_{ηλ} = e_{ba} i = i^2 (R + R_s) = i^2 R + i^2 R_s$$

όπου $P_{ηλ, ωφελ} = i^2 R$ είναι η ωφέλιμη ισχύς στο φορτίο R

και $P_{ηλ, απωλ} = i^2 R_s$ είναι η ισχύς ωμικών απωλειών στην εσωτερική αντίσταση της γεννήτριας.

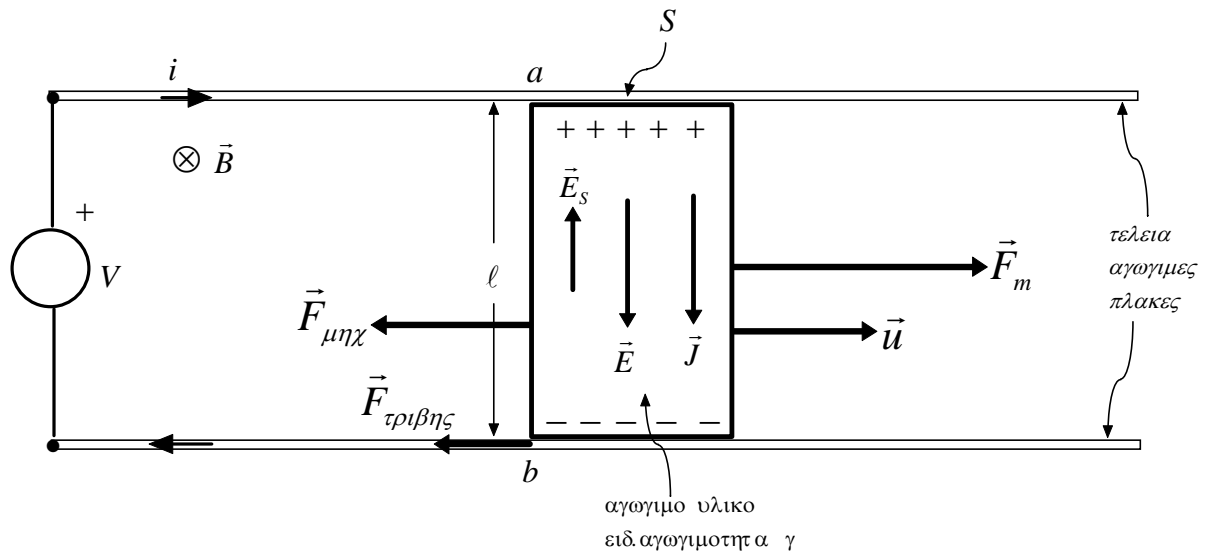
3.5) Αρχή λειτουργίας ηλεκτρικού κινητήρα

3.5.1) Εισαγωγικά

Αναφερόμαστε και πάλι στην διάταξη της ηλεκτρικής γεννήτριας. Αν εφαρμόσουμε μια εξωτερική τάση V (βλ. σχήμα 3.6) και η τιμή της τάσης αυτής είναι μεγαλύτερη από την ηλεκτρεγερτική δύναμη e_{ba} (στην περίπτωση αυτή ονομάζεται αντί-ηλεκτρεγερτική δύναμη) τότε θα έχουμε μια ροή ρεύματος i με φορά όπως στο σχήμα 3.6.

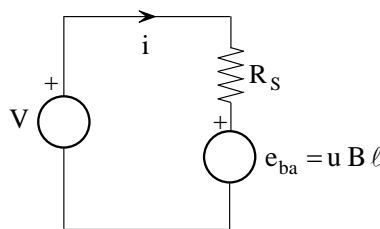
Έχουμε τώρα την περίπτωση αγωγού τοποθετημένου μέσα σε μαγνητικό πεδίο με επαγωγή B , και διαρρεόμενου από ρεύμα i . Προφανώς θα αναπτυχθεί μαγνητική δύναμη Lorentz \vec{F}_m με φορά όπως στο σχήμα.

Η δύναμη \vec{F}_m μπορεί να μετακινήσει το σημείο εφαρμογής μιας μηχανικής δύναμης $\vec{F}_{μηχ}$, και έτσι να προκαλέσει κατανάλωση έργου (ή ισχύος) από την $\vec{F}_{μηχ}$. Την ισχύ αυτή προφανώς την κερδίζει ο «εξωτερικός κόσμος» ενώ η δύναμη \vec{F}_m παράγει τώρα ισχύ.



Σχ. 3.6

Το ισοδύναμο κύκλωμα του ηλεκτρικού κινητήρα θα είναι το παρακάτω:



Σχ. 3.7

όπου το ρεύμα i θα είναι:

$$i = \frac{V - e_{ba}}{R_s} \quad \mu\epsilon \quad V > e_{ba}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Η παρακάτω ανάλυση αναφέρεται στη «μόνιμη κατάσταση» δηλαδή δεν εξετάζεται εδώ η εκκίνηση του κινητήρα

Στην κατάσταση ισορροπίας (κίνηση με σταθερή ταχύτητα) θα ισχύει

$$\vec{F}_m = -\vec{F}_{\text{τριβης}} - \vec{F}_{\text{μηχ}}$$

3. 5. 2) Ισοζύγιο ισχύος του ηλεκτρικού κινητήρα

Παρακάτω εξετάζουμε το ισοζύγιο ισχύος του συστήματος

Η πηγή V δίνει **ηλεκτρική ισχύ**

$$P_{\eta\lambda} = V i$$

και η **ηλεκτρική ισχύς που απορροφάται** θα είναι

$$\begin{aligned} e_{ba} i + i^2 R_s &= (u B \ell) i + i^2 R_s = (B i \ell) u + i^2 R_s = \\ &= F_m u + i^2 R_s = (F_{\text{μηχ}} + F_{\text{τριβης}}) u + i^2 R_s = F_{\text{μηχ}} u + F_{\text{τριβης}} u + i^2 R_s \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$P_{\text{μηχ}} = F_{\text{μηχ}} u \quad \text{είναι η ωφέλιμη μηχανική ισχύς}$$

$$P_{\text{τριβης}} = F_{\text{τριβης}} u \quad \text{είναι η ισχύς που χάνεται ως απώλεια λόγω τριβών}$$

$$P_{\eta\lambda. \text{απωλ}} = i^2 R_s \quad \text{είναι η ισχύς ωμικών απωλειών στην εσωτερική αντίσταση του κινητήρα.}$$

Ο βαθμός απόδοσης του κινητήρα θα είναι

$$n = \frac{P_{\text{μηχ}}}{P_{\eta\lambda}} = \frac{F_{\text{μηχ}} u}{V i}$$

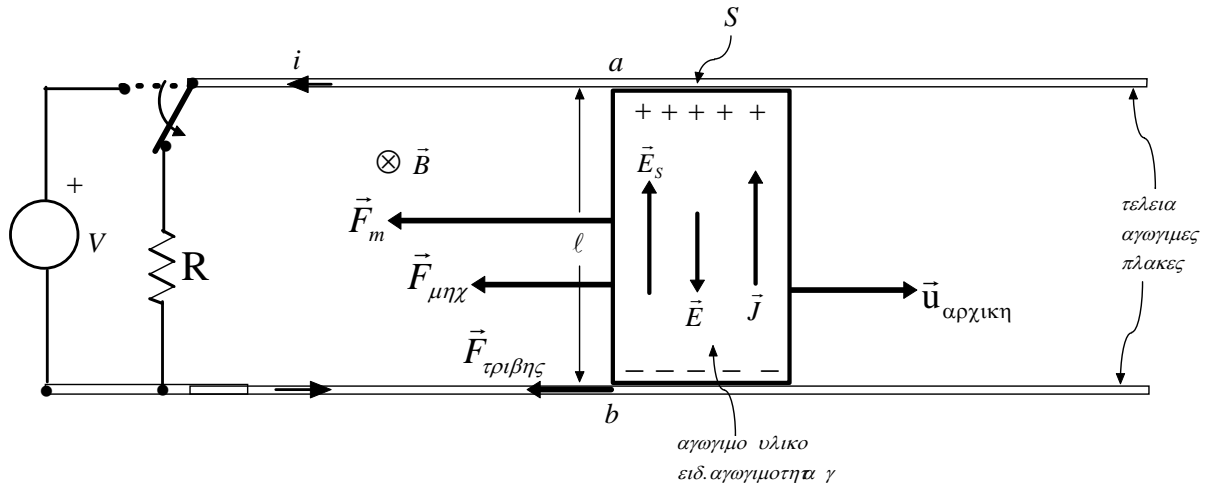
Συνοψίζοντας τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις αναφέρουμε ξανά τα ακόλουθα:

Λειτουργία ηλεκτρικής γεννήτριας → Κίνηση (με κάποια εξωτερική μηχανική δύναμη)
αγωγών μέσα σε μαγνητικό πεδίο → Ανάπτυξη
ηλεκτρεγερτικής δύναμης e

Λειτουργία ηλεκτρικού κινητήρα → Ρευματοφόρος αγωγός μέσα σε μαγνητικό πεδίο →
Ανάπτυξη μηχανικής δύναμης

3. 6) Αρχή λειτουργίας ηλεκτρικής πέδησης

Θεωρούμε ότι βρισκόμαστε στη λειτουργία κινητήρα. Αν διακόψουμε την παροχή τάσης V από την πηγή και συνδέσουμε στα άκρα $\alpha - \beta$ μια ωμική αντίσταση R (βλ. Σχ. 3.8) τότε θα συμβούν τα ακόλουθα:



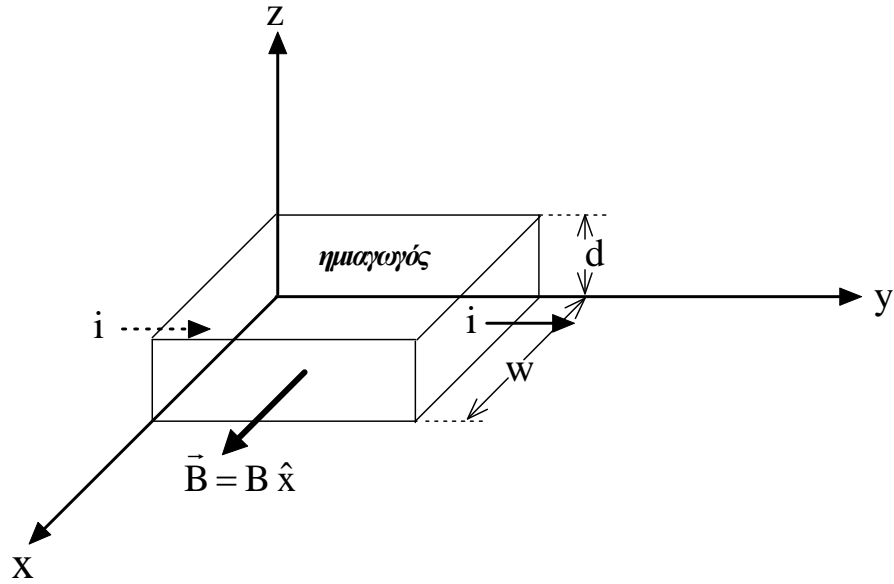
Σχ. 3.8

- Το κινούμενο αγώγιμο σώμα θα έχει ,την στιγμή της διακοπής της τάσεως V , μια αρχική ταχύτητα $u_{αρχικη}$ προς τα δεξιά. Αυτό θα έχει σαν συνέπεια τη λειτουργία ηλεκτρικής γεννήτριας **υπό φορτίο R** (βλ. παραγρ. 3.4.2)
- Η φορά του ρεύματος i θα αντιστραφεί και θα αναπτυχθεί δύναμη Lorentz με φορά αντίθετη στην κίνηση.
- Επειδή όμως **δεν** υπάρχει τώρα κινούσα εξωτερική δύναμη (όπως στην περίπτωση της παργρ 3.4.2) είναι προφανές ότι το αγώγιμο σώμα θα εκτελέσει ομαλή επιβραδυνόμενη κίνηση και τελικά θα σταματήσει.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για την πέδηση ηλεκτρικών σιδηροδρόμων.

3. 7) Φαινόμενο Hall

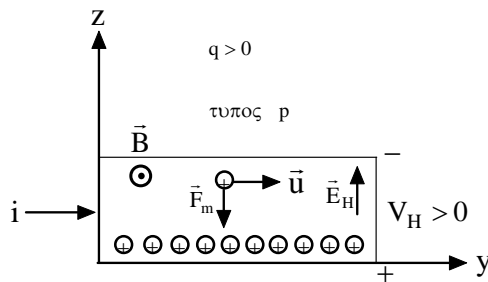
Σύμφωνα με το φαινόμενο αυτό όταν ένα ορθογώνιο τεμάχιο ημιαγωγού (τύπου p ή τύπου n), που διαρρέεται από συνεχές ρεύμα i , τεθεί μέσα σε πεδίο \vec{B} κάθετο στη διεύθυνση του ρεύματος, παρατηρείται η ανάπτυξη τάσης V_H (τάση Hall) μεταξύ των απέναντι εδρών του ορθογωνίου. Η σχετική γεωμετρία φαίνεται στο σχήμα 3.9



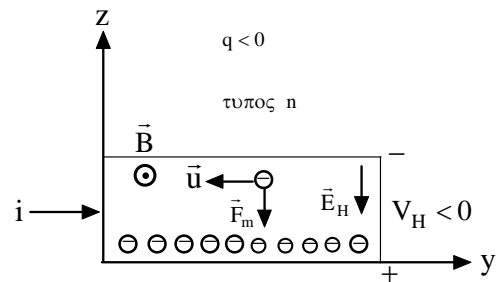
Σχ. 3.9

Το φαινόμενο εξηγείται εύκολα με βάση τη δύναμη Lorentz που ασκείται στα κινούμενα φορτία πλειονότητας του ημιαγωγού. (οπές με θετικό φορτίο για ημιαγωγό τύπου p , ηλεκτρόνια με αρνητικό φορτίο για ημιαγωγό τύπου n)

Παρατηρώντας τα σχήματα 3.10α , 3.10β προκύπτει εύκολα ότι σε κάθε περίπτωση οι φορείς πλειονότητας συγκεντρώνονται στην κάτω πλευρά ($z = 0$) του ορθογωνίου. Επομένως το πρόσημο της τάσης V_H (με την σημειούμενη στο σχήμα φορά αναφοράς) μας δίνει και τον τύπο του ημιαγωγού. Αν $V_H > 0$ έχουμε τύπο p ενώ αν $V_H < 0$ έχουμε τύπο n



Σχ. 3.10α



Σχ. 3.10β

Στην κατάσταση ισορροπίας η ένταση του πεδίου που δημιουργείται θα έχει μέτρο

$$E_H = \frac{V_H}{d} = u B$$

Η πυκνότητα του ρεύματος θα έχει μέτρο $J = \rho u = \frac{i}{w d}$ άρα $u = \frac{i}{\rho w d}$

Επίσης θα ισχύει:

$$V_H = E_H d = B u d = \frac{B i d}{\rho w d} = \frac{B i}{\rho w}$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι μετρώντας τα μεγέθη V_H , B , i μπορούμε να βρούμε την χωρική πυκνότητα φορτίου ρ

Επίσης άλλη σημαντικότερη εφαρμογή είναι η μέτρηση της μαγνητικής επαγωγής B , μέσω της μέτρησης της τάσης V_H (με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η πυκνότητα ρ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

4.1) Εισαγωγή

Οι εξισώσεις Maxwell αποτελούν τη βάση όλης της Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας και παρουσιάστηκαν από τον Βρετανό Φυσικό και Μαθηματικό, καθηγητή του Πανεπιστημίου του Cambridge, James Clerk Maxwell (1831 – 1879), στο βιβλίο του “A Treatise on Electricity and Magnetism” που εκδόθηκε στην Οξφόρδη το 1873. Ο Maxwell επεξεργάστηκε τους νόμους του Ηλεκτρισμού και Μαγνητισμού που είχαν διατυπωθεί στα προηγούμενα χρόνια από τους Oersted, Ampere, Faraday και πολλούς άλλους ερευνητές και κατάφερε να παρουσιάσει ένα σύνολο τεσσάρων εξισώσεων που περιγράφουν **όλα** τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα και έτσι θεωρείται ο θεμελιωτής της Επιστήμης του Ηλεκτρομαγνητισμού. Η τεράστια συμβολή του Maxwell έγκειται στο ότι:

α) Οι εξισώσεις που διατύπωσε έχουν γενικότατη μορφή, αυστηρή μαθηματική διατύπωση και έτσι «συγκεντρώνουν» πολλούς νόμους του Ηλεκτρομαγνητισμού που έως τότε ήταν διάσπαρτοι (όπως π.χ. ο νόμος του Coulomb, ο νόμος Biot – Savart κ.λ.π.)

β) Ο Maxwell διατύπωσε για πρώτη φορά την υπόθεση ότι ένα **μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο παράγει ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο**. Επειδή ήταν, ήδη, τότε γνωστό το αντίστροφο φαινόμενο (μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο παράγει μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο) η υπόθεση του Maxwell οδήγησε, θεωρητικά, στη ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Η πειραματική επαλήθευση της υποθέσεως του Maxwell, και η ανακάλυψη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έγινε το 1888 από τον Γερμανό Φυσικό Heinrich Hertz (1857-1894)

Παρακάτω διατυπώνονται οι εξισώσεις του Maxwell στην ολοκληρωτική τους μορφή, δηλαδή με την χρήση επιφανειακών και επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων. Πριν γίνει όμως αυτό θα αναφέρουμε κάποιες στοιχειώδεις έννοιες σχετικές με επιφάνειες και καμπύλες στον χώρο.

4.2) Επιφάνειες και καμπύλες στον χώρο

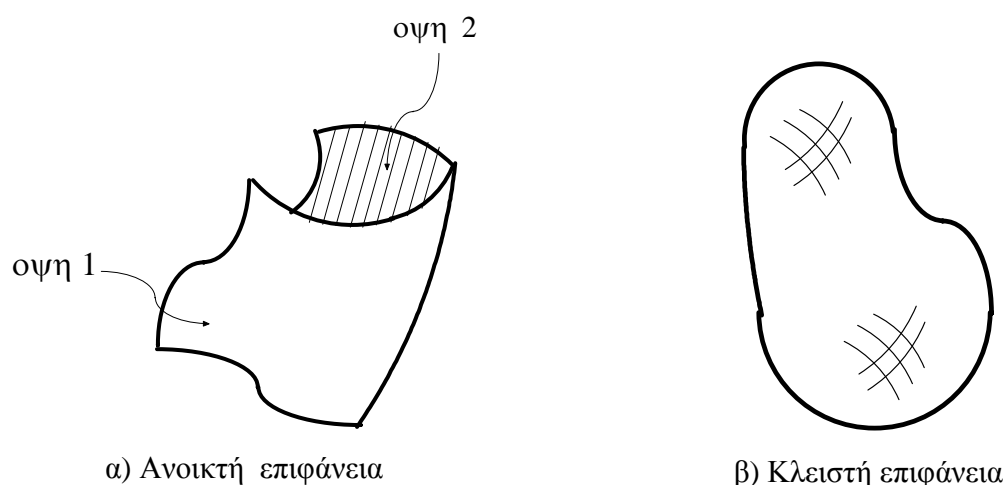
Η έννοια της επιφάνειας θεωρείται γενικά γνωστή. Επίσης είναι γνωστό ότι κάθε επιφάνεια έχει δύο όψεις. Μια οποιαδήποτε επιφάνεια που εκτείνεται στον χώρο, μπορεί να ανήκει σε μία από τις δύο ακόλουθες κατηγορίες

α) Ανοικτή επιφάνεια

Στις επιφάνειες αυτές μπορούμε να μεταβούμε από την μία όψη στην άλλη χωρίς να «τρυπήσουμε» την επιφάνεια (βλ. σχήμα 4.1.α)

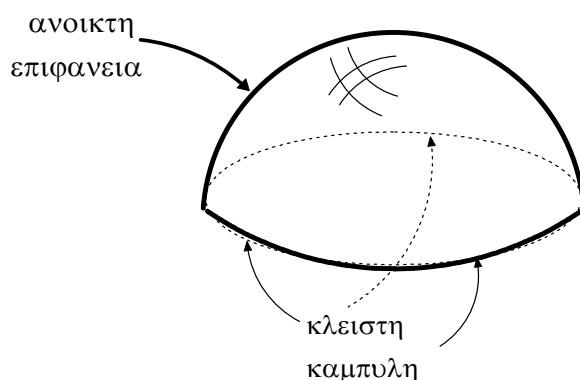
β) Κλειστή επιφάνεια

Στις επιφάνειες αυτές για να μεταβούμε από την μία όψη στην άλλη πρέπει να «τρυπήσουμε» την επιφάνεια. Οι κλειστές επιφάνειες συχνά αποκαλούνται και «μπαλλόνια» (βλ. σχήμα 4.1.β)



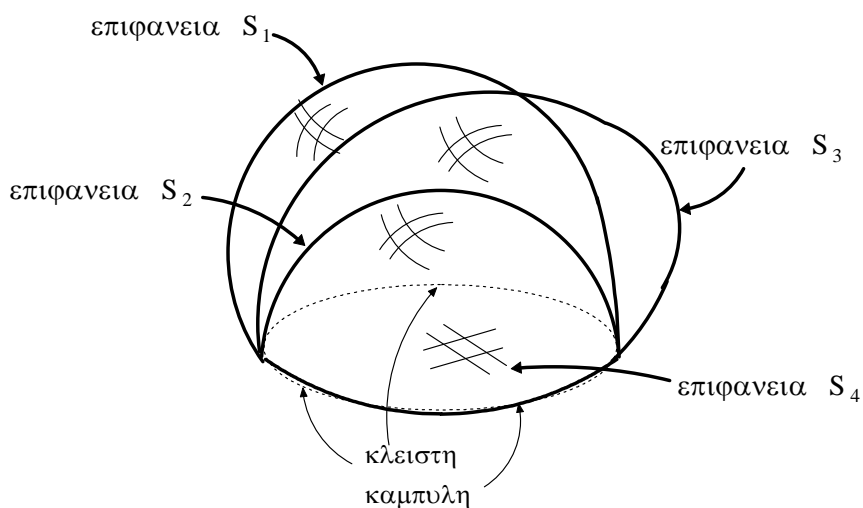
Σχ. 4.1

Μια ανοικτή επιφάνεια, καταλήγει ή, όπως λέγεται διαφορετικά, έχει σύνορο μια κλειστή καμπύλη (σχ. 4.2)



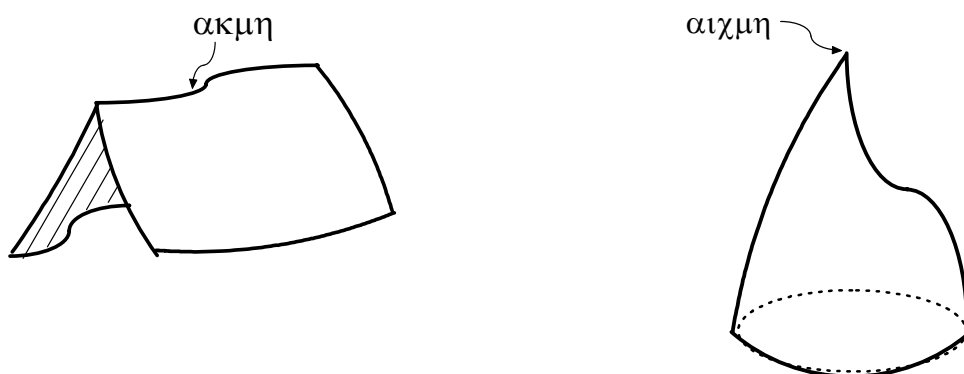
Σχ. 4.2

Επίσης είναι προφανές ότι σε μία κλειστή καμπύλη καταλήγουν άπειρες ανοικτές επιφάνειες. Στο σχ. 4.3 φαίνεται ένα παράδειγμα.



Σχ. 4.3

Θα αποκαλέσουμε «λεία» μια επιφάνεια όταν αυτή δεν έχει ακμές ή αιχμές (βλ. σχ. 4.4)



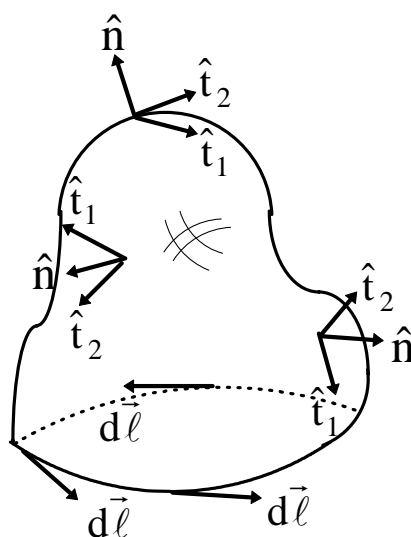
Σχ. 4.4

Σε κάθε σημείο μιας λείας επιφάνειας υπάρχουν άπειρα εφαπτομενικά διανύσματα και ένα κάθετο διάνυσμα. Αντίθετα σε σημεία που βρίσκονται επάνω σε ακμές ή αιχμές δεν είναι δυνατόν να οριστούν κάθετα και εφαπτομενικά διανύσματα. Γενικά σε τέτοια σημεία αποτελεί μεγάλο πρόβλημα ο υπολογισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Μπορεί να αποδειχθεί ότι από τα άπειρα εφαπτομενικά διανύσματα σε κάθε σημείο μιας λείας επιφάνειας **μόνον δύο είναι γραμμικά ανεξάρτητα**. Άρα μπορούμε να πούμε ότι σε κάθε σημείο υπάρχουν δύο εφαπτομενικά και ένα κάθετο διάνυσμα.

Σε κάθε σημείο της κλειστής καμπύλης στην οποία καταλήγει μια ανοικτή επιφάνεια ορίζεται επίσης το εφαπτομενικό διάνυσμα $d\vec{\ell}$.

Στο σχήμα 4.5 φαίνεται μια ανοικτή επιφάνεια και έχουν σημειωθεί σε διάφορα σημεία της τα δύο εφαπτομενικά διανύσματα \hat{t}_1, \hat{t}_2 (μοναδιαία) και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} . Επίσης έχει σημειωθεί το εφαπτομενικό διάνυσμα $d\vec{\ell}$ σε διάφορα σημεία της κλειστής καμπύλης στην οποία καταλήγει η ανοικτή επιφάνεια.



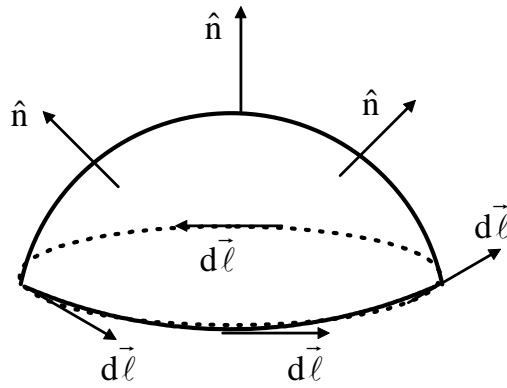
Σχ. 4.5

4.3) Διατύπωση των εξισώσεων Maxwell

4.3.1) Εισαγωγικά

Αναφέρουμε αρχικά ότι οι δύο από τις τέσσερις εξισώσεις του Maxwell, στην ολοκληρωτική τους μορφή, συνδέουν **επικαμπύλια ολοκληρώματα**, του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, σε κλειστές καμπύλες, με την χρονική παράγωγο αντιστοίχων επιφανειακών ολοκληρωμάτων (δηλαδή «ροών») των πεδίων αυτών, σε ανοικτές επιφάνειες που έχουν σύνορο τις κλειστές καμπύλες. Οι υπόλοιπες δύο εξισώσεις υπολογίζουν επιφανειακά ολοκληρώματα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου σε κλειστές επιφάνειες.

Επειδή συσχετίζονται επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα θα πρέπει να ισχύει μια σύμβαση, ένας κανόνας, που να συνδέει τις φορές των καθέτων διανυσμάτων \hat{n} στις επιφάνειες με τα εφαπτομενικά διανύσματα $d\vec{\ell}$ στις κλειστές καμπύλες. Ο κανόνας αυτός δεν είναι άλλος από τον γνωστό κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου και φαίνεται στο σχ. 4.6



Σχ. 4.6

Επομένως όταν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την φορά του $d\vec{\ell}$, όπως στο σχήμα 7.6, τότε το επιφανειακό θα υπολογιστεί με την φορά του \hat{n} .

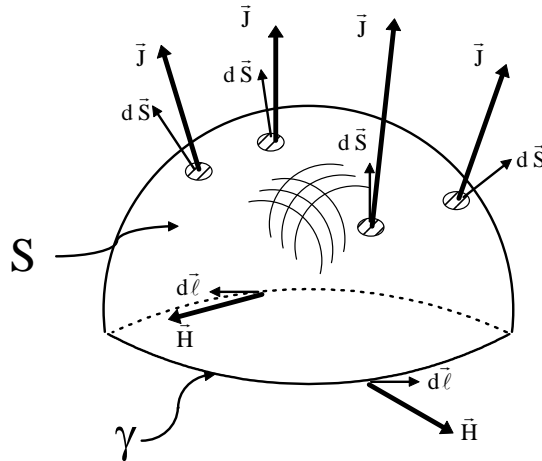
Παρακάτω θα διατυπώσουμε τις 4 εξισώσεις του Maxwell.

4.3.3) Νόμος Ampere – Maxwell

Ο νόμος αυτός αρχικά διατυπώθηκε από τον Ampere και πήρε την τελική του μορφή με την προσθήκη ενός επί πλέον όρου, που προσέθεσε ο Maxwell.

Αναφέρουμε αρχικά τον νόμο του Ampere:

- Έστω μια **ανοικτή** επιφάνεια S η οποία καταλήγει στην **κλειστή** καμπύλη γ (βλ. Σχ. 4.8)



Σχ. 4.8

Δια της επιφάνειας S διέρχονται γραμμές ροής χωρικής πυκνότητας **σταθερού χρονικά ρεύματος** \vec{J} . Το πείραμα (Oersted κ.λ.π.) έδειξε ότι σταθερό αυτό ρεύμα δημιουργεί ένα **στατικό** μαγνητικό πεδίο \vec{H} και ισχύει η σχέση:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = i$$

Δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου στην κλειστή καμπύλη γ , στην οποία καταλήγει η επιφάνεια S , είναι ίσο με το συνολικό ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται από την ανοικτή επιφάνεια S .

Ο νόμος αυτός ήταν αρκετά καλά γνωστός την εποχή του Maxwell, αλλά παρακάτω αναφέρουμε μια πολύ απλή περίπτωση την οποία δεν μπορεί να εξηγήσει:

Θεωρούμε την περίπτωση ενός πυκνωτή κατά την φάση της φόρτισής του. (βλ. σχ. 4.9).

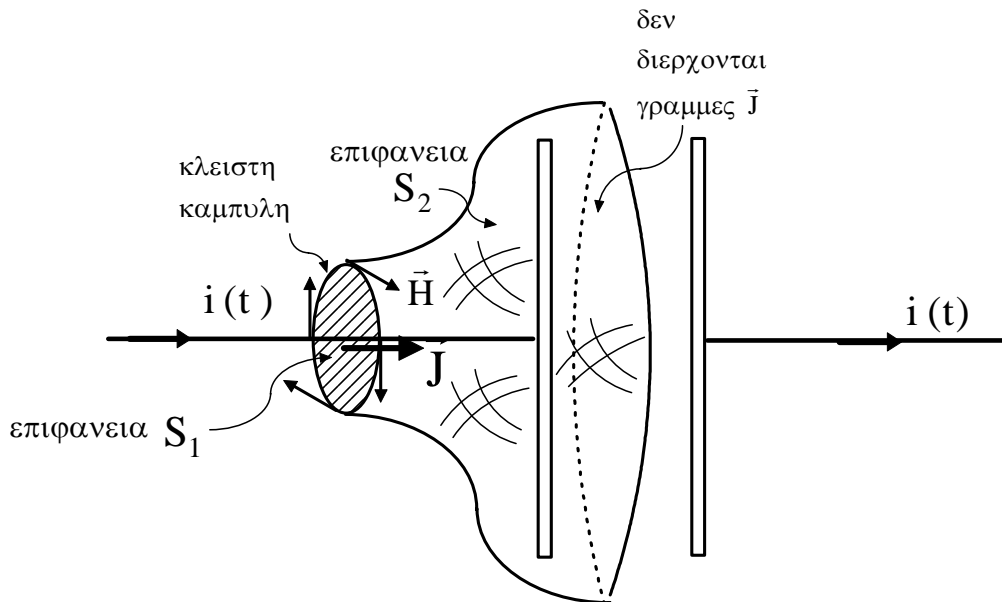
Μπορούμε να θεωρήσουμε την κλειστή καμπύλη, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.9, στην οποία καταλήγουν δύο διαφορετικές ανοικτές επιφάνειες, η S_1 και η S_2 .

Ο πυκνωτής διαρρέεται από χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα $i(t)$ κατά τη διάρκεια της φόρτισής του. Αν εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere για την επιφάνεια S_1 , δεν υπάρχει κανένα

πρόβλημα στην εφαρμογή του και μπορεί να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο H που δημιουργείται. Βέβαια εδώ υπάρχει ένα λεπτό σημείο:

Το ρεύμα i στην περίπτωση μας **δεν είναι χρονικά σταθερό**, όπως απαιτεί ο νόμος του Ampere. Μπορούμε όμως να παρακάμψουμε την δυσκολία αυτή θεωρώντας αρκετά «αργό» τον ρυθμό μεταβολής του ρεύματος αυτού.

Αν, τώρα, εφαρμόσουμε πάλι τον νόμο του Ampere για την επιφάνεια S_2 , η οποία εκτείνεται και στον χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, αμέσως φαίνεται η αδυναμία εφαρμογής του διότι προφανώς **δεν** διέρχονται γραμμές χωρικής πυκνότητας ρεύματος αγωγιμότητας \vec{J} , δια της επιφάνειας S_2 .



Σχ. 4.9

Την απάντηση στο πρόβλημα αυτό έδωσε ο Maxwell εισάγοντας την έννοια του ρεύματος «μετατοπίσεως» (displacement current) το οποίο θεώρησε ίσο με τον ρυθμό μεταβολής της ηλεκτρικής ροής Ψ_e .

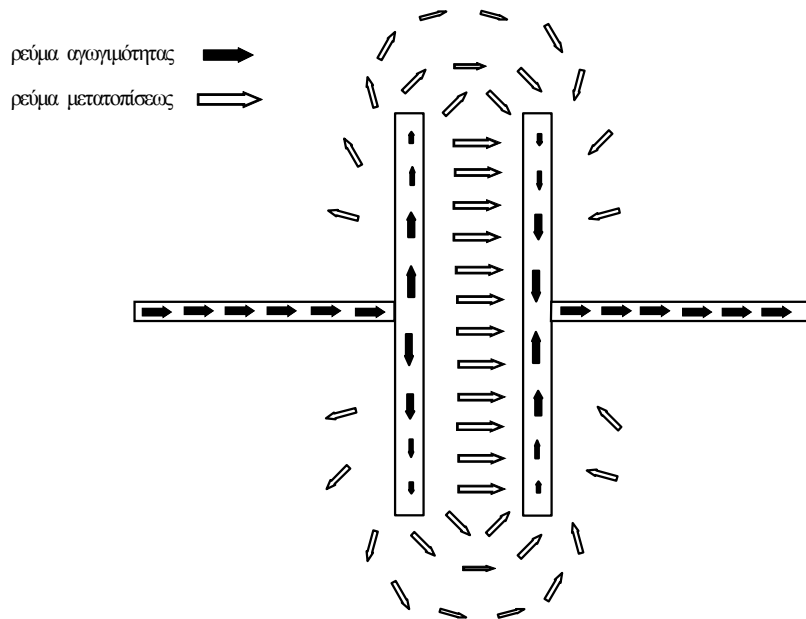
Σύμφωνα με τον Maxwell το ρεύμα μετατοπίσεως παράγει μαγνητικό πεδίο ακριβώς όπως και το ρεύμα αγωγιμότητας, και έτσι ο νόμος του Ampere γράφεται :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\iint_s \vec{J} \cdot d\vec{S}}_{\text{ορος Ampere}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \iint_s \vec{D} \cdot d\vec{S}}_{\text{ορος Maxwell}}$$

Νόμος Ampere – Maxwell

Ο όρος που πρόσθεσε ο Maxwell εμφανίζεται μόνον στην περίπτωση χρονικά μεταβαλλόμενων ηλεκτρικών πεδίων πράγμα το οποίο και συμβαίνει στην περίπτωση φόρτισης ή και εκφόρτισης ενός πυκνωτή.

Έτσι λοιπόν το ρεύμα $i(t)$ που διαρρέει τον πυκνωτή έχει την μορφή ρεύματος αγωγιμότητας στους οπλισμούς του πυκνωτή και τους αγωγούς που τους συνδέουν, και την μορφή ρεύματος μετατοπίσεως στον χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, όπως φαίνεται και στο σχ. 4.10



Σχ 4. 10

Στη σημερινή εποχή ο όρος «ρεύμα μετατοπίσεως» έχει σχεδόν εγκαταλειφθεί, με την έννοια ότι δεν πρόκειται για ηλεκτρικό ρεύμα με την γνωστή σημασία (μεταφορά ηλεκτρικού φορτίου).

Πιο ορθολογικά μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση (α) :

(α) «Ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο παράγει ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο»

Η πρόταση αυτή σε συνδυασμό με τον Νόμο του Faraday (β) :

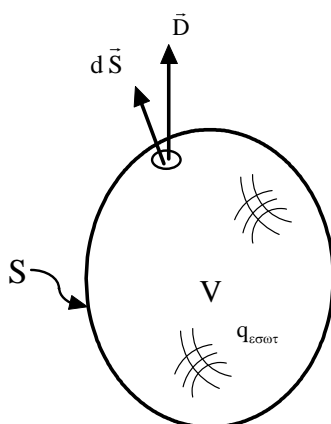
(β) «Ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο παράγει ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο»

οδηγεί άμεσα στην ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, η θεωρητική ανακάλυψη των οποίων οφείλεται στον Maxwell.

4.3.4) Νόμος Gauss (για το ηλεκτρικό πεδίο)

Ο νόμος αυτός διατυπώνεται ως εξής:

Η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μία κλειστή επιφάνεια («μπαλόνι») είναι ίση με το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που περικλείεται μέσα στην επιφάνεια αυτή.



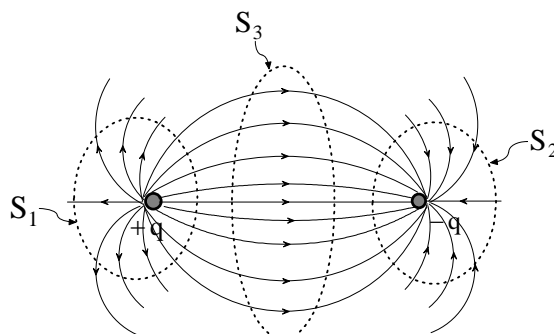
Σχ. 4.11

Μαθηματικά διατυπώνεται ως εξής:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho \, dV = q_{\epsilon\sigma\omega\tau}$$

Μπορούμε στο, ακόλουθο απλό παράδειγμα, να δούμε μια εφαρμογή του Ν. Gauss:

Ας θεωρήσουμε τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από δύο σημειακά φορτία (σχ. 4.12)



Σχ. 4.12

Από το σχήμα φαίνεται ότι στην κλειστή επιφάνεια S_1 (που περικλείει το φορτίο $+q$) **μόνον εξέρχεται ροή**, ενώ στην S_2 (που περικλείει το φορτίο $-q$) **μόνον εισέρχεται ροή**. Στην κλειστή επιφάνεια S_3 (η οποία δεν περικλείει κανένα φορτίο εσωτερικά, δηλ $q_{\text{εσωτ}} = 0$) **όση ηλεκτρική ροή εισέρχεται, τόση ακριβώς και εξέρχεται**.

4.3.5) Νόμος Gauss (για το μαγνητικό πεδίο)

Ο νόμος αυτός διατυπώνεται ως εξής:

Η συνολική μαγνητική ροή που διέρχεται από μία κλειστή επιφάνεια («μπαλόνι») είναι πάντοτε ίση με το μηδέν (δηλ. όση ροή εισέρχεται ακριβώς ίση εξέρχεται)

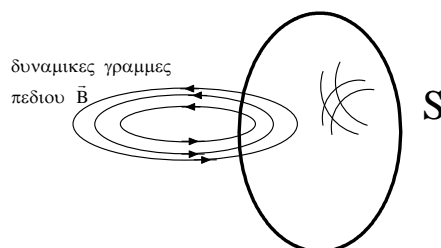
Μαθηματικά διατυπώνεται ως εξής:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη πρόταση:

«Οι δυναμικές γραμμές οποιουδήποτε μαγνητικού πεδίου δεν έχουν αρχή και τέλος και ρέουν μέσα σε κλειστούς σωλήνες (σωληνωτή ροή)»

Το σχήμα 4.13 βοηθά στην εξήγηση της πρότασης αυτής :



Σχ. 4.13

Άμεση συνέπεια του Νόμου του Gauss για το μαγνητικό πεδίο, είναι η **μη ύπαρξη** ενός μεμονωμένου μαγνητικού πόλου.

Αναφέρουμε τέλος ότι οι τέσσερις εξισώσεις του Maxwell συνοδεύονται και από την αρχή διατήρησης του φορτίου:

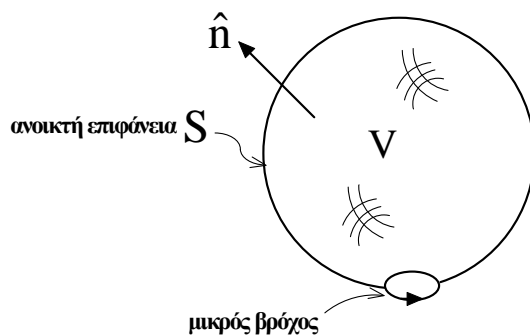
$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = -\frac{d}{dt} q_{\text{εσωτ}}$$

4.4) Αλληλοεξάρτηση των εξισώσεων Maxwell

Οι πέντε εξισώσεις που προαναφέρθηκαν (4 Maxwell + διατήρηση φορτίου) δεν είναι ανεξάρτητες. Μπορεί ναδειχθεί ότι ανεξάρτητες σχέσεις είναι:

- Ο νόμος του Faraday.
- Ο νόμος των Ampere – Maxwell
- Η αρχή διατήρησης του φορτίου

Για την απόδειξη των ανωτέρω θεωρήστε μια ανοικτή επιφάνεια που καταλήγει σε ένα μικρό βρόχο (βλ. σχήμα 4.14)



Σχ. 4. 14

Όταν ο βρόχος μικραίνει συνεχώς και τελικά καταλήγει γίνει ένα σημείο τότε η επιφάνεια από ανοικτή γίνεται κλειστή.

Γράφουμε το νόμο του Faraday

$$\oint_{\text{βροχος}} \vec{E} \cdot d\hat{\ell} = - \frac{d}{dt} \iint_{\text{ανοικτη } S} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

όταν ο βρόχος τείνει να γίνει σημείο τότε θα έχουμε

$$\oint_{\text{σημειο}} \vec{E} \cdot d\hat{\ell} = 0 = - \frac{d}{dt} \oiint_{\text{κλειστη } S} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ πρέπει να διατηρεί σταθερή τιμή στο χρόνο ή πιο απλά να

είναι ανεξάρτητο του χρόνου. Η σταθερή αυτή τιμή πρέπει να είναι ίση με το μηδέν αφού $\vec{B} = 0$ πριν την εφαρμογή του πεδίου κάποια στιγμή στο παρελθόν.

Άρα λοιπόν η 2^η εξίσωση ροής δεν είναι ανεξάρτητη από το νόμο του Faraday.

Αντίστοιχα γράφοντας το νόμο των Ampere – Maxwell

$$\oint_{\text{βροχος}} \vec{H} \cdot d\hat{\ell} = \iint_{\text{ανοικτη } S} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_{\text{ανοικτη } S} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

όταν ο βρόχος τείνει να γίνει σημείο τότε θα έχουμε

$$\oint_{\text{σημειο}} \vec{H} \cdot d\hat{\ell} = 0 = \oiint_{\text{κλειστη } S} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \oiint_{\text{κλειστη } S} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

επειδή όμως $\oiint_{\text{κλειστη } S} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV$ (αρχή διατήρησης του φορτίου)

προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt} \left[\oiint_{\text{κλειστη } S} \vec{D} \cdot d\vec{S} - \iiint_V \rho \, dV \right] = 0$$

Δηλαδή η ποσότητα $\oiint_{\text{κλειστη } S} \vec{D} \cdot d\vec{S} - \iiint_V \rho \, dV$ πρέπει να διατηρεί σταθερή τιμή στο χρόνο ή πιο

απλά να είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Η σταθερή αυτή τιμή πρέπει να είναι ίση με το μηδέν αφού $\rho = 0$ και $\vec{D} = 0$ πριν την εφαρμογή του πεδίου κάποια στιγμή στο παρελθόν.

Αρα λοιπόν η 1^η εξίσωση ροής (Νόμος του Gauss) δεν είναι ανεξάρτητη από το νόμο των Ampere – Maxwell.

4.5) Εξειδίκευση των εξισώσεων Maxwell σε στατικά πεδία

Όπως είναι προφανές, στη γενική περίπτωση, στις εξισώσεις Maxwell τα πεδία \vec{E} και \vec{H} είναι συζευγμένα και αυτό οδηγεί στην εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης της οποίας λύσεις είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Όταν όμως έχουμε στατικές καταστάσεις (δηλ τα πεδία είναι ανεξάρτητα του χρόνου, και όλες οι χρονικές παράγωγοι μηδενίζονται) τότε υπάρχει αποσύζευξη των πεδίων \vec{E} και \vec{H} . Οι τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις στην περίπτωση αυτή γράφονται:

- Νόμος του Faraday $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

- Νόμος του Ampere $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

- Αρχή διατήρησης του φορτίου $\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Ηλεκτροστατικό πεδίο

Χρησιμοποιούνται οι σχέσεις $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ (αστρόβιλο του ηλεκτροστατικού πεδίου)

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho \, dV = q_{\text{εσωτ}} \quad (\text{Νόμος Gauss})$$

β) Πεδίο ροής συνεχούς ρεύματος

Χρησιμοποιούνται οι σχέσεις $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ (αστρόβιλο του ηλεκτροστατικού πεδίου, εδώ εκφράζει το νόμο τάσεων του Kirchhoff)

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{αρχή διατήρησης του φορτίου, εδώ εκφράζει}$$

το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff)

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (\text{Γενικευμένος νόμος του Ohm})$$

γ) Στατικό μαγνητικό πεδίο μονίμων μαγνητών

Χρησιμοποιούνται οι σχέσεις

$$\oint \vec{H} \cdot d\hat{\ell} = 0 \quad (\text{Νόμος του Ampere αλλά με } \vec{J} = 0)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

δ) Στατικό μαγνητικό πεδίο συνεχούς ρεύματος

Χρησιμοποιούνται οι σχέσεις

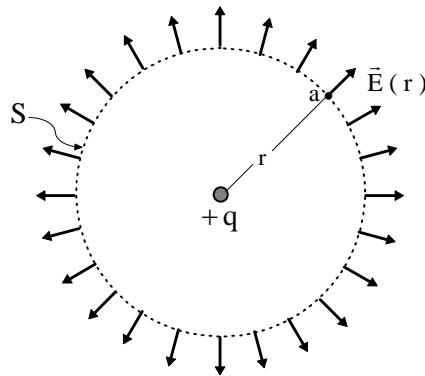
$$\oint \vec{H} \cdot d\hat{\ell} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Νόμος του Ampere})$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

4.6) Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

ΑΣΚ 4.1) Ναδειχθεί ότι με χρήση του Νόμου του Gauss, για το ηλεκτρικό πεδίο, μπορεί άμεσα να προκύψει ο γνωστός νόμος του Coulomb.

Θεωρούμε ένα σημειακό φορτίο q το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μιας νοητής σφαίρας με ακτίνα r (βλ. σχ. 4.15). Έστω ότι ο χώρος έχει διηλεκτρική σταθερά ϵ_r .



Σχ. 4.15

Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το **σημειακό** φορτίο q θα παρουσιάζει προφανώς σφαιρική συμμετρία δηλαδή το **μέτρο** του θα έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας. Η φορά του διανύσματος \vec{E} , σε τυχόν σημείο a , θα συμπίπτει με την ευθεία που ενώνει το σημειακό q και το τυχόν σημείο a επί της επιφάνειας. Το μέτρο του \vec{E} θα εξαρτάται από την απόσταση r .

Υπολογίζουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του \vec{D} επάνω στην επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα r . Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας θα ισχύει:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_S \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r E(r)$$

και λόγω του Νόμου του Gauss $\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$

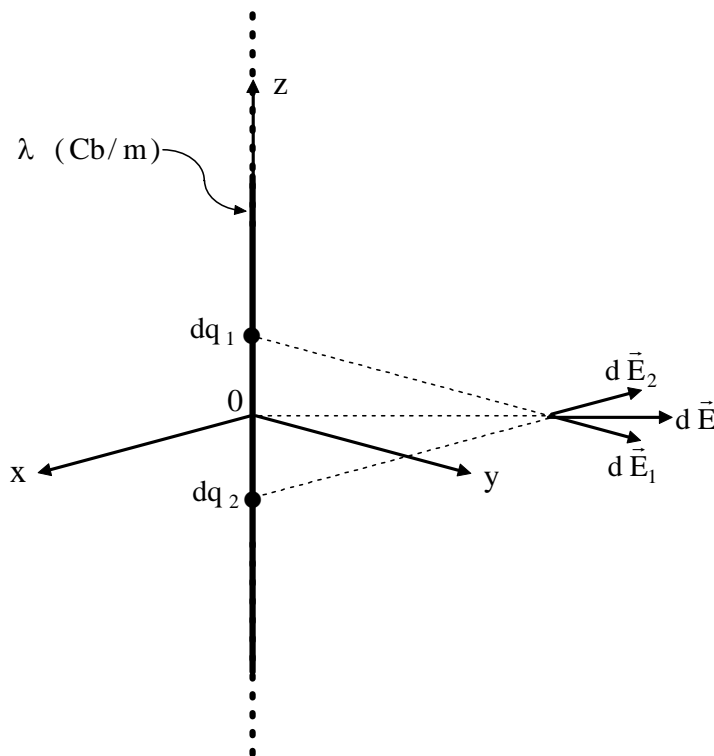
άρα τελικά $q = 4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r E(r)$

ή $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r^2}$

που είναι η γνωστή έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει ένα σημειακό φορτίο (πεδίο Coulomb)

ΑΣΚ 4.2) Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από μία ευθεία γραμμή απείρου μήκους. Η γραμμή φέρει κατανεμημένο ηλεκτρικό φορτίο με γραμμική πυκνότητα λ Cb/m.

Παρακάτω (Σχ. 4.16) φαίνεται η απλή γεωμετρία του προβλήματος. Θεωρούμε ότι η γραμμή συμπίπτει με τον άξονα z ενός καρτεσιανού συστήματος.



Σχ. 4.16

Για κάθε στοιχειώδες φορτίο dq_1 , επί της γραμμής, που δημιουργεί το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}_1$, θα υπάρχει πάντοτε το συμμετρικό του dq_2 που θα δημιουργεί το στοιχειώδες πεδίο $d\vec{E}_2$. Αυτό ισχύει προφανώς λόγω του απείρου μήκους της γραμμής.

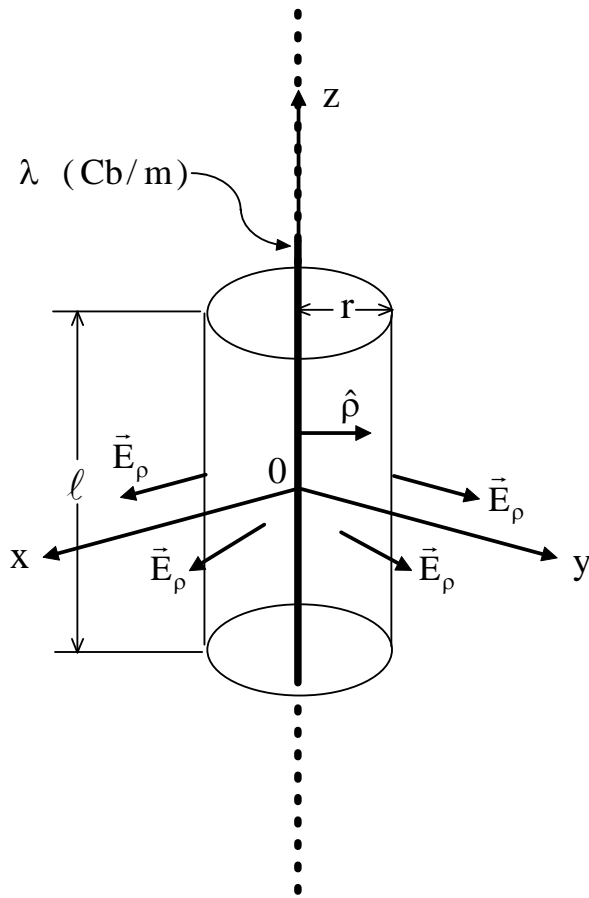
Οι κατακόρυφες συνιστώσες των πεδίων θα αλληλοαναιρούνται και τελικά το πεδίο θα έχει μόνον μια οριζόντια συνιστώσα (παράλληλη στο επίπεδο x-y)

Επίσης είναι φανερό ότι:

i) Η τιμή του πεδίου θα είναι **ανεξάρτητη** από την τιμή του z

ii) Θα υπάρχει αξονική συμμετρία δηλ. η τιμή του πεδίου θα είναι η ίδια πάνω στα σημεία μιας κυλινδρικής επιφάνειας με άξονα την γραμμική κατανομή.

Αυτό φαίνεται και στο επόμενο σχήμα 4.17



Σχ. 4.17

Σε ένα κυλινδρικό σύστημα αξόνων το ηλεκτρικό πεδίο θα γράφεται:

$$\vec{E}_\rho = E_\rho \hat{\rho}$$

δηλ. θα έχει μόνον την ρ -συνιστώσα

Για να υπολογίσουμε το μέτρο E_ρ εφαρμόζουμε τον Νόμο του Gauss σε μια κλειστή κυλινδρική επιφάνεια με ακτίνα r και ύψος ℓ .

$$\text{Νόμος Gauss: } \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{εσωτ}}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \oiint_{\text{κατω}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \oiint_{\text{ανω}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \\ &+ \oiint_{\text{παραπλ.}} \vec{D} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

επιφαν.

Οι δύο πρώτοι όροι του αθροίσματος είναι προφανώς μηδενικοί διότι το διάνυσμα $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ έχει μηδενική κατακόρυφη ($+z$ ή $-z$) συνιστώσα.

Στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου θα ισχύει, όπως προαναφέραμε

$$\vec{D} = \epsilon_0 E_\rho \hat{\rho}$$

και λόγω της αξονικής συμμετρίας του πεδίου και της ανεξαρτησίας του από το z θα προκύψει:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\text{παραπλ.}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E_\rho 2\pi r \ell = q_{\text{εσωτ}}$$

επιφαν.

Το συνολικό φορτίο που περιέχεται μέσα στον κύλινδρο (μήκος ℓ της γραμμής) θα είναι:

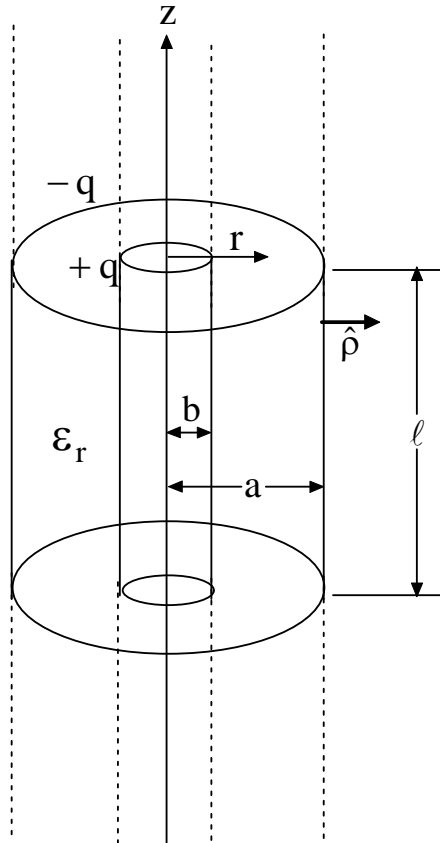
$$q_{\text{εσωτ}} = \int_0^\ell \lambda dl = \lambda \ell$$

$$\text{Άρα τελικά } \epsilon_0 E_\rho 2\pi r \ell = \lambda \ell \Rightarrow E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

και σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\vec{E} = E_\rho \hat{\rho}$

ΑΣΚ 4.3) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα, ανά μονάδα μήκους, ενός κυλινδρικού πυκνωτή.

Αρχικά αναφέρουμε ότι ο κυλινδρικός πυκνωτής αποτελείται από δύο τέλεια αγωγίμες κυλινδρικές επιφάνειες τοποθετημένες η μία μέσα στην άλλη και έχοντας κοινό άξονα. Μεταξύ των δύο επιφανειών παρεμβάλλεται διηλεκτρικό υλικό με διηλεκτρική σταθερά ϵ_r . (βλ. Σχ. 4.18). Οι δύο αυτές επιφάνειες αποτελούν τους δύο οπλισμούς του πυκνωτή



Σχ. 4.18

Η ακτίνα του εξωτερικού κυλίνδρου είναι a και αντίστοιχα αυτή του εσωτερικού είναι b . Για ένα δεδομένο μήκος l θα υπάρχει φορτίο $+q$ στον εσωτερικό κύλινδρο και φορτίο $-q$ στον εξωτερικό. Τα φορτία αυτά θα κατανέμονται ομοιόμορφα στις κυλινδρικές επιφάνειες.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα μήκους), στον εσωτερικό κύλινδρο, θα είναι λ όπου:

$$\lambda = \frac{q}{l} \quad \text{C/m}$$

Με χρήση των αποτελεσμάτων της άσκησης 4.2 βρίσκουμε αμέσως το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο μεταξύ των δύο οπλισμών.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \hat{\rho} \quad \text{για } b < r < a$$

Η ηλεκτρική τάση V_{ba} μεταξύ των δύο αγωγών θα είναι:

$$V_{ba} = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Το πεδίο έχει μόνον ακτινική συνιστώσα και έτσι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα κατά μήκος μιας ακτίνας

$$\text{Άρα: } V_{ba} = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_b^a \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} [\ln r]_b^a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{a}{b}$$

Άρα η χωρητικότητα για το μήκος l θα είναι

$$C = \frac{q}{V_{ba}} = \frac{\lambda \ell}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{a}{b}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r\ell}{\ln \frac{a}{b}} \quad (\text{Farad})$$

και η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους θα είναι :

$$C / \text{μήκος} = \frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{a}{b}} \quad (\text{Farad / m})$$

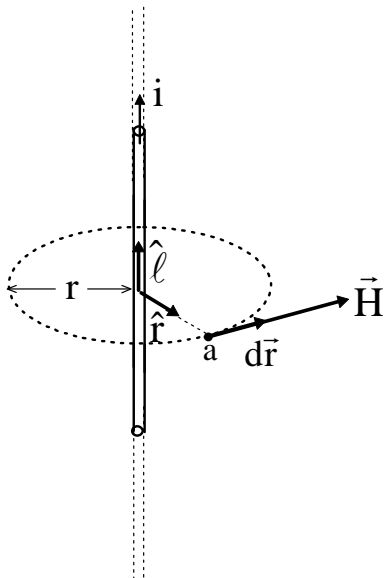
Αναφέρουμε εδώ ότι το σύστημα αυτό των δύο ομόκεντρων κυλινδρικών αγωγών χρησιμοποιείται και στα λεγόμενα **ομοαξονικά καλώδια** τα οποία χρησιμοποιούνται ευρύτατα στις τηλεπικοινωνιακές εγκαταστάσεις για μεταφορά σημάτων υψηλής συχνότητας.

Μια από τις σημαντικότερες προδιαγραφές των καλωδίων αυτών είναι τιμή της χωρητικότητας που παρουσιάζουν ανά μονάδα μήκους. Για τον υπολογισμό της μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ανωτέρω τύπος.

Παράδειγμα: για τιμές $a = 3 \text{ mm}$, $b = 0.5 \text{ mm}$ και $\epsilon_r = 3$ προκύπτει μια τιμή $C = 93 \text{ pF / m}$

ΑΣΚ 4.4) Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο ενός απέραντου ευθύγραμμου αγωγού που διαρρέεται από συνεχές ρεύμα i . Ο αγωγός θεωρείται αμελητέας διατομής (νηματοειδής αγωγός).

Στο σχ. 4.19 φαίνεται η γεωμετρία του προβλήματος.



Σχ. 4.19

Εφαρμόζοντας τον νόμο των Biot- Savart, υπολογίζουμε το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο $d\vec{H}$ που οφείλεται σε ένα στοιχειώδες μήκος $d\ell$ του αγωγού:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{i (\hat{\ell} \times \hat{r})}{r^2} d\ell$$

παρατηρούμε ότι το, $d\vec{H}$, θα είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία του αγωγού και το σημείο a .

Αυτό εύκολα γενικεύεται για το συνολικό μαγνητικό πεδίο \vec{H} (που οφείλεται σε ολόκληρο τον αγωγό) στο τυχόν σημείο a .

Σε απόσταση r , κάθετα στον αγωγό, το μαγνητικό πεδίο θα έχει το ίδιο μέτρο $|\vec{H}|$ ανεξάρτητα από

την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \hat{r} . Το πρόβλημα λοιπόν, έχει κυλινδρική συμμετρία και οι δυναμικές γραμμές θα είναι ομόκεντροι κύκλοι κάθετοι στον αγωγό. Το κέντρο αυτών των κύκλων είναι ακριβώς το σημείο που περνά ο αγωγός.

Για να υπολογίσουμε το μέτρο του \vec{H} σε απόσταση r χρησιμοποιούμε τον νόμο του Ampere για μια κλειστή κυκλική καμπύλη με ακτίνα r , και με κέντρο τον αγωγό.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = i \quad \text{άρα} \quad H 2\pi r = i$$

Συνεπώς η ένταση του μαγνητικού πεδίου \vec{H} , σε απόσταση r , θα είναι:

$$\vec{H} = \frac{i}{2\pi r} \hat{\phi}$$

όπου $\hat{\phi}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στις κυλινδρικές συντεταγμένες. Η συσχέτιση των φορών μεταξύ i και \vec{H} καθορίζεται κατά τα γνωστά από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία

ΑΣΚ. 4.5) Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο απέραντου αγωγού κυκλικής διατομής με ακτίνα a , που διαρρέεται από συνεχές ρεύμα i_0 , ομοιόμορφα κατανεμημένο στη διατομή.

Στο σχ. 4.20 φαίνεται η σχετική γεωμετρία

Όταν ισχύει $r \geq a$ τότε το μαγνητικό πεδίο θα δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$\vec{H} = \frac{i_0}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (r \geq a)$$

Όταν ισχύει $r < a$ (δηλ. βρισκόμαστε μέσα στον αγωγό) τότε σκεπτόμαστε ως εξής:

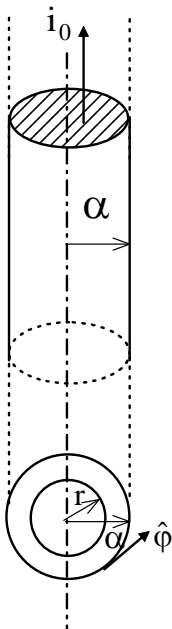
Εφ' όσον το ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα στη διατομή, θα ισχύει:

$$i(r) = i_0 \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere σε περιφέρεια ακτίνας r με $r < a$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H 2\pi r = i(r) = i_0 \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$$

άρα τελικά:

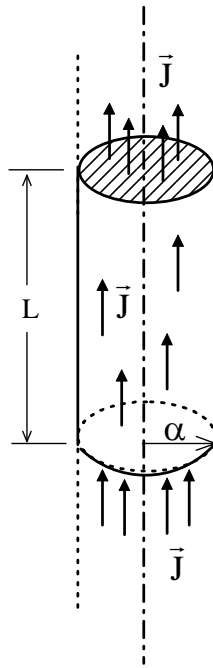


Σχ. 4.20

$$H 2 \pi r = i_0 \frac{r^2}{\alpha^2} \Rightarrow \vec{H}(r) = i_0 \frac{r}{2 \pi \alpha^2} \hat{\phi} \quad (r < \alpha)$$

ΑΣΚ. 4.6) Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από έναν απέραντο ευθύγραμμο αγωγό που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα με πυκνότητα \vec{J} . Ο αγωγός έχει κυκλική διατομή με ακτίνα a .

Στο σχ. 4.21 φαίνεται η σχετική γεωμετρία του αγωγού



Σχ. 4.21

Έχουμε σημειώσει ένα τμήμα του αγωγού με μήκος L . Μέσα στο τμήμα αυτό υπάρχουν **κινούμενα και ακίνητα** ηλεκτρικά φορτία .

Επειδή ισχύει παντού στον αγωγό, \vec{J} = σταθερό (ανεξάρτητο του χρόνου) η αρχή διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου στον κύλινδρο μήκους L θα γραφεί:

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

διότι όσες γραμμές του \vec{J} «μπαίνουν» από την κάτω βάση του κυλίνδρου, ακριβώς ίσες «βγαίνουν» από την άνω βάση.

Επειδή ισχύει ο νόμος του Ohm

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} = \gamma \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{D}$$

άρα

$$\vec{D} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\gamma} \vec{J}$$

Ο νόμος του Gauss, για την ηλεκτρική ροή γράφεται:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{εσωτ}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\gamma} \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

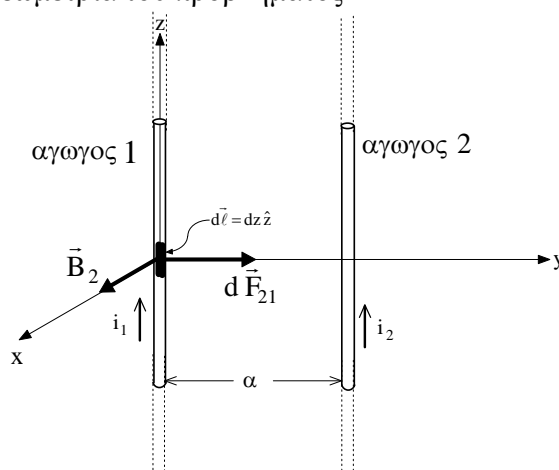
Δηλαδή το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο μέσα στον κύλινδρο είναι μηδενικό. Η φυσική εξήγηση αυτού του γεγονότος είναι ότι το ακίνητο φορτίο στον αγωγό (ιόντα μεταλλικού πλέγματος) εξουδετερώνει σε κάθε στιγμή το κινούμενο φορτίο (ηλεκτρόνια) και έτσι ο αγωγός εμφανίζεται εξωτερικά ως ηλεκτρικά ουδέτερος (αφόρτιστος) .

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένας αγωγός που διαρρέεται από συνεχές ρεύμα είναι **μηδενικό**

Σημείωση: Υπενθυμίζεται ότι η σχέση $\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ εκφράζει τον Νόμο ρευμάτων του Kirchhoff της θεωρίας κυκλωμάτων.

ΑΣΚ 4.7) Να υπολογιστεί η δύναμη με την οποία αλληλεπιδρούν δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι αγωγοί που διαρρέονται από συνεχή ρεύματα i_1 και i_2 . Οι αγωγοί απέχουν απόσταση a και η διατομή τους θεωρείται αμελητέα.

Στο σχ. 4.22 φαίνεται η γεωμετρία του προβλήματος



Σχ 4.22

Ο αγωγός **2** προκαλεί ένα πεδίο μαγνητικής επαγωγής \vec{B}_2 στα σημεία του αγωγού **1** όπου:

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{i_2}{2 \pi \alpha} \hat{\phi} = \mu_0 \frac{i_2}{2 \pi \alpha} \hat{x}$$

άρα η στοιχειώδης δύναμη $d\vec{F}_{21}$ που ασκείται σε ένα στοιχειώδες τμήμα $d\vec{\ell}$ του αγωγού **1** λόγω του \vec{B}_2 θα είναι (εξίσωση δύναμης Lorentz σε γραμμικό αγωγό)

$$d\vec{F}_{21} = i_1 (d\vec{\ell} \times \vec{B}_2)$$

ή

$$d\vec{F}_{21} = i_1 \left(dz \hat{z} \times \mu_0 \frac{i_2}{2 \pi \alpha} \hat{x} \right)$$

και επειδή $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$ θα πάρουμε:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 dz}{2 \pi \alpha} \hat{y}$$

αν ολοκληρώσουμε για ένα μήκος ℓ θα έχουμε:

$$\vec{F}_{21} = \hat{y} \int_z^{z+\ell} \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2 \pi \alpha} dz = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \ell}{2 \pi \alpha} \hat{y}$$

Επομένως η δύναμη ανά μονάδα μήκους θα είναι:

$$\vec{F}_{21/m} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2 \pi \alpha} \hat{y}$$

και θα έχουμε έλξη για ομόρροπα ρεύματα i_1, i_2 και άπωση για αντίρροπα ρεύματα i_1, i_2

Αν ισχύει $i_1 = i_2 = i$ τότε:

$$\vec{F}_{21/m} = \frac{\mu_0 i^2}{2 \pi \alpha} \hat{y}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

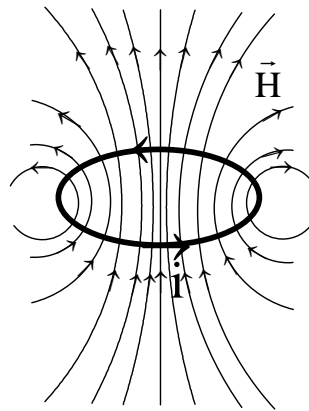
ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

5.1) Εισαγωγικά

Αρχικά αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει η λεγόμενη «ποσότητα μαγνητισμού», ενώ αντίθετα υπάρχει η «ποσότητα ηλεκτρισμού» (ή ηλεκτρικό φορτίο). Το στατικό μαγνητικό πεδίο οφείλεται στο συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα, όπως φαίνεται και από το νόμο του Ampere, ο οποίος προήλθε από το πείραμα των Biot και Savart. Στατικό μαγνητικό πεδίο παράγεται και από τους μόνιμους μαγνήτες. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα ; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι καταφατική. Συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή έχουμε ρεύματα που ρέουν σε κλειστούς βρόχους σε επίπεδο ατόμου. Στα επόμενα θα εξηγήσουμε αναλυτικότερα το φαινόμενο αυτό.

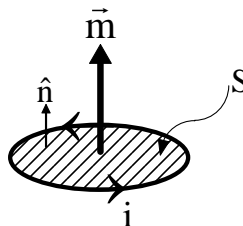
5.2) Μαγνητική ροπή - Μαγνήτιση

Έστω ένας κλειστός βρόχος που διαρρέεται από συνεχές ρεύμα i . Στο σχήμα 5.1 φαίνονται οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο βρόχος αυτός .



Σχ. 5.1

Ορίζουμε τη **μαγνητική ροπή** \vec{m} ενός βρόχου ρεύματος (σχ. 5.2)



Σχ. 5.2

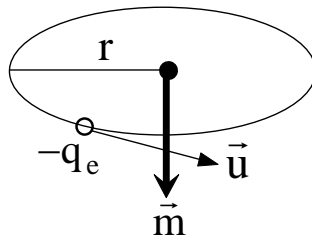
Μαγνητική ροπή: $\vec{m} = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ i \rightarrow \infty}} i \vec{S} = \text{πεπερασμένο (A m}^2\text{)}$

όπου $\vec{S} = S \hat{n}$ με S το εμβαδόν επιφάνειας του βρόχου και \hat{n} το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην S , με φορά «δεξιόστροφα» συνδεδεμένη με την φορά του ρεύματος i . Ο στοιχειώδης αυτός βρόχος που διαρέεται από ρεύμα i αποτελεί ένα **μαγνητικό δίπολο**. Αποδεικνύεται ότι δύο βρόχοι με διαφορετικά σχήματα αλλά με ίδια γινόμενα $i S$ εμφανίζουν το ίδιο μαγνητικό πεδίο σε μακρινές αποστάσεις.

Η φορά του διανύσματος \vec{m} συνδέεται με τη φορά του ρεύματος i με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου. Όταν ο βρόχος τεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο θα δεχθεί μια μαγνητική δύναμη. Ο λεπτομερής υπολογισμός της δεν θα γίνει εδώ.

Παραδείγματα μαγνητικών ροπών:

α) Κίνηση (περιστροφή) ηλεκτρονίου γύρω από πυρήνα με γραμμική ταχύτητα u (σχ. 5.3)



Σχ. 5.3

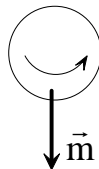
Αν T είναι η περίοδος περιστροφής του ηλεκτρονίου τότε $T = \frac{2\pi r}{u}$ και μπορούμε να

θεωρήσουμε ότι η κίνηση αυτή ισοδυναμεί με ένα ηλεκτρικό ρεύμα $i = \frac{q_e}{T} = \frac{q_e u}{2\pi r}$

και η μαγνητική ροπή που παράγεται θα έχει μέτρο $|\vec{m}| = i \pi r^2$

Η αριθμητική τιμή του μεγέθους αυτού είναι της τάξεως του 10^{-23} A m^2

β) Ηλεκτρονικό spin (ιδιοστροφορμή)



Σχ. 5.4

Λόγω της περιστροφής του ηλεκτρονίου γύρω από τον εαυτό του παράγεται μαγνητική ροπή που έχει τάξη μεγέθους ίση με αυτή που προκαλείται από την κίνηση του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα.

Με βάση τη μαγνητική ροπή ορίζεται το μέγεθος **Μαγνήτιση**

$$\text{Μαγνήτιση: } \vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{m}}{\Delta V} \quad (\text{A} / \text{m})$$

Δηλ. η μαγνήτιση εκφράζει τη μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου, και με το μέγεθος αυτό περιγράφεται η συμπεριφορά των διαφόρων υλικών στο μαγνητικό πεδίο.

5.3) Συμπεριφορά των υλικών στο Μαγνητικό πεδίο

Όταν ένα μαγνητικό πεδίο \vec{H} (που δημιουργείται από κάποιο ηλεκτρικό ρεύμα) αναπτύσσεται σε χώρους που υπάρχουν υλικά μέσα (όχι το απόλυτο κενό) τότε εμφανίζεται το μέγεθος \vec{M} . Η σχέση μεταξύ του μαγνητικού πεδίου και της μαγνήτισης γράφεται:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

όπου το μέγεθος χ_m (αδιάστατο) λέγεται **μαγνητική επιδεκτικότητα** του υλικού.

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν υλικά στα οποία το χ_m παίρνει τη μορφή τανυστή. Τα υλικά αυτά ονομάζονται ανισότροπα δηλ. οι μαγνητικές ιδιότητές τους εξαρτώνται από την κατεύθυνση.

Η μαγνήτιση, σε ένα υλικό, προκαλείται από τον προσανατολισμό των στοιχειωδών μαγνητικών ροπών (ή διπόλων) λόγω του επιβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου. Στο απόλυτο κενό προφανώς ισχύει πάντοτε $\vec{M} = 0$.

Σε ένα υλικό μέσο λόγω της μαγνήτισης προκαλείται πυκνωση των δυναμικών γραμμών και εμφανίζεται το μέγεθος **μαγνητική επαγωγή** (η πυκνότητα μαγνητικής ροής) \vec{B} .

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

η ποσότητα $\mu_r = (1 + \chi_m)$ ονομάζεται **σχετική μαγνητική διαπερατότητα** του υλικού άρα :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Στο απόλυτο κενό προφανώς $\chi_m = 0$, $\mu_r = 1$ και $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Τα διάφορα υλικά κατατάσσονται σε 3 κατηγορίες ανάλογα με την τιμή της σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας που εμφανίζουν

5.3.1) Διαμαγνητικά υλικά

Στα υλικά αυτά το $\mu_r < 1$ αλλά πολύ κοντά στη μονάδα. Συνεπώς θα είναι $\chi_m < 0$. Τα υλικά αυτά εμφανίζουν μια ασθενέστατη μαγνήτιση με αντίθετη φορά από το επιβαλλόμενο εξωτερικό πεδίο. Παραδείγματα τέτοιων υλικών

| | | |
|----------|---------------------------------|---------------------|
| Νερό | $\chi_m = -0.9 \times 10^{-5}$ | $\mu_r = 0.999991$ |
| Χαλκός | $\chi_m = -0.95 \times 10^{-5}$ | $\mu_r = 0.9999905$ |
| Άργυρος | $\chi_m = -2.6 \times 10^{-5}$ | $\mu_r = 0.999974$ |
| Μόλυβδος | $\chi_m = -1.7 \times 10^{-5}$ | $\mu_r = 0.999983$ |

5.3.2) Παραμαγνητικά υλικά

Στα υλικά αυτά το $\mu_r > 1$ αλλά πολύ κοντά στη μονάδα. Συνεπώς θα είναι $\chi_m > 0$. Τα υλικά αυτά εμφανίζουν μια ασθενέστατη μαγνήτιση με φορά ομόρροπη με αυτή του επιβαλλόμενου εξωτερικού πεδίου. Παραδείγματα τέτοιων υλικών

| | | |
|-------------|-------------------------------|---------------------|
| Αέρας | $\chi_m = 0.4 \times 10^{-6}$ | $\mu_r = 1.0000004$ |
| Οξυγόνο | $\chi_m = 1.8 \times 10^{-6}$ | $\mu_r = 1.0000018$ |
| Αλουμίνιο | $\chi_m = 2.2 \times 10^{-5}$ | $\mu_r = 1.000022$ |
| Λευκόχρυσος | $\chi_m = 0.3 \times 10^{-3}$ | $\mu_r = 1.0003$ |

Συμπεραίνουμε ότι τα διαμαγνητικά και τα παραμαγνητικά υλικά συμπεριφέρονται στο μαγνητικό πεδίο σχεδόν όπως το απόλυτο κενό.

5.3.3) Σιδηρομαγνητικά υλικά

Στα υλικά αυτά το μ_r παίρνει πολύ μεγάλες τιμές που μπορούν να φτάσουν τις αρκετές χιλιάδες. Συνεπώς εμφανίζουν εντονότατο το φαινόμενο της μαγνήτισης. Εδώ το μ_r δεν είναι σταθερό αλλά είναι μια πολύπλοκη συνάρτηση του επιβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου. Τα υλικά αυτά παρουσιάζουν σημαντικότατο ενδιαφέρον στις τεχνικές εφαρμογές. Τέτοια υλικά είναι ο σίδηρος (Fe), το κοβάλτιο (Co), το νικέλιο (Ni), και κράματα αυτών, το τιτάνιο (Ti), το χρώμιο (Cr), οι σπάνιες γαίες όπως το γαδολίνιο, και μερικά οξείδια όπως π.χ. το διοξείδιο του χρωμίου (CrO_2). Παρακάτω δίνουμε μερικές τιμές του μ_r για τέτοια υλικά.

| | |
|-----------------------|------------------|
| Σίδηρος (95% καθαρός) | $\mu_r = 200000$ |
| Κοβάλτιο | $\mu_r = 250$ |
| Νικέλιο | $\mu_r = 600$ |

Τέλος αναφέρουμε ότι υπάρχουν και υλικά που παρουσιάζουν μαγνητική συμπεριφορά εντελώς όμοια με αυτήν του κενού (μη μαγνητικά υλικά). Τα υλικά αυτά είναι κυρίως τα πλαστικά.

5. 4) Εξήγηση του φαινομένου του σιδηρομαγνητισμού

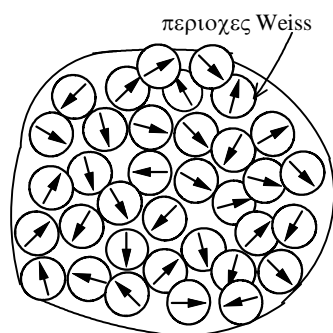
Η πλήρης εξήγηση του φαινομένου αυτού είναι αρκετά πολύπλοκη και βασίζεται στην κβαντομηχανική. Παρακάτω θα δώσουμε μια απλοποιημένη περιγραφή.

Η βάση για την εξήγηση είναι, σε ατομικό επίπεδο, οι μαγνητικές ροπές που προέρχονται από τα spins των ηλεκτρονίων. Στα διαμαγνητικά και παραμαγνητικά υλικά υπάρχει σχεδόν πλήρης αλληλοεξουδετέρωση αυτών των ροπών και έτσι μακροσκοπικά εμφανίζεται μια ελάχιστη μαγνήτιση (ομόρροπη ή αντίρροπη) του υλικού όταν επιβληθεί ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

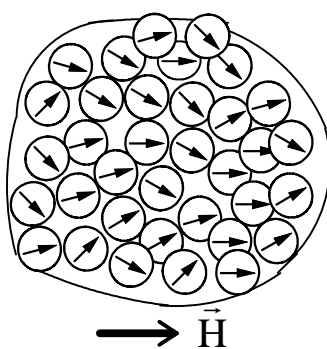
Στα σιδηρομαγνητικά υλικά όμως αυτό δεν συμβαίνει. Σε κάθε άτομο υπάρχουν spins που δεν εξουδετερώνονται π.χ. στο άτομο του σιδήρου 4 spins, στο άτομο του κοβαλτίου 3 spins, στο άτομο του νικελίου 2 spins κλπ. Παρατηρείται επίσης το φαινόμενο να παραλληλίζονται τα spins γειτονικών ατόμων. Η αλληλεπίδραση αυτή δεν οφείλεται σε μαγνητικές δράσεις αλλά στην κυματική φύση των ηλεκτρονίων και η πλήρης εξήγησή του, μέσω της κβαντομηχανικής, εκφεύγει από τα όρια του μαθήματος.

Σε ένα κομμάτι σιδηρομαγνητικού υλικού παρατηρούνται περιοχές με όγκους που κυμαίνονται από 10^{-6} cm^3 έως 10^{-2} cm^3 , στις οποίες υπάρχει πλήρης παραλληλισμός των μαγνητικών ροπών. Είναι προφανές ότι μέσα σε μια τέτοια περιοχή υπάρχουν δισεκατομμύρια άτομα. Οι περιοχές αυτές, που μπορούμε να τις ονομάσουμε και «κρυστάλλους», αποκαλούνται περιοχές Weiss. Οι μαγνητικές ροπές των περιοχών αυτών είναι εντελώς τυχαία προσανατολισμένες και έτσι μακροσκοπικά δεν παρατηρείται συνιστάμενη μαγνητική ροπή.

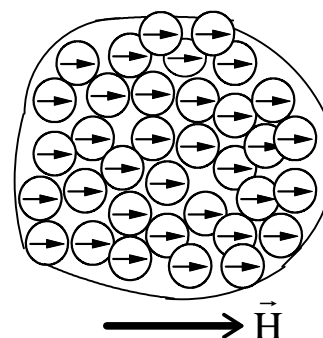
Αν όμως επιβληθεί ένα εξωτερικό αυξανόμενο μαγνητικό πεδίο H τότε παρατηρείται ένας διαδοχικός προσανατολισμός των μαγνητικών ροπών των περιοχών αυτών στη διεύθυνση του πεδίου. Για κάποια τιμή του πεδίου θα έχουμε πλήρη προσανατολισμό όλων των περιοχών αυτών. Τότε λέμε ότι βρισκόμαστε στο σημείο του κόρου, και μεγαλύτερες τιμές του πεδίου δεν φέρνουν κανένα επιπλέον αποτέλεσμα. (βλ.σχ. 5.5 α, β, γ)



Σχ. 5.5α



Σχ. 5.5β



Σχ. 5.5γ

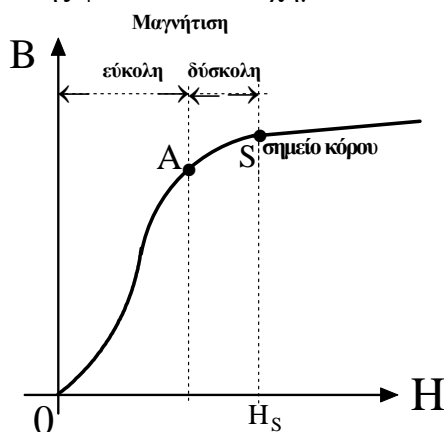
Καθώς γίνεται ο βαθμιαίος προσανατολισμός των περιοχών, αυτές αλλάζουν όγκο με συνέπεια να προκαλούνται κάποιοι χαρακτηριστικοί ήχοι. Το φαινόμενο ονομάζεται μαγνητοσυστολή.

Όταν η θερμοκρασία του υλικού ξεπεράσει ένα όριο, τότε οι περιοχές Weiss καταστρέφονται λόγω της θερμικής διέγερσης που οδηγεί σε «αταξία» και το υλικό χάνει τις σιδηρομαγνητικές του ιδιότητες και γίνεται παραμαγνητικό. Όταν η θερμοκρασία πέσει κάτω από το όριο αυτό οι σιδηρομαγνητικές ιδιότητες επανέρχονται. Η οριακή αυτή θερμοκρασία ονομάζεται σημείο Curie. Το σημείο Curie για το σίδηρο είναι $770\text{ }^{\circ}\text{C}$, για το νικέλιο $358\text{ }^{\circ}\text{C}$ και για το κοβάλτιο $1120\text{ }^{\circ}\text{C}$.

5. 5) Καμπύλη μαγνήτισης των σιδηρομαγνητικών υλικών

Η καμπύλη αυτή εκφράζει τη σχέση που συνδέει το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής B με το μέτρο του επιβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου H για ένα σιδηρομαγνητικό υλικό που μαγνητίζεται για πρώτη φορά. Η καμπύλη προκύπτει πειραματικά και δεν υπάρχει ακριβής αναλυτική σχέση που την περιγράφει.

Τυπική μορφή μιας τέτοιας καμπύλης φαίνεται στο σχήμα 5.6

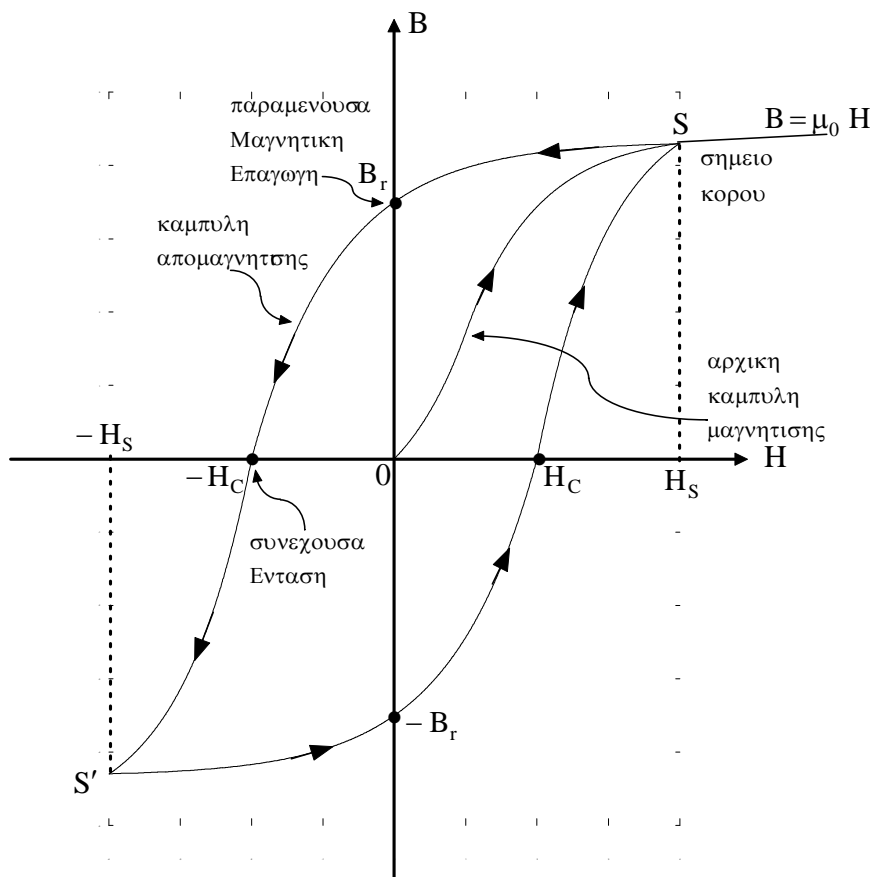


Σχ. 5.6

Το τμήμα OA της καμπύλης λέγεται τμήμα εύκολης μαγνήτισης γιατί εκεί η κλίση της καμπύλης είναι μεγάλη δηλ. έχουμε μεγάλο ρυθμό αύξησης της μαγνητικής επαγωγής. Στο τμήμα AS έχουμε την περιοχή δύσκολης μαγνήτισης. Εδώ έχουμε αρκετά βραδύτερο ρυθμό αύξησης του B. Από το σημείο S και μετά έχουμε μια βραδύτατη αύξηση του B συναρτήσει του H. Εδώ έχει συμβεί προσανατολισμός όλων των περιοχών Weiss και πλέον το B αυξάνει ακολουθώντας τη σχέση $B = \mu_0 H$. Το σημείο S λέγεται σημείο κόρου και αντιστοιχεί σε μία ένταση H_S

5. 6) Βρόχος υστέρησης των σιδηρομαγνητικών υλικών

Έστω ότι έχουμε ένα τεμάχιο σιδηρομαγνητικού υλικού και εφαρμόζουμε σ' αυτό ένα βαθμιαία αυξανόμενο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο \vec{H} . Καταγράφουμε σε ένα x-y διάγραμμα τη σχέση μεταξύ του H και της μαγνητικής επαγωγής B που επάγεται στο υλικό. (βλ. σχ 5.7)



Σχ. 5.7

Αρχικά θα πάρουμε, όπως προαναφέρθηκε, την αρχική καμπύλη μαγνήτισης OS φθάνοντας μέχρι το **σημείο κόρου S**. Αν τώρα αρχίσουμε να ελαττώνουμε την τιμή του H θα παρατηρήσουμε ότι δεν ακολουθείται η αντίστροφη πορεία αλλά κινούμαστε επάνω στην

καμπύλη $S \rightarrow B_r$, δηλ όταν το H μηδενιστεί, το B θα έχει την τιμή B_r που ονομάζεται **παραμένουσα μαγνητική επαγωγή**. Αυτό συμβαίνει διότι οι μαγνητικές περιοχές Weiss δεν επιστρέφουν όλες στις αρχικές τους θέσεις.

Αν θέλουμε να μηδενίσουμε την παραμένουσα μαγνητική επαγωγή πρέπει να εφαρμόσουμε στο υλικό μια αντίθετη ένταση μαγνητικού πεδίου $-H_C$ η οποία λέγεται **συνέχουσα ένταση**. Η καμπύλη από το σημείο $(0, B_r)$ έως το σημείο $(-H_C, 0)$ λέγεται **καμπύλη απομαγνήτισης**.

Αν συνεχίσουμε να αυξάνουμε την τιμή του H προς τις αρνητικές τιμές, θα φθάσουμε στο σημείο κόρου S' (απολύτως συμμετρικό του S).

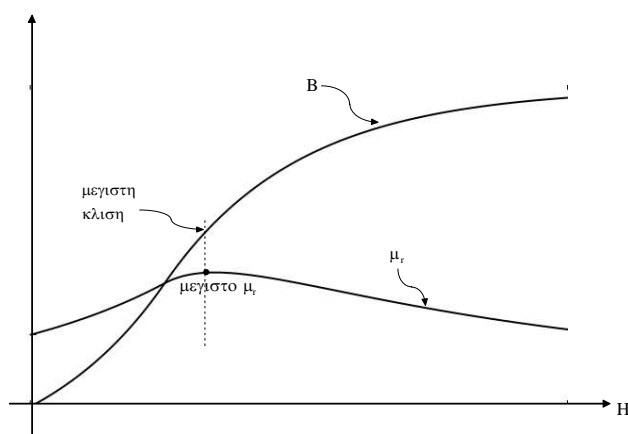
Αν στη συνέχεια μειώνουμε διαδοχικά την αρνητική τιμή του H μέχρι να φθάσουμε στο μηδέν θα περάσουμε από το σημείο $-B_r$.

Περαιτέρω αύξηση του H (θετικές τιμές) θα μας οδηγήσει, περνώντας από το αντίστοιχο σημείο H_C και πάλι στο σημείο κόρου S .

Η κλειστή καμπύλη που σχηματίζεται ονομάζεται **βρόχος μαγνητικής υστέρησης** και χαρακτηρίζει πλήρως κάθε σιδηρομαγνητικό υλικό. Σημαντικό τμήμα του βρόχου αυτού, όπως προαναφέρθηκε, είναι ή καμπύλη απομαγνήτισης του υλικού.

Η καμπύλη αρχικής μαγνήτισης ενός σιδηρομαγνητικού υλικού λαμβάνεται μόνον την πρώτη φορά που το υλικό τίθεται υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Στην καμπύλη αυτή υπάρχει μονοσήμαντη σχέση μεταξύ του επιβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου H και της μαγνητικής επαγωγής B .

Παρατηρούμε επίσης ότι η μαγνητική διαπερατότητα μ_r ενός σιδηρομαγνητικού υλικού δεν είναι σταθερή κατά τη διάρκεια ενός πλήρους κύκλου μαγνήτισης. Στο σχήμα 5.8 φαίνεται η μεταβολή της μαγνητικής διαπερατότητας για την περίπτωση της αρχικής καμπύλης μαγνήτισης.



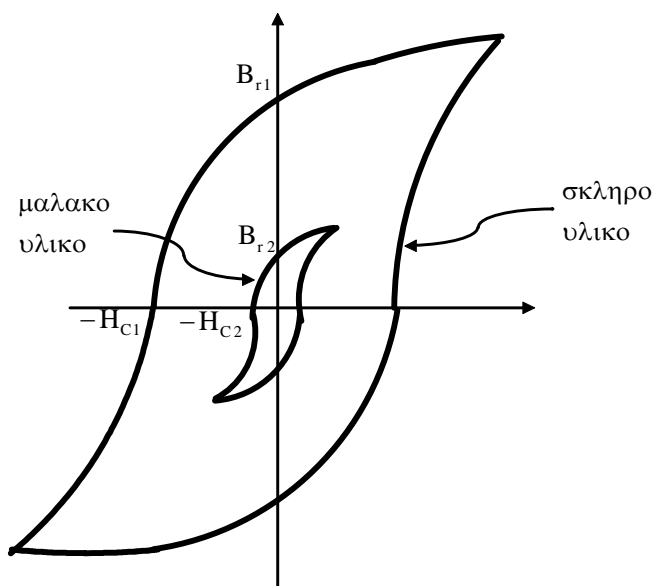
Σχ. 5.8

Τα σιδηρομαγνητικά υλικά χωρίζονται σε «μαλακά» και «σκληρά» (βλ. και σχ. 5.9)

Τα **μαλακά σιδηρομαγνητικά** υλικά μαγνητίζονται και απομαγνητίζονται εύκολα και δεν διατηρούν τη μαγνήτισή τους για πολύ χρόνο μετά την απομάκρυνση του εξωτερικού πεδίου. Ο βρόχος υστερήσεως τους είναι μικρός σε εμβαδόν. Χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές όπου έχουμε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο, όπως ακριβώς στην περίπτωση συσκευών που λειτουργούν στο εναλλασσόμενο ή γενικά μεταβαλλόμενο ρεύμα. Παραδείγματα είναι οι πυρήνες των μετασχηματιστών και των ηλεκτρικών μηχανών, οι συσκευές μαγνητικής εγγραφής (π.χ κεφαλές εγγραφής των σκληρών δίσκων) κλπ. Μαλακά σιδηρομαγνητικά υλικά είναι ο μαλακός σίδηρος, και τα κράματα σιδήρου- νικελίου (τύπου Permalloy).

Ειδική περίπτωση μαλακών σιδηρομαγνητικών υλικών είναι οι **φερρίτες** (κεραμικά σιδηρομαγνητικά υλικά) . Οι φερρίτες παρουσιάζουν πολύ μεγάλη ειδική αντίσταση και έτσι μικρές απώλειες λόγω δινορρευμάτων και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές υψηλών συχνοτήτων.

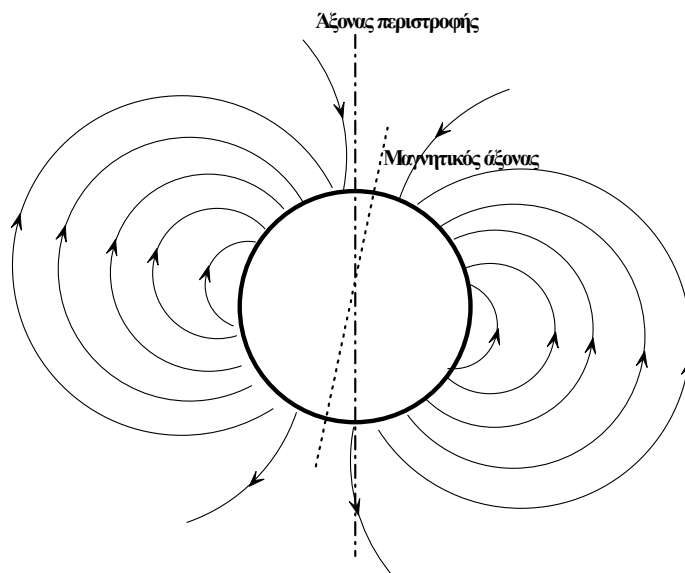
Τα **σκληρά σιδηρομαγνητικά** υλικά διατηρούν τη μαγνήτισή τους για πολύ χρόνο μετά την απομάκρυνση του εξωτερικού πεδίου. Ο βρόχος υστερήσεως τους έχει μεγάλο εμβαδόν και παρουσιάζουν μεγάλη παραμένουσα μαγνητική επαγωγή και συνέχουσα ένταση. Χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μόνιμων μαγνητών. Κλασσική περίπτωση σκληρού σιδηρομαγνητικού υλικού είναι το κράμα Alnico



Σχ. 5.9

5. 7) Το μαγνητικό πεδίο της γής

Είναι γνωστό ότι ο πλανήτης μας διαθέτει ένα μαγνητικό πεδίο του οποίου η ακριβής προέλευση δεν είναι, ακόμη, με απόλυτη ακρίβεια γνωστή.^(*) Στο σχήμα 5.10 φαίνονται οι δυναμικές γραμμές του πεδίου αυτού.



Σχ. 5.10

Το μαγνητικό πεδίο της Γης εμφανίζει την ίδια ακριβώς μορφή με το μαγνητικό πεδίο ενός βρόχου ρεύματος (μαγνητικό δίπολο)

Παρατηρούμε ότι οι δυναμικές γραμμές του πεδίου ξεκινούν από ένα σημείο κοντά στον Νότιο γεωγραφικό πόλο της Γης και καταλήγουν σε ένα σημείο κοντά στον Βόρειο γεωγραφικό πόλο. Ο μαγνητικός άξονας σχηματίζει με τον άξονα περιστροφής της Γης γωνία 11 μοιρών.

Μια τυπική μέση τιμή για την μαγνητική επαγωγή του πεδίου αυτού είναι περί το 10^{-4} Tesla. Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι το μαγνητικό πεδίο της Γης επηρεάζεται από τις ηλιακές κηλίδες, η έξαρση των οποίων μπορεί να προκαλέσει απότομες μεταβολές του (μαγνητικές καταιγίδες). Επίσης ένα άλλο γεγονός που έχει αδιαμφισβήτητα αποδειχθεί πειραματικά είναι αυτό της αναστροφής των Γήινων μαγνητικών πόλων (δηλαδή της αντιστροφής της φοράς του μαγνητικού πεδίου της Γης). Αυτό συμβαίνει κάθε 200000 χρόνια περίπου και φαίνεται ότι συνοδεύεται από μεγάλες καταστροφές στον πλανήτη μας.

Το μαγνητικό πεδίο της Γης προκαλεί, πάντοτε, μια ασθενή μαγνήτιση σε κάθε κατασκεύασμα από σιδηρομαγνητικό υλικό που βρίσκεται στην επιφάνεια της. Μια τέτοια

περίπτωση είναι και τα πλοία και αυτό βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στον ναρκοπόλεμο (μαγνητικές νάρκες).

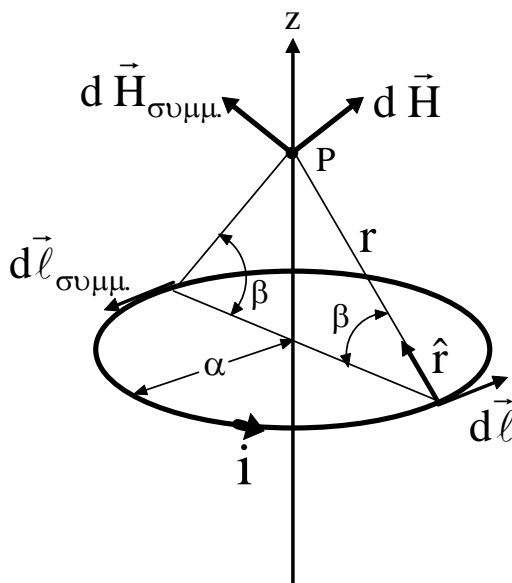
Ένα πολεμικό πλοίο δεν θα πρέπει ποτέ να εμφανίζει μαγνήτιση γιατί τότε καθίσταται ευπρόσβλητο σε μαγνητικές νάρκες. Για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι και συστήματα απομαγνήτισης πλοίων.

(*) Περισσότερες πληροφορίες για το Γήινο μαγνητικό πεδίο μπορούν να βρουν οι ενδιαφερόμενοι στο βιβλίο «Εισαγωγή στη Γεωφυσική» Β. Παπαζάχου Εκδόσεις Ζήτη Θεσσαλονίκη 1995

5.8) Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

ΑΣΚ 5.1) Ένας κυκλικός βρόχος με ακτίνα a διαρρέεται από συνεχές ρεύμα i . Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στον άξονα του βρόχου.

Παρακάτω φαίνεται η γεωμετρία του προβλήματος.



Θεωρούμε ότι ο άξονας του βρόχου συμπίπτει με τον άξονα z και στο κέντρο του βρόχου έχουμε $z = 0$.

Έστω P τυχαίο σημείο πάνω στον άξονα.

Εφαρμόζουμε τον νόμο των Biot – Savart, για ένα στοιχειώδες μήκος $d\vec{\ell}$ του βρόχου, για να υπολογίσουμε την στοιχειώδη ένταση $d\vec{H}$ στο σημείο P .

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{i (\hat{\ell} \times \hat{r})}{r^2} d\ell$$

$$\text{ή: } d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{i (d\vec{\ell} \times \hat{r})}{r^2}$$

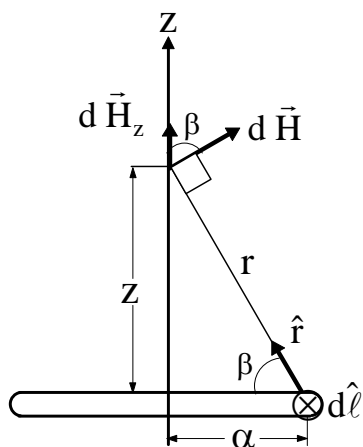
(διότι $d\vec{\ell} = \hat{\ell} d\ell$)

το διάνυσμα $d\vec{H}$ θα είναι κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $d\vec{\ell}$ και \hat{r} και θα έχει μέτρο:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{i}{r^2} d\ell$$

Αν θεωρήσουμε και το συμμετρικό στοιχείο $d\vec{\ell}_{\text{συμμ.}}$ που παράγει αντίστοιχα το $d\vec{H}_{\text{συμμ.}}$ εύκολα θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι οριζόντιες συνιστώσες

αλληλοεξουδετερώνονται και το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο, στον άξονα του βρόχου, έχει μόνον την κατακόρυφη z - συνιστώσα.



Το μέτρο H_z της z - συνιστώσας θα υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα σε όλο το μήκος του βρόχου:

$$H_z = \int_0^{2\pi\alpha} dH_z = \int_0^{2\pi\alpha} dH \cos\beta = \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi\alpha} \frac{\cos\beta}{r^2} d\ell$$

αλλά $\cos\beta = \frac{\alpha}{r}$ συνεπώς:

$$H_z = \frac{i\alpha}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi\alpha} d\ell = \frac{i\alpha}{4\pi r^3} 2\pi\alpha = \frac{i\alpha^2}{2r^3}$$

και επειδή $r = \sqrt{\alpha^2 + z^2}$ τελικά θα έχουμε:

$$\bar{H}_z = \frac{i\alpha^2 \hat{z}}{2(\alpha^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{και όταν } z = 0 \quad \bar{H}_{z,\max} = \frac{i}{2\alpha} \hat{z}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

6.1) Εισαγωγικά

6.1.1) Ορισμός μαγνητικού κυκλώματος

Δύο από τις βασικότερες εφαρμογές του Ηλεκτρομαγνητισμού, **στις χαμηλές συχνότητες**, είναι οι μετασχηματιστές και οι ηλεκτρικές μηχανές (κινητήρες, γεννήτριες) . Οι δύο αυτές εφαρμογές στηρίζονται σε δύο διαφορετικούς νόμους του Ηλεκτρομαγνητισμού:

- τον νόμο της μαγνητικής δύναμης Lorentz (δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό)

$$d\vec{F}_m = i (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

- τον νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής (Faraday)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d \Psi_m}{dt}$$

Παρατηρείται ότι και στους δύο αυτούς νόμους εμπλέκεται το μέγεθος \vec{B} , η μαγνητική επαγωγή ή αλλιώς η πυκνότητα της μαγνητικής ροής, αλλά και το επιφανειακό ολοκλήρωμα του \vec{B} δηλαδή η μαγνητική ροή.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το φυσικό μέγεθος «μαγνητική ροή» παίζει κυρίαρχο ρόλο σε όλες τις εφαρμογές του Ηλεκτρομαγνητισμού. Για το λόγο αυτό έχουν, για τις εφαρμογές, μεγάλη σπουδαιότητα τα θέματα :

α) της παραγωγής της μαγνητικής ροής σε μία επιθυμητή τιμή

β) της μεταφοράς της σε καθορισμένα σημεία ώστε να χρησιμοποιηθεί κατάλληλα.

Οι διατάξεις μέσω των οποίων παράγεται και μεταφέρεται η μαγνητική ροή ονομάζονται **μαγνητικά κυκλώματα**. Μπορούμε εδώ να πούμε ότι τα μαγνητικά κυκλώματα παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με τα ηλεκτρικά κυκλώματα αν κάνουμε την ακόλουθη αντιστοιχία:

Μαγνητικό κύκλωμα \leftrightarrow Μαγνητική ροή

Ηλεκτρικό κύκλωμα \leftrightarrow Ηλεκτρικό ρεύμα

Είναι γνωστό ότι η μαγνητική επαγωγή \vec{B} και επομένως και η μαγνητική ροή Ψ_m , λαμβάνουν μεγάλες συγκριτικά τιμές μέσα στα σιδηρομαγνητικά υλικά.

Επίσης είναι προφανές ότι για τη λειτουργία μιας ηλεκτρικής μηχανής (κινητήρα ή γεννήτριας) απαιτούνται και ελεύθερες περιοχές του χώρου, δηλαδή περιοχές που υπάρχει αέρας και όχι σιδηρομαγνητικό υλικό, και στις οποίες αναπτύσσεται μαγνητική ροή.

Στις περιοχές αυτές υπάρχουν πάντοτε κάποιοι **αγωγοί**. Αν οι αγωγοί αυτοί διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα, προερχόμενο από **εξωτερική πηγή**, τότε ασκείται σ' αυτούς η μαγνητική δύναμη Lorentz, άρα προκαλείται κίνηση των αγωγών και έχουμε λειτουργία ηλεκτρικού κινητήρα. Αν οι αγωγοί κινούνται, από μια **εξωτερική δύναμη**, τότε αναπτύσσεται σ' αυτούς ηλεκτρεγερτική δύναμη και έχουμε λειτουργία ηλεκτρικής γεννήτριας.

Οι περιοχές αυτές, ενός μαγνητικού κυκλώματος, στις οποίες, όπως προαναφέραμε, υπάρχει μαγνητική ροή στον αέρα ονομάζονται **διάκενα αέρα**.

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο, πιο πλήρη, ορισμό του μαγνητικού κυκλώματος:

Μαγνητικό κύκλωμα είναι μια κατασκευή από σιδηρομαγνητικά υλικά και ενδεχομένως διάκενα αέρα, που σκοπό έχει να κατευθύνει τη μαγνητική ροή από τις πηγές της στο σημείο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί.

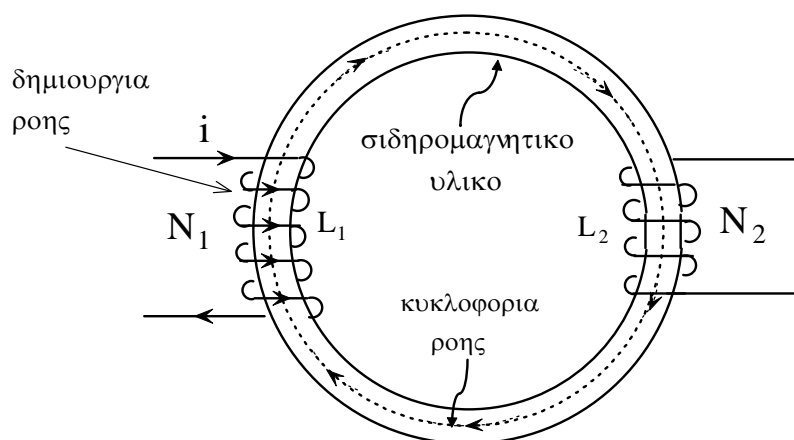
Οι πηγές της μαγνητικής ροής είναι, προφανώς, οι πηγές του μαγνητικού πεδίου και της μαγνητικής επαγωγής, δηλαδή οι μόνιμοι μαγνήτες και οι ρευματοφόροι αγωγοί που σχεδόν πάντα έχουν τη μορφή πηνίου.

6. 1. 2) Παραδείγματα μαγνητικών κυκλωμάτων

Στα σχήματα 6.1 και 6.2 φαίνονται δύο παραδείγματα μαγνητικών κυκλωμάτων

α) Μετασχηματιστής

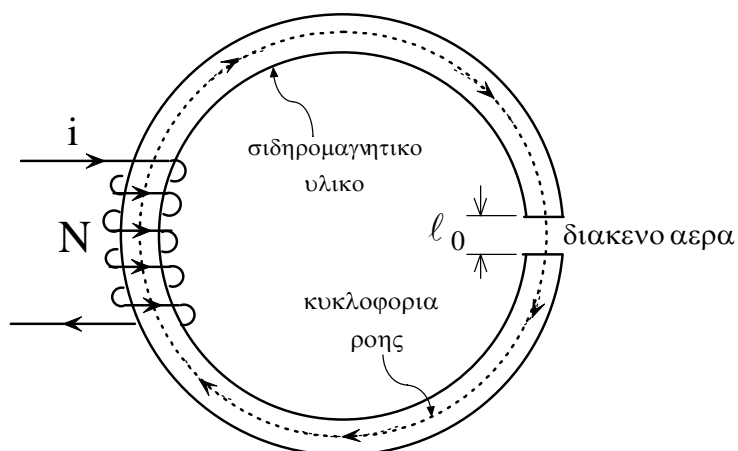
Εδώ η μαγνητική ροή δημιουργείται από το πηνίο L_1 με N_1 σπείρες (πρωτεύον πηνίο) και κατευθύνεται μέσω του σιδηρομαγνητικού υλικού στο πηνίο L_2 με N_2 σπείρες (δευτερεύον πηνίο)



Σχ. 6.1

β) Ηλεκτρική Μηχανή

Εδώ η μαγνητική ροή που δημιουργείται από το πηνίο L κατευθύνεται στο διάκενο αέρα. Στην περιοχή του διακένου υπάρχουν κινούμενοι αγωγοί (λειτουργία κινητήρα ή γεννήτριας)



Σχ. 6.2

6. 2) Επίλυση μαγνητικών κυκλωμάτων

6. 2. 1) Διεγέρσεις και αποκρίσεις σε μαγνητικό κύκλωμα

Αναφέραμε στα προηγούμενα ότι τα μαγνητικά κυκλώματα παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με τα ηλεκτρικά κυκλώματα. Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα ως διεγέρσεις λαμβάνονται πάντοτε οι ηλεκτρικές πηγές (τάσεως ή ρεύματος) και ως αποκρίσεις οι τάσεις ή τα ρεύματα σε κάποιους κλάδους.

Σε ένα μαγνητικό κύκλωμα **διεγέρσεις** είναι οι πηγές μαγνητικού πεδίου ή ισοδύναμα μαγνητικής επαγωγής η ακόμα πιο συγκεκριμένα οι **πηγές μαγνητικής ροής**. Στην πρακτική της μορφή μια πηγή μαγνητικής ροής είναι ένα πηνίο N σπειρών με σιδερομαγνητικό πυρήνα, διαρρεόμενο από ρεύμα i . Προφανώς ο σιδερομαγνητικός αυτός πυρήνας αποτελεί τμήμα του μαγνητικού κυκλώματος. Για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί αμέσως παρακάτω η διεγερση, ή διαφορετικά , η πηγή ροής (δηλ. το πηνίο) χαρακτηρίζεται ποσοτικά από το **γινόμενο $N i$** (αριθμός σπειρών \times ένταση ρεύματος). Το μέγεθος αυτό προφανώς έχει φυσικές διαστάσεις Ampere αλλά στην συγκεκριμένη περίπτωση ονομάζεται **αμπερελίγματα (A- turns)**

Οι αποκρίσεις ενός μαγνητικού κυκλώματος είναι οι τιμές της μαγνητικής ροής Ψ_m σε κάποια σημεία του.

Η επίλυση ενός μαγνητικού κυκλώματος περιλαμβάνει δύο διαφορετικά προβλήματα , που αναφέρονται παρακάτω:

α) Δίδεται η διέγερση (ή οι διεγέρσεις) $N i$ (αμπερελίγματα), και ζητείται η απόκριση Ψ_m , (μαγνητική ροή) σε κάποιο σημείο του μαγνητικού κυκλώματος.

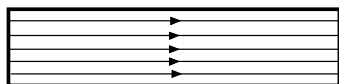
β) Δίδεται η επιθυμητή απόκριση (μαγνητική ροή) Ψ_m σε κάποιο σημείο του μαγνητικού κυκλώματος, και ζητούνται τα απαιτούμενα αμπερελίγματα $N i$ για να επιτευχθεί η ροή αυτή

6. 2. 2) Βασικές παραδοχές επίλυσης μαγνητικών κυκλωμάτων

Λόγω της μη γραμμικότητας που εμφανίζουν τα σιδηρομαγνητικά υλικά η **ακριβής επίλυση** ενός μαγνητικού κυκλώματος είναι πολύ δύσκολη αν όχι αδύνατη. Στην πράξη χρησιμοποιούνται **προσεγγιστικές λύσεις** με βάση κάποιες απλοποιητικές παραδοχές. Οι βασικότερες παραδοχές είναι:

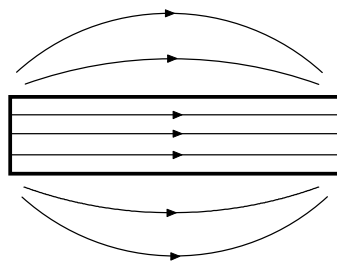
α) Η πρώτη βασική παραδοχή αφορά την μαγνητική ροή. Είναι προφανές ότι οι δυναμικές γραμμές ενός πεδίου μαγνητικής επαγωγής \vec{B} , μπορούν να εκτείνονται ελεύθερα σε όλα τα σημεία του χώρου. Είναι επίσης γνωστό ότι στα σιδηρομαγνητικά υλικά εμφανίζεται πάντοτε πύκνωση των δυναμικών γραμμών του \vec{B} . Στην περίπτωση των μαγνητικών κυκλωμάτων γίνεται η ακόλουθη προσεγγιστική παραδοχή:

- Σε κάθε τμήμα του μαγνητικού κυκλώματος, που αποτελείται από σιδηρομαγνητικό υλικό, **όλες** οι δυναμικές γραμμές του πεδίου \vec{B} , και επομένως όλη η μαγνητική ροή, διέρχονται μέσα από το σιδηρομαγνητικό υλικό και όχι από τον αέρα που το περιβάλλει. Το φαινόμενο της «εξόδου» κάποιων δυναμικών γραμμών στον αέρα ονομάζεται **σκέδαση** των δυναμικών γραμμών. Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή το φαινόμενο της σκέδασης αγνοείται εντελώς. Τα σχήματα 6.3α και 6.3β βοηθούν στην κατανόηση των ανωτέρω.



Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει σκέδαση των δυναμικών γραμμών του B (όλες οι δυναμικές γραμμές βρίσκονται μέσα στο σιδηρομαγνητικό υλικό)

Σχ. 6.3α



Στη περίπτωση αυτή κάποιες δυναμικές γραμμές εξέρχονται στον αέρα (Υπάρχει σκέδαση των δυναμικών γραμμών του B)

Σχ. 6.3β

β) Η δεύτερη βασική παραδοχή κάνει μια σημαντική απλοποίηση όσον αφορά την μορφή των πεδίων \vec{B} και \vec{H} στα διάφορα σημεία του μαγνητικού κυκλώματος. Συγκεκριμένα θεωρείται ότι, σε κάθε σημείο του μαγνητικού κυκλώματος, τα πεδία \vec{B} και \vec{H} είναι **ομογενή πεδία**. Αυτό έχει σαν άμεση συνέπεια την μεγάλη απλούστευση του τρόπου υπολογισμού της μαγνητικής ροής Ψ_m . Έτσι η μαγνητική ροή, στα διάφορα σημεία, αντί να υπολογιστεί από τον βασικό ορισμό της $\Psi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, υπολογίζεται από το απλό γινόμενο $\Psi_m = B S$

6. 2. 3) Νόμοι επίλυσης μαγνητικών κυκλωμάτων

Η επίλυση των μαγνητικών κυκλωμάτων βασίζεται σε δύο νόμους που μπορούμε να πούμε ότι αντιστοιχούν στους δύο νόμους του Kirchhoff που χρησιμοποιούνται στα ηλεκτρικά κυκλώματα. Οι δύο αυτοί νόμοι είναι:

- **Ο νόμος του Ampere** $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = N i$

όπου εδώ θεωρείται ότι το ρεύμα i διαπερνά N φορές την επιφάνεια επί της οποίας ευρίσκεται η κλειστή καμπύλη στην οποία υπολογίζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του H . Το μέγεθος $N i$ είναι, όπως προαναφέρθηκε, τα αμπερελίγματα (A-turns)

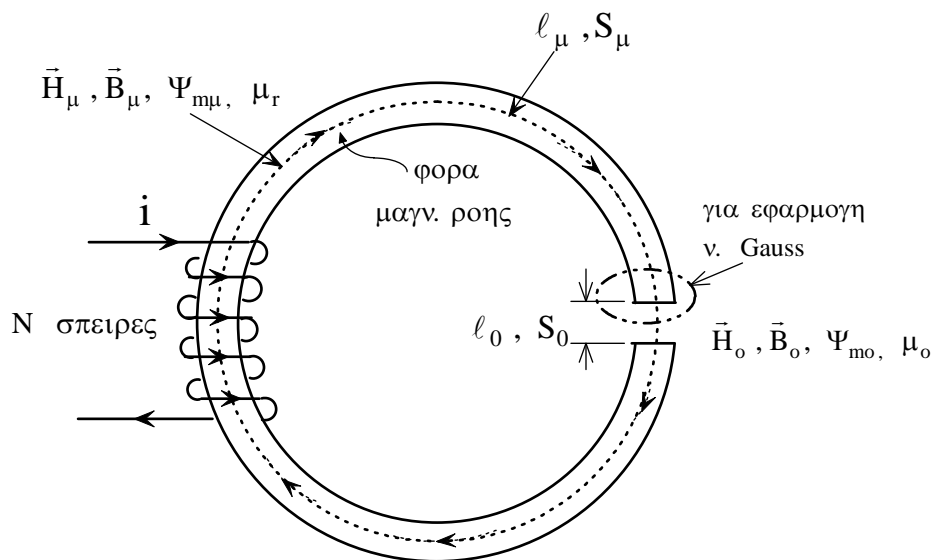
Ο νόμος του Ampere στα μαγνητικά κυκλώματα αντιστοιχεί στον νόμο τάσεων του Kirchhoff στα ηλεκτρικά κυκλώματα.

- **Ο νόμος του Gauss για τη μαγνητική ροή** $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Ο νόμος του Gauss στα μαγνητικά κυκλώματα αντιστοιχεί στον νόμο ρευμάτων του Kirchhoff στα ηλεκτρικά κυκλώματα.

6.3) Εισαγωγικό παράδειγμα μαγνητικού κυκλώματος

6.3.1) Αρχική πορεία επίλυσης



Σχ. 6.4

Στο σχήμα 6.4 έχουμε ένα μαγνητικό κύκλωμα που αποτελείται από ένα τμήμα σιδηρομαγνητικού υλικού, με μαγνητική διαπερατότητα μ_r , και ένα διάκενο αέρα.

Η πηγή της μαγνητικής ροής είναι ένα πηνίο N – σπειρών που διαρρέεται από συνεχές ρεύμα i με τη φορά του σχήματος. Επομένως έχουμε εδώ συνολικά $N i$ αμπερελίγματα.

Με τη δεδομένη φορά του ρεύματος i , η φορά της μαγνητικής ροής θα είναι αυτή που δείχνουν τα βέλη στην διακεκομμένη γραμμή.

Η διαδρομή της μαγνητικής ροής στο σιδηρομαγνητικό υλικό έχει μήκος l_μ και αντίστοιχα στο διάκενο αέρα l_0 (μέσα μήκη διαδρομών ροής).

Τα εμβαδά των διατομών, μέσα από τα οποία διέρχεται η μαγνητική ροή, είναι S_μ και S_0 , για το σιδηρομαγνητικό υλικό και τον αέρα αντίστοιχα.

Οι τιμές του μαγνητικού πεδίου, της μαγνητικής επαγωγής και της μαγνητικής ροής στο σιδηρομαγνητικό υλικό είναι αντίστοιχα: \vec{H}_μ , \vec{B}_μ , $\Psi_{m\mu}$. Στο διάκενο αέρα έχουμε τις τιμές \vec{H}_0 , \vec{B}_0 , Ψ_{m0} .

Θεωρούμε γνωστό μέγεθος τη διέγερση $N i$ (αμπερελίγματα), τη γεωμετρία του προβλήματος (l_μ , l_0 , S_μ , S_0) και τα υλικά (μ_r , μ_0)

Ζητούμενα μεγέθη είναι οι μαγνητικές ροές $\Psi_{m\mu}$, Ψ_{m0} και τα πεδία \vec{H}_μ , \vec{B}_μ και \vec{H}_0 , \vec{B}_0

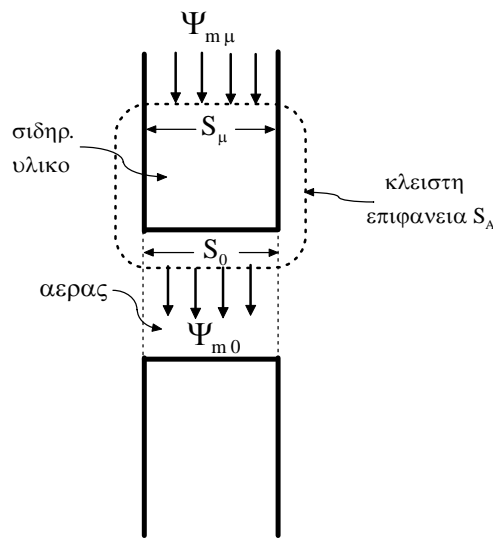
Παρακάτω επιλύουμε το πρόβλημα με βάση τους δύο νόμους που προαναφέρθηκαν

α) Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere στον βρόχο που σχηματίζει η διαδρομή της μαγνητικής ροής

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_{\mu} \ell_{\mu} + H_0 \ell_0 = N i$$

Προφανώς εδώ έγινε προσεγγιστικός υπολογισμός του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, λαμβάνοντας υπ' όψη τις παραδοχές που προαναφέρθηκαν (ομογενή πεδία H και B)

β) Εφαρμόζουμε και τον νόμο του Gauss για την μαγνητική ροή σε μια κλειστή επιφάνεια S_A στον χώρο του διακένου. Στην κλειστή αυτή επιφάνεια οι γραμμές ροής εισέρχονται από την περιοχή του σιδηρομαγνητικού υλικού και εξέρχονται στον αέρα (βλ. σχήμα 6.5)



Σχ. 6.5

Ο νόμος Gauss γράφεται :

$$\oiint_{S_A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Επομένως θα έχουμε: $\Psi_{m\mu} - \Psi_{m0} = 0$ άρα $\Psi_{m\mu} = \Psi_{m0}$

Δηλαδή η μαγνητική ροή θα έχει την ίδια τιμή στο σιδηρομαγνητικό υλικό και στον αέρα.

Επειδή χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική σχέση υπολογισμού της μαγνητικής ροής:

$$\Psi_m = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B S$$

Θα έχουμε:

$$\Psi_{m\mu} = \Psi_{m0} \Rightarrow B_{\mu} S_{\mu} = B_0 S_0$$

όπου S_{μ} και S_0 τα αντίστοιχα εμβαδά δια των οποίων διέρχεται η ροή στο σιδηρομαγνητικό υλικό και στον αέρα.

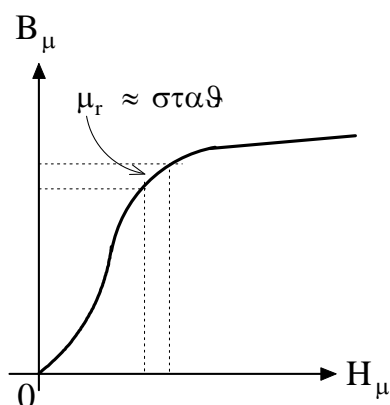
Το μαγνητικό πεδίο στο διάκενο θα έχει μέτρο: $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$

Αντίστοιχα το μαγνητικό πεδίο στο σιδηρομαγνητικό υλικό θα έχει μέτρο: $H_\mu = \frac{B_\mu}{\mu_0 \mu_r}$

Η σχέση όμως που συνδέει τα μεγέθη H_μ και B_μ είναι μη γραμμική

Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι για μια **περιοχή τιμών** των μεγεθών H_μ και B_μ ισχύει η γραμμικότητα (βλ. σχήμα 6.6) Στην περιοχή αυτή ο συντελεστής σχετικής

μαγνητικής διαπερατότητας $\mu_r = \frac{B_\mu}{\mu_0 H_\mu}$ θα έχει σταθερή τιμή



Σχ. 6.6

Εφ' όσον βρισκόμαστε μέσα στην περιοχή αυτή μπορούμε να γράψουμε τον νόμο του Ampere για το παράδειγμά μας:

$$H_\mu \ell_\mu + H_0 \ell_0 = \frac{B_\mu}{\mu_0 \mu_r} \ell_\mu + \frac{B_0}{\mu_0} \ell_0 = N i$$

και επειδή από τον νόμο του Gauss έχουμε:

$$B_\mu S_\mu = B_0 S_0$$

άρα προκύπτει:

$$B_\mu = \frac{B_0 S_0}{S_\mu}$$

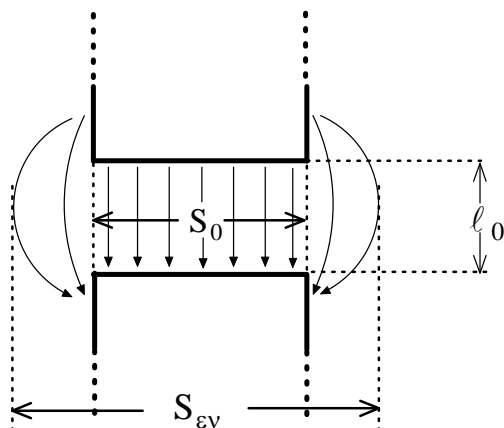
Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην έκφραση του ν. Ampere θα πάρουμε:

$$\frac{B_0 S_0}{\mu_0 \mu_r S_\mu} \ell_\mu + \frac{B_0}{\mu_0} \ell_0 = N i \Rightarrow B_0 = \frac{N i}{\frac{S_0 \ell_\mu}{\mu_0 \mu_r S_\mu} + \frac{\ell_0}{\mu_0}}$$

Έτσι υπολογίζεται το πεδίο B_0 στο διάκενο και μπορούμε τώρα να βρούμε και την μαγνητική ροή $\Psi_m = B_0 S_0$ καθώς και τα μεγέθη H_μ και B_μ .

6.3.2) Σκέδαση των δυναμικών γραμμών

Στις περιοχές των διακένων, ενός μαγνητικού κυκλώματος, λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της σκέδασης των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου (βλ. σχήμα 6.7)



Σχ. 6.7

Ένας αριθμός δυναμικών γραμμών του B εξέρχεται εκτός της διατομής S_0 και επομένως η μαγνητική ροή Ψ_{m0} στην περιοχή του διακένου είναι μικρότερη της αναμενόμενης (διότι χωρίς σκέδαση θα πρέπει να ισχύει $\Psi_{m0} = \Psi_{m\mu}$)

Ορίζεται εδώ ο συντελεστής σκέδασης κ

$$\kappa = \frac{\Psi_{m0}}{\Psi_{m\mu}} = \frac{B_0 S_0}{B_\mu S_\mu}$$

προφανώς ισχύει πάντοτε : $0 < \kappa \leq 1$

Στην περίπτωση που θέλουμε να λάβουμε υπ' όψη την σκέδαση των δυναμικών γραμμών στην περιοχή του διακένου μπορούμε αντί της διατομής με εμβαδόν S_0 στο διάκενο να θεωρήσουμε διατομή S_{ev} που υπολογίζεται από τον εμπειρικό τύπο

$$S_{ev} = (a + l_0)(b + l_0)$$

όπου a, b οι διαστάσεις της διατομής $S_0 = a b$

6.3.3) Συντελεστής πλήρωσης

Το τμήμα του μαγνητικού κυκλώματος που αποτελείται από σιδηρομαγνητικό υλικό κατασκευάζεται πάντοτε από ένα αριθμό φύλλων μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται μονωτικό βερνίκι. Αυτό γίνεται για να μειωθούν οι απώλειες λόγω των δινορευμάτων. Για το

λόγο αυτό, η καθαρή διατομή σιδηρομαγνητικού υλικού είναι λίγο μικρότερη από την γεωμετρική διατομή και ορίζεται ο συντελεστής πλήρωσης C_π όπου:

$$S_{ev} = C_\pi S_\mu$$

S_{ev} : η διατομή που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για ορθότερο υπολογισμό της μαγνητικής ροής στο σιδηρομαγνητικό υλικό λαμβάνοντας υπ' όψη την κατασκευή με αριθμό φύλλων

S_μ : η γεωμετρική διατομή του σιδηρομαγνητικού υλικού

Τυπικές τιμές για τον συντελεστή C_π είναι $C_\pi = 0.9 - 0.95$

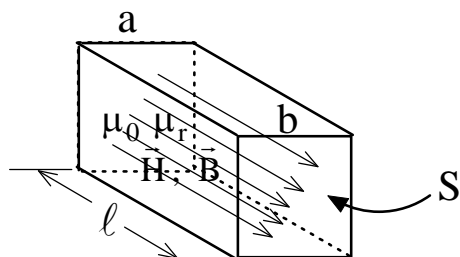
6. 4) Αντιστοιχίες μεγεθών μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών κυκλωμάτων

Όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα υπάρχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ ενός μαγνητικού και ενός ηλεκτρικού κυκλώματος. Στα ηλεκτρικά κυκλώματα μεταξύ των τριών βασικών μεγεθών: ηλεκτρική τάση, ηλεκτρικό ρεύμα και αντίσταση ισχύει ο γνωστός νόμος του Ohm. Επίσης, στις ηλεκτρικές πηγές, ορίζεται και το μέγεθος ηλεκτρεγερτική δύναμη. Τα 4 αυτά μεγέθη πρέπει να έχουν τα αντίστοιχά τους στην περίπτωση μαγνητικού κυκλώματος.

Είδαμε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα έχει αντίστοιχο μέγεθος την μαγνητική ροή. Αντίστοιχα με την ηλεκτρική τάση, η οποία ορίζεται ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου, θα υπάρχει η μαγνητική τάση που θα ορίζεται ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου. Το αντίστοιχο μέγεθος της ηλεκτρεγερτικής δύναμης (αίτιο δημιουργίας ηλεκτρικού ρεύματος) είναι τα αμπερελίγματα Ni (αίτιο δημιουργίας μαγνητικής ροής) που αποκαλούνται και μαγνητεγερτική δύναμη

Σε αναλογία με την ηλεκτρική αντίσταση, που ορίζεται ως το πηλίκο της ηλεκτρικής τάσης προς το ηλεκτρικό ρεύμα, έχουμε την μαγνητική αντίσταση που ορίζεται ως το πηλίκο της μαγνητικής τάσης προς την μαγνητική ροή. Παρακάτω εξετάζουμε πιο αναλυτικά τον ορισμό του μεγέθους αυτού.

Η μαγνητική αντίσταση R_m για ένα τεμάχιο υλικού με μορφή πρίσματος με μήκος ℓ εμβαδόν διατομής S και μαγνητική διαπερατότητα $\mu = \mu_0 \mu_r$ (βλ. σχ. 6.8) θα είναι:



Σχ. 6.8

$$\text{μαγνητικη αντισταση } R_m = \frac{\text{μαγν. ταση}}{\text{μαγν. ροη}}$$

$$\text{άρα: } R_m = \frac{\int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{\ell}}{\Psi_m} = \frac{\int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{\ell}}{\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}} = \frac{H \ell}{B S} = \frac{H \ell}{\mu_0 \mu_r H S} \Rightarrow R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\ell}{S}$$

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε όλες τις αντιστοιχίες μεγεθών μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών κυκλωμάτων

Μαγνητικό κύκλωμα**Ηλεκτρικό κύκλωμα**Ένταση μαγνητικού πεδίου \vec{H} Ένταση ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} Μαγνητική ροή $\Psi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ Ηλεκτρικό ρεύμα $i = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$ Πυκνότητα μαγνητικής ροής \vec{B} Πυκνότητα ροής ηλ. ρεύματος \vec{J} Συντακτική σχέση $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ Συντακτική σχέση $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

Μαγνητρεγερτική δύναμη (ΜΕΔ)

Ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ)

$$\text{ΜΕΔ} = N i$$

$$e = \int_a^b \vec{E}_s \cdot d\vec{\ell}$$

Μαγνητική τάση

Ηλεκτρική τάση

$$V_{\text{mab}} = \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

$$V_{\text{ab}} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Μαγνητική διαπερατότητα $\mu = \mu_0 \mu_r$ Ειδική αγωγιμότητα γ

$$\text{Μαγνητική αντίσταση } R_m = \frac{V_{\text{mab}}}{\Psi_m}$$

$$\text{Ηλεκτρική αντίσταση } R = \frac{V_{\text{ab}}}{i}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών κυκλωμάτων. Υπάρχουν όμως και σημαντικές διαφορές. Οι δύο βασικότερες είναι:

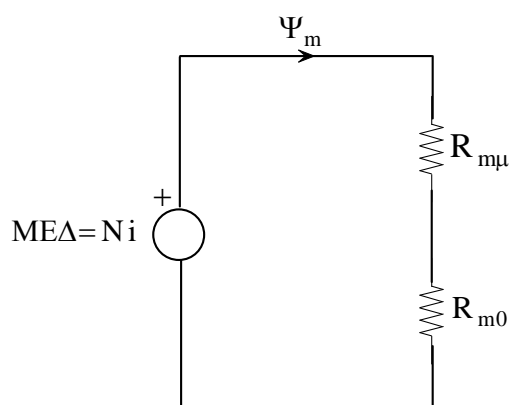
α) Στα ηλεκτρικά κυκλώματα όλο το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μέσα στους αγωγούς διότι ο περιβάλλον χώρος έχει μηδενική ειδική αγωγιμότητα. ($\gamma = 0$)

Αντίθετα στα μαγνητικά κυκλώματα παρατηρείται το φαινόμενο της σκέδασης των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου, και ένα (μικρό) μέρος της μαγνητικής ροής βγαίνει έξω από το κύκλωμα και κυκλοφορεί στον αέρα (διότι $\mu_0 \neq 0$)

β) Τα ηλεκτρικά κυκλώματα είναι κατά κανόνα γραμμικά διότι ο νόμος του Ohm $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, είναι με μεγάλη προσέγγιση μια γραμμική σχέση, ενώ αντίθετα η σχέση $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ είναι μη γραμμική.

6.5) Επίλυση μαγνητικού κυκλώματος μέσω του αντίστοιχου ισοδύναμου ηλεκτρικού κυκλώματος

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις αντιστοιχίες μεγεθών μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών κυκλωμάτων το εισαγωγικό παράδειγμα μαγνητικού κυκλώματος της παραγράφου 6.3 θα έχει το παρακάτω ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα (σχ. 6.9)



Σχ. 6.9

Δηλαδή έχουμε δύο μαγνητικές αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά και τροφοδοτούμενες από μια πηγή ΜΕΔ.

Οι μαγνητικές αντιστάσεις θα έχουν τιμές:

$$R_{m\mu} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\ell_\mu}{S_\mu} \quad \text{και} \quad R_{m0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\ell_0}{S_0}$$

άρα η μαγνητική ροή θα είναι:

$$\Psi_m = \frac{Ni}{R_{m\mu} + R_{m0}} = \frac{Ni}{\frac{\ell_\mu}{\mu_0 \mu_r S_\mu} + \frac{\ell_0}{\mu_0 S_0}}$$

και τα μεγέθη B, H υπολογίζονται εύκολα:

$$B_\mu = \frac{\Psi_m}{S_\mu}, \quad B_0 = \frac{\Psi_m}{S_0}, \quad H_\mu = \frac{B_\mu}{\mu_0 \mu_r}, \quad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$$

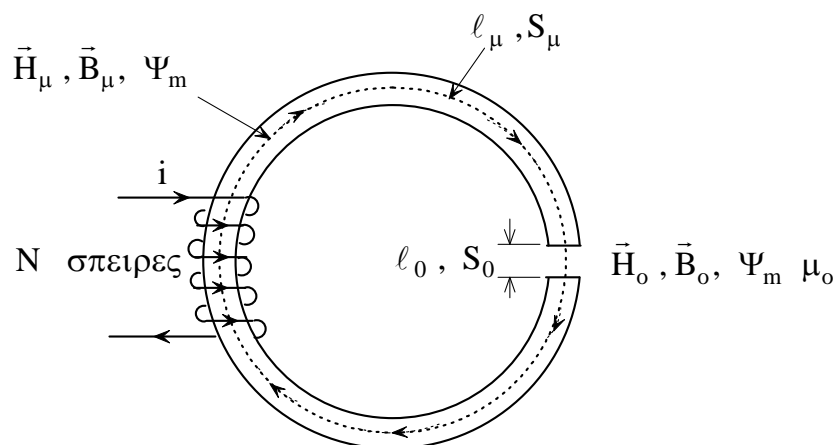
Γενικεύοντας λοιπόν μπορούμε σε κάθε μαγνητικό κύκλωμα να βρούμε το αντίστοιχο ισοδύναμο ηλεκτρικό.

Σημειώνουμε ότι ισχύουν όλοι οι κανόνες και νόμοι των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε.

6.6) Μη γραμμικό μαγνητικό κύκλωμα

Στην περίπτωση που λάβουμε υπ' όψη τη μη γραμμικότητα του σιδηρομαγνητικού υλικού θα πρέπει να μας έχει δοθεί η λεπτομερής γραφική παράσταση της καμπύλης μαγνήτισης.

Εξετάζουμε και πάλι το προηγούμενο παράδειγμα αλλά τώρα θεωρούμε γνωστή τη μαγνητική ροή Ψ_m και θέλουμε να υπολογίσουμε τα αμπερελίγματα που την προκαλούν



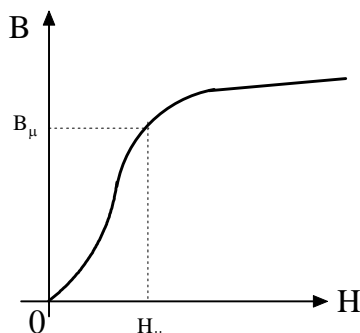
Σχ. 6.10

Ισχύουν και πάλι οι δύο βασικές σχέσεις:

$$H_{\mu} \ell_{\mu} + H_0 \ell_0 = Ni \quad (\text{N. Ampere})$$

$$B_{\mu} S_{\mu} = B_0 S_0 \quad (\text{N. Gauss})$$

Γνωρίζουμε όμως και την καμπύλη μαγνήτισης του σιδηρομαγνητικού υλικού (σχ. 6.11)



Σχ. 6.11

Εφ' όσον γνωρίζουμε τη μαγνητική ροή Ψ_m υπολογίζουμε το $B_{\mu} = \frac{\Psi_m}{S_{\mu}}$ και από τη δοθείσα

καμπύλη μαγνήτισης βρίσκουμε γραφικά το H_{μ}

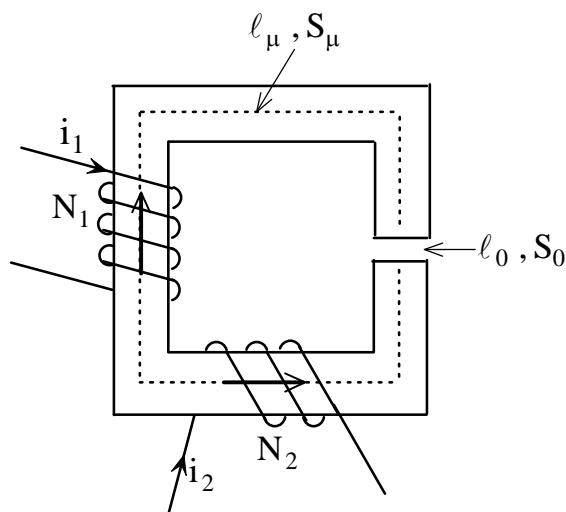
Στο διάκενο θα έχουμε $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$ όπου $B_0 = \frac{\Psi_m}{S_0}$ άρα $H_0 = \frac{\Psi_m}{\mu_0 S_0}$

Άρα με γνωστά τα H_{μ} και H_0 εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere και βρίσκουμε τα ζητούμενα αμπερελίγματα

$$Ni = H_{\mu} \ell_{\mu} + H_0 \ell_0 = H_{\mu} \ell_{\mu} + \frac{\Psi_m}{\mu_0 S_0} \ell_0$$

6.7) Ασκήσεις Κεφαλαίου 6

ΑΣΚ 6.1)



Σχ. 6.12

Στο μαγνητικό κύκλωμα του σχήματος 6.12 δίδονται:

$$N_1 i_1 = 100 \text{ A-turns}$$

$$N_2 i_2 = 50 \text{ A-turns}$$

$$\ell_{\mu} = 50 \text{ cm (πυρήνας)}$$

$$\ell_0 = 5 \text{ mm (διάκενο)}$$

$$S_{\text{πυρήνα}} = S_0 = 10 \text{ cm}^2$$

$c_{\pi} = 0.9$ (συντελεστής πλήρωσης)

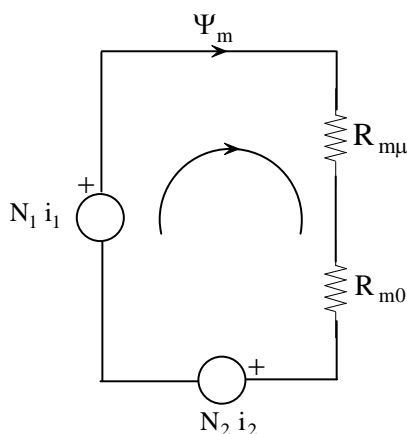
$$\mu_r = 2000,$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Ζητείται να υπολογιστεί η μαγνητική ροή Ψ_m του κυκλώματος

Αρχικά υπολογίζουμε την ενεργό διατομή S_μ (καθαρό σιδηρομαγνητικό υλικό) για τον πυρήνα. $S_\mu = c_\pi S_{\text{πυρήν}} = 0.9 \cdot 10 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$

Το ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα θα είναι (σχ. 6.13):



Σχ. 6.13

Εδώ υποθέσαμε για τη μαγνητική ροή μια αυθαίρετη φορά. Αν προκύψει αρνητικό αποτέλεσμα για τη ροή τότε αυτή θα έχει αντίθετη φορά από αυτήν του σχήματος.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere (ο οποίος αντιστοιχεί στον νόμο τάσεων Kirchhoff) στον μοναδικό βρόχο του κυκλώματος χρησιμοποιώντας τη φορά διαγραφής που φαίνεται

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \Psi_m (R_{m\mu} + R_{m0}) \Rightarrow \Psi_m = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{R_{m\mu} + R_{m0}}$$

όπου: $R_{m\mu} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\ell_\mu}{S_\mu} = 2.21 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$ και $R_{m0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\ell_0}{S_0} = 3.98 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$

παρατηρούμε ότι $R_{m0} \gg R_{m\mu}$ δηλ. η μαγνητική αντίσταση του αέρα είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν του μαγνητικού υλικού (οι γραμμές μαγνητικής ροής συγκεντρώνονται στο υλικό)

Άρα τελικά προκύπτει: $\Psi_m = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{R_{m\mu} + R_{m0}} = 1.19 \times 10^{-5} \text{ Weber}$

Μπορούμε τώρα εύκολα να υπολογίσουμε και τα πεδία

$$B_{\mu} = \frac{\Psi_m}{S_{\mu}} = 1.32 \times 10^{-2} \text{ Tesla}$$

$$B_0 = \frac{\Psi_m}{S_0} = 1.19 \times 10^{-2} \text{ Tesla}$$

$$H_{\mu} = \frac{B_{\mu}}{\mu_0 \mu_r} = 5.25 \text{ A/m}$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = 9469 \text{ A/m}$$

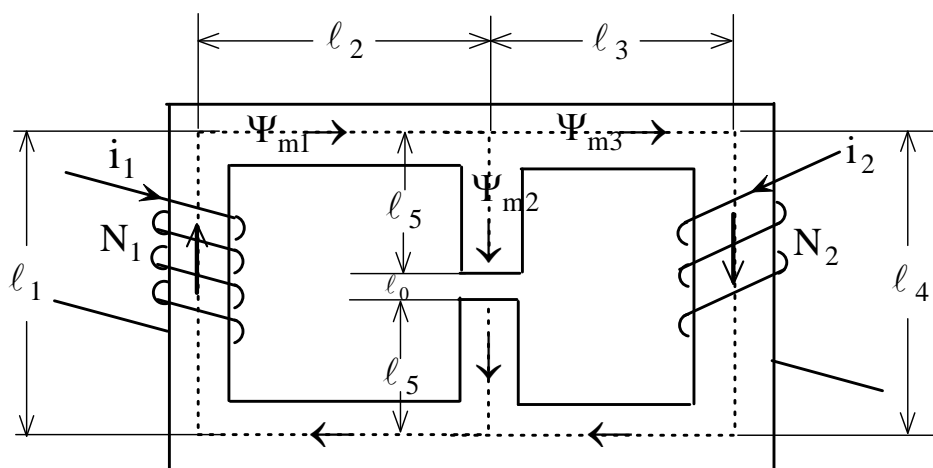
Ένας καλός τρόπος ελέγχου της λύσης είναι να δούμε αν επαληθεύεται ο νόμος του Ampere.

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = H_{\mu} \ell_{\mu} + H_0 \ell_0$$

Εδώ το αριστερό μέλος δίνει: $N_1 i_1 - N_2 i_2 = 50 \text{ A-turns}$

Το δεξιό μέλος δίνει: $H_{\mu} \ell_{\mu} + H_0 \ell_0 = 49.97 \text{ A-turns}$

ΑΣΚ 6.2)



Σχ. 6.14

Στο μαγνητικό κύκλωμα του σχήματος 6.14 δίδονται οι τιμές:

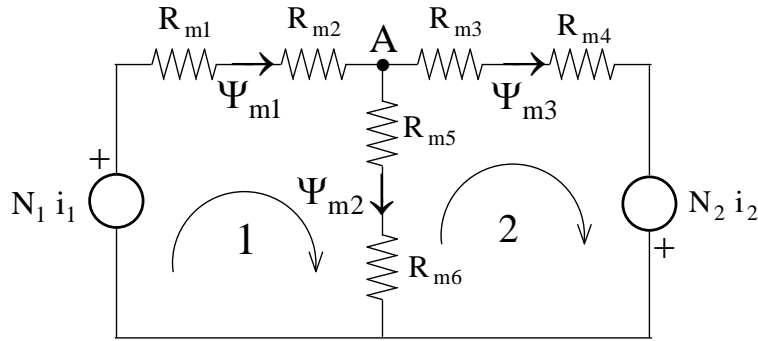
$$N_1 i_1 = 50 \text{ A-turns}, \quad N_2 i_2 = 20 \text{ A-turns}$$

$$\ell_1 = 10 \text{ cm} \quad \ell_2 = 5 \text{ cm} \quad \ell_3 = 4 \text{ cm} \quad \ell_4 = 10 \text{ cm} \quad \ell_5 = 4.75 \text{ cm} \quad \ell_0 = 0.5 \text{ cm},$$

οι διατομές $S_{\mu} = S_0 = 4 \text{ cm}^2$ και $\mu_r = 2000$.

Ζητείται να υπολογιστούν οι μαγνητικές ροές Ψ_{m1} , Ψ_{m2} , Ψ_{m3} που διαρρέουν τα 3 σκέλη του κυκλώματος

Το ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα θα είναι (σχ. 6.15) :



Σχ. 6.15

Οι φορές των μαγνητικών ροών Ψ_{m1} Ψ_{m2} Ψ_{m3} έχουν τεθεί αυθαίρετα. Οι μαγνητικές αντιστάσεις υπολογίζονται κατά τα γνωστά από τις σχέσεις:

$$R_{m1} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\ell_1}{S_\mu} = 99500 \text{ H}^{-1}, \quad R_{m2} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{2\ell_2}{S_\mu} = 99500 \text{ H}^{-1},$$

$$R_{m3} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{2\ell_3}{S_\mu} = 79600 \text{ H}^{-1}, \quad R_{m4} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\ell_4}{S_\mu} = 99500 \text{ H}^{-1},$$

$$R_{m5} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{2\ell_5}{S_\mu} = 94525 \text{ H}^{-1}, \quad R_{m6} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\ell_0}{S_0} = 9.95 \times 10^6 \text{ H}^{-1} \text{ (στο διάκενο)}$$

Καταστρώνουμε τις εξισώσεις για την επίλυση του μαγνητικού κυκλώματος χρησιμοποιώντας την ίδια ακριβώς μεθοδολογία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

Νόμος Gauss στον κόμβο A: $\Psi_{m1} - \Psi_{m2} - \Psi_{m3} = 0$ (αντίστοιχος με Νόμο ρευμάτων του Kirchhoff)

Νόμος Ampere στον βρόχο 1: $\Psi_{m1} (R_{m1} + R_{m2}) + \Psi_{m2} (R_{m5} + R_{m6}) = N_1 i_1$
(αντίστοιχος με Νόμο τάσεων του Kirchhoff)

Νόμος Ampere στον βρόχο 2: $-\Psi_{m2} (R_{m5} + R_{m6}) + \Psi_{m3} (R_{m3} + R_{m4}) = N_2 i_2$
(αντίστοιχος με Νόμο τάσεων του Kirchhoff)

Λύνοντας αυτό το γραμμικό σύστημα με αγνώστους τις ροές Ψ_{m1} Ψ_{m2} Ψ_{m3} βρίσκουμε:

$$\Psi_{m1} = 1.857 \times 10^{-4} \text{ Weber}, \quad \Psi_{m2} = 1.297 \times 10^{-6} \text{ Weber}, \quad \Psi_{m3} = 1.844 \times 10^{-4} \text{ Weber}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

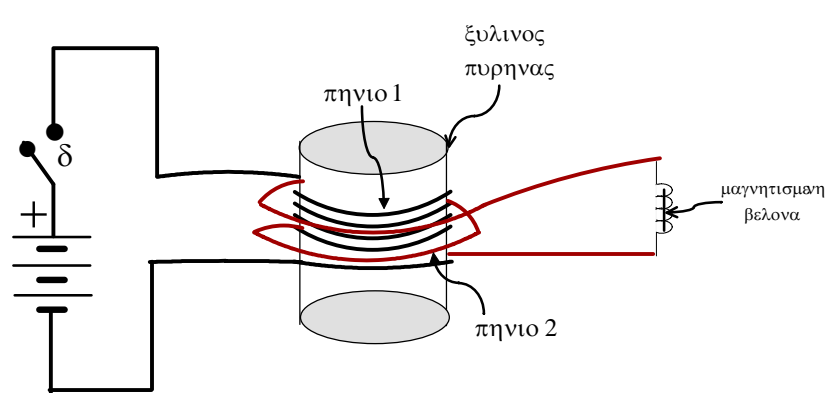
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

7.1) Εισαγωγικά

Το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, ένα από τα σπουδαιότερα φαινόμενα του Ηλεκτρομαγνητισμού, ανακαλύφθηκε πειραματικά από τους Faraday και Henry οι οποίοι εργάζονταν ανεξάρτητα. Ο Άγγλος ερευνητής Michael Faraday εκτέλεσε κατά την δεκαετία του 1830 μια σειρά από πειράματα, τα αποτελέσματα των οποίων δημοσίευσε στο βιβλίο του “Experimental Researches in Electricity” που εκδόθηκε στο Λονδίνο το 1839.

Την εποχή εκείνη ήταν καλά γνωστές οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ στατικών ηλεκτρικών φορτίων, δηλαδή η ηλεκτρίση εξ' επαγωγής (ένα ηλεκτρικό φορτίο - θετικό ή αρνητικό- έλκει γύρω του αντίθετα ηλεκτρικά φορτία). Ο Faraday πίστευε ότι παρόμοιο φαινόμενο πρέπει να συμβαίνει και με το ηλεκτρικό ρεύμα. Εδώ λέγοντας ηλεκτρικό ρεύμα εννοείται το **συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα** το οποίο λαμβάνονταν από συσσωρευτές. Το εναλλασσόμενο ή γενικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό ρεύμα δεν είχε ακόμα μελετηθεί.

Παρακάτω φαίνεται, (σχ. 7.1) μία από τις πειραματικές διατάξεις του Faraday.



Σχ. 7.1

Στη διάταξη αυτή ο Faraday προσπάθησε να φέρει σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους δύο αγωγίμα σύρματα και για τον σκοπό αυτό τα τύλιξε γύρω από ένα ξύλινο κύλινδρο σχηματίζοντας έτσι δύο πηνία (πηνίο1 , πηνίο2). Το πηνίο1 συνδέθηκε μέσω ενός διακόπτη με ένα ηλεκτρικό συσσωρευτή. Ο Faraday ανέμενε ότι όταν το πηνίο1 διαρρέεται από συνεχές ρεύμα τότε θα «επάγοταν» συνεχές ρεύμα στο πηνίο2. Για την ανίχνευση αυτού του ρεύματος το πηνίο2 συνδέθηκε με ένα πρωτότυπο όργανο (ένα είδος γαλβανομέτρου) που αποτελούνταν από ένα μικρό πηνίο με πολλές σπείρες μέσα στο οποίο είχε τοποθετηθεί μια μαγνητισμένη βελόνα. Η εμφάνιση συνεχούς ρεύματος στο πηνίο2 θα μετακινούσε αμέσως

την βελόνα αυτή. (ήταν ήδη γνωστό τότε ότι το συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα παράγει μαγνητικό πεδίο)

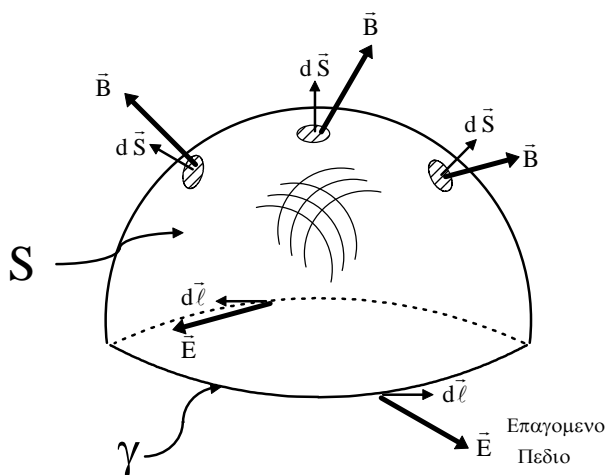
Ο Faraday δεν παρατήρησε καμιά κίνηση της βελόνας όταν το πηνίο1 διαρρέοταν από συνεχές ρεύμα. Παρ' όλα αυτά επαναλαμβάνοντας το πείραμα αρκετές φορές παρατήρησε μια πολύ μικρή κίνηση της βελόνας **ακριβώς την χρονική στιγμή** που έκλεινε ή άνοιγε τον διακόπτη δ. Παρατήρησε επίσης ή κίνηση αυτή ακολουθούσε **αντίθετη φορά** κατά το κλείσιμο και κατά το άνοιγμα του διακόπτη δηλαδή όταν είχαμε αύξηση ή ελάττωση του ρεύματος ή εν γένει **μεταβολή** του ρεύματος . Με την παρατήρηση αυτή το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής είχε ήδη ανακαλυφθεί.

7.2) Διατύπωση του Νόμου της Επαγωγής

Η αυστηρή μαθηματική διατύπωση του Νόμου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, που ονομάζεται και Νόμος του Faraday, έγινε από τον Maxwell με χρήση των εννοιών του πεδίου και της ροής. Ο νόμος περιλαμβάνεται βέβαια στις 4 εξισώσεις που διατύπωσε ο Maxwell το 1865.

Η διατύπωση του νόμου είναι η ακόλουθη:

- Έστω μια **ανοικτή** επιφάνεια S η οποία καταλήγει στην **κλειστή** καμπύλη γ (βλ. σχήμα 7.2). Θεωρούμε ότι στον χώρο που βρίσκεται η S επικρατεί ένα μαγνητικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή \vec{B} . Το πεδίο αυτό δημιουργεί δια της επιφάνειας S μια μαγνητική ροή Ψ_m .



Σχ. 7.2

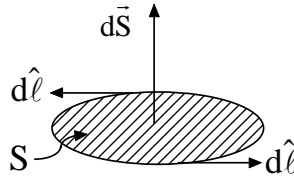
Το πείραμα του Faraday έδειξε ότι εάν η μαγνητική αυτή ροή Ψ_m , **μεταβάλλεται χρονικά**, τότε έχουμε **ανάπτυξη ενός ηλεκτρικού πεδίου** \vec{E} στο χώρο.

Το πεδίο αυτό, το οποίο λέγεται και επαγόμενο πεδίο, συνδέεται με το πεδίο \vec{B} , ή με την μαγνητική ροή Ψ_m , με την ακόλουθη μαθηματική σχέση:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Psi_m}{dt}$$

Δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} στην κλειστή καμπύλη γ στην οποία καταλήγει η επιφάνεια S , είναι ίσο με την αρνητική παράγωγο (ρυθμός ελάττωσης) της μαγνητικής ροής Ψ_m δια της S .

Για τον σωστό υπολογισμό των δύο αυτών ολοκληρωμάτων απαιτείται ο σαφής καθορισμός των διανυσμάτων $d\vec{\ell}$ και $d\vec{S}$. Τα δύο αυτά διανύσματα πρέπει να συνδέονται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου (βλ. σχήμα 7.3)



Σχ. 7.3

Η μεταβολή της μαγνητικής ροής Ψ_m (η οποία ονομάζεται και «πεπλεγμένη ροή») δια της επιφάνειας S , μπορεί να οφείλεται στους λόγους που αναφέρονται παρακάτω:

- α) Χρονική μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής \vec{B}
- β) Μεταβολή (παραμόρφωση) της επιφάνειας S
- γ) Κίνηση της επιφάνειας S ως προς το πεδίο \vec{B}
- δ) Συνδυασμός όλων των προηγούμενων.

Στις περιπτώσεις β και γ, και εφ' όσον έχουμε **στατικό**, (χρονικά αμετάβλητο) πεδίο \vec{B} , η ανάπτυξη του πεδίου \vec{E} , σε ένα **αγώγιμο μέσο**, μπορεί να εξηγηθεί μέσω της μαγνητικής δύναμης Lorentz. Πρόκειται για την γνωστή περίπτωση κινούμενου αγωγού εντός πεδίου \vec{B} . Προφανώς αν το μέσο είναι μη αγώγιμο **δεν αναπτύσσεται ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}** .

Η περίπτωση α όμως, και εφ' όσον δεν έχουμε κίνηση της επιφάνειας S , δεν μπορεί να εξηγηθεί μέσω της δύναμης Lorentz. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση α (χρονική μεταβολή μαγνητικής ροής μέσω χρονικής μεταβολής του \vec{B}) αναπτύσσεται πεδίο \vec{E} στον χώρο, είτε έχουμε αγώγιμο μέσο, είτε όχι.

Συνοπτικά σε κάθε περίπτωση μπορεί να εφαρμοστεί η γενική σχέση:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Psi_m}{dt}$$

7.3) Ανάπτυξη Ηλεκτρεγερτικής Δύναμης εξ' Επαγωγής

Όταν ο κλειστός βρόχος (καμπύλη γ) στον οποίο υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του επαγόμενου πεδίου \vec{E} είναι **αγώγιμος** τότε προκαλείται ροή ηλεκτρικού ρεύματος στο βρόχο αυτό. Η ροή ηλεκτρικού ρεύματος απαιτεί, όπως είναι γνωστό, την παρουσία ηλεκτρεγερτικής δύναμης (Η.Ε.Δ.) **e**. Η Η.Ε.Δ. αυτή, που ονομάζεται και Η.Ε.Δ. εξ' επαγωγής, οφείλει την ύπαρξή της ακριβώς στο επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , και είναι ίση με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμά του στην κλειστή καμπύλη γ .

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε ανάπτυξη Η.Ε.Δ. από καθαρά ηλεκτρικά αίτια και όχι από μη ηλεκτρικά (χημικά, μηχανικά , μαγνητικά κ.λ.π. , όπως είδαμε στην παράγραφο 2.6.2 , ορισμός Η.Ε.Δ.)

Επίσης στο σημείο αυτό κάνουμε την ακόλουθη σημαντικότερη παρατήρηση:

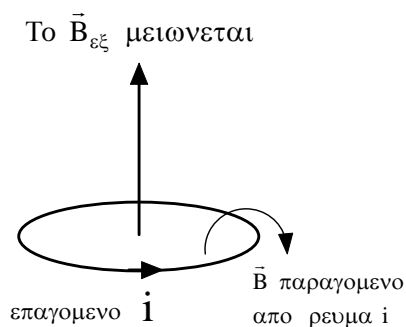
- Στον ορισμό της Η.Ε.Δ. (όπως και της ηλεκτρικής τάσης V) θέσαμε την προϋπόθεση στατικών (χρονικά αμετάβλητων πεδίων). Είναι προφανές ότι μια Η.Ε.Δ. εξ' επαγωγής είναι αδύνατον να είναι χρονικά σταθερό μέγεθος , διότι ορίζεται ως χρονική παράγωγος ενός άλλου μεγέθους (της μαγν. ροής). Άρα λοιπόν, για να ευσταθεί ο ορισμός της Η.Ε.Δ. εξ' επαγωγής θα πρέπει να ισχύει η παραδοχή της «βραδείας χρονικής μεταβολής» . Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει ο ρυθμός μεταβολής (ή η συχνότητα) της μαγνητικής ροής να είναι αρκετά αργός, ώστε το μήκος κύματος $\lambda = c / f$ (f η συχνότητα) να είναι πολύ μεγαλύτερο από το συνολικό μήκος της κλειστής καμπύλης γ επί της οποίας ορίζεται η Η.Ε.Δ. **e**. Σε διαφορετική περίπτωση **δεν ορίζεται** Η.Ε.Δ. και πρέπει να χρησιμοποιηθεί η κυματική θεωρία.

7.4) Κανόνας του Lenz

Το ηλεκτρικό ρεύμα που δημιουργείται από μια Η.Ε.Δ. εξ' επαγωγής (επαγόμενο ρεύμα) προφανώς παράγει ένα μαγνητικό πεδίο άρα και μια μαγνητική ροή. Στη διατύπωση του νόμου του Faraday η μαγνητική ροή Ψ_m είναι η ολική μαγνητική ροή, δηλαδή η ροή που προκαλεί ένα εξωτερικό πεδίο και η ροή που προκαλεί το επαγόμενο ρεύμα.

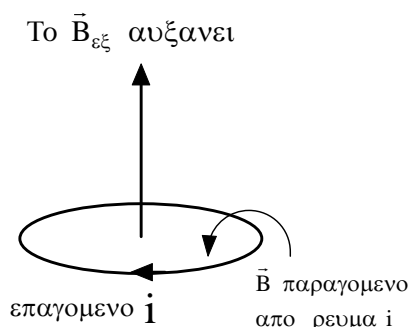
Το αρνητικό πρόσημο στο νόμο Faraday, εκφράζει τον κανόνα του Lenz. Σύμφωνα με αυτόν το επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα , παράγει ένα μαγνητικό πεδίο που προσπαθεί να «αναιρέσει» κάθε μεταβολή στη ροή.

Στα παρακάτω σχήματα 7.4α και 7.4β δίνεται μια σχηματική εξήγηση του κανόνα Lenz.



Σχ. 7.4α

Στην περίπτωση που το $B_{εξ}$ μειώνεται, το παραγόμενο B προστίθεται σε αυτό προσπαθώντας να κρατήσει αμετάβλητη τη μαγνητική ροή



Σχ. 7.4β

Στην περίπτωση που το $B_{εξ}$ αυξάνει, το παραγόμενο B αφαιρείται από αυτό προσπαθώντας και εδώ να κρατήσει αμετάβλητη τη ροή

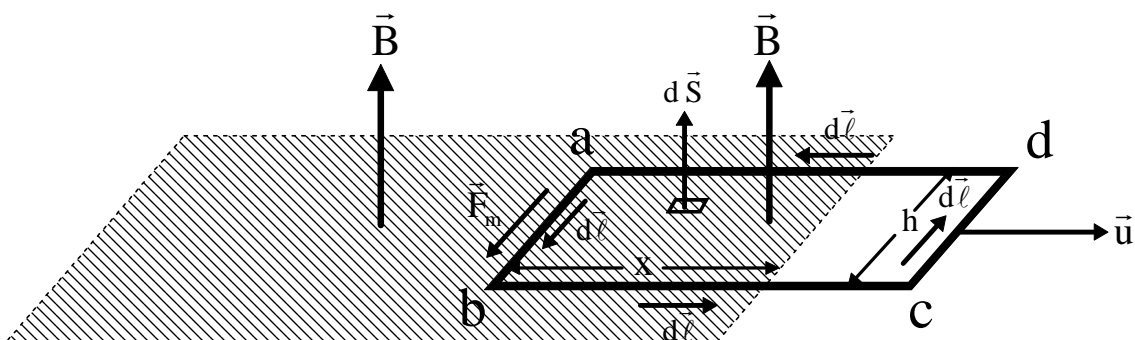
Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται και αδράνεια του μαγνητικού πεδίου (ή της μαγνητικής ροής)

7.5) Παραδείγματα Ηλεκτρομαγνητικής Επαγωγής

Παρακάτω θα εξετάσουμε με κάποια λεπτομέρεια διάφορες περιπτώσεις ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής.

7.5.1) Κινούμενο ορθογώνιο πλαίσιο σε ομογενές στατικό πεδίο \vec{B}

Έστω ότι ένα **αγώγιμο** ορθογώνιο πλαίσιο **a-b-c-d**, με απειροστό πάχος σε κάθε πλευρά του, κινείται με ταχύτητα \vec{u} και ένα **τμήμα** του βρίσκεται μέσα σε **ομογενές** στατικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή \vec{B} (βλ.σχ. 7.5). Ο χώρος που καταλαμβάνει το πεδίο \vec{B} είναι αυτός που φαίνεται με διαγράμμιση και το διάνυσμα \vec{B} είναι κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου. Αρχικά θα εξετάσουμε το πρόβλημα με χρήση της μαγνητικής δύναμης Lorentz που θα ασκηθεί στα κινούμενα με ταχύτητα \vec{u} ελεύθερα φορτία του πλαισίου.



Σχ. 7.5

Παρατηρώντας τις φορές των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{B} και εφαρμόζοντας τη γνωστή σχέση που δίνει την μαγνητική δύναμη Lorentz σε ένα κινούμενο φορτίο q

$$\vec{F}_m = q (\vec{u} \times \vec{B})$$

παρατηρούμε ότι η δύναμη \vec{F}_m θα ασκηθεί με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, στα θετικά ελεύθερα φορτία που βρίσκονται στην πλευρά **a-b** του πλαισίου.

Στις πλευρές **a-d** και **b-c**, εφ' όσον έχουμε απειροστό πάχος κατά την διεύθυνση της δύναμης, δεν πραγματοποιείται καμία κίνηση φορτίου. Στην πλευρά **c - d** προφανώς δεν αναπτύσσεται δύναμη διότι δεν υπάρχει πεδίο \vec{B} .

Η δύναμη \vec{F}_m δρα ως ηλεκτροδιαχωριστική δύναμη και δημιουργεί την ηλεκτροδιαχωριστική πεδιακή ένταση \vec{E}_s

$$\vec{E}_s = \frac{\vec{F}_m}{q} = \vec{u} \times \vec{B}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της έντασης \vec{E}_s στην περιφέρεια του πλαισίου μας δίνει την ΗΕΔ e που αναπτύσσεται. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αυτού εκλέγεται το διάνυσμα $d\vec{\ell}$ με την φορά που φαίνεται στο σχήμα. Θα έχουμε λοιπόν.

$$e = \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{\ell} = \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

Επειδή έχουμε ένταση \vec{E}_s μόνον στο τμήμα $\mathbf{a-b}$, με μήκος h , και λόγω της καθετότητας των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{B} , εύκολα θα προκύψει το τελικό αποτέλεσμα:

$$e = \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{\ell} = u B h$$

Ας εξετάσουμε τώρα το ίδιο φαινόμενο εισάγοντας τη μαγνητική ροή που εμπλέκεται με το πλαίσιο (πεπλεγμένη ροή).

Η ροή αυτή θα είναι:

$$\Psi_m = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

όπου S_1 το τμήμα του πλαισίου που βρίσκεται μέσα στον χώρο του πεδίου \vec{B} . Το διάνυσμα $d\vec{S}$ πρέπει να «συνδέεται» με το διάνυσμα $d\vec{\ell}$ σύμφωνα με τον δεξιόστροφο κανόνα.

Επομένως το $d\vec{S}$ πρέπει να έχει φορά προς τα επάνω.

Επειδή το πεδίο \vec{B} είναι ομογενές και κάθετο στην επιφάνεια S_1 προκύπτει αμέσως το αποτέλεσμα

$$\Psi_m = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B h x$$

Το πλαίσιο κινείται με ταχύτητα u , άρα θα ισχύει

$$\frac{d\Psi_m}{dt} = B h \frac{dx}{dt} = -B h u$$

όπου το αρνητικό πρόσημο μπαίνει διότι $\frac{dx}{dt} < 0$ (το μήκος x μειώνεται συναρτήσει του

χρόνου)

Τελικά λοιπόν θα προκύψει:

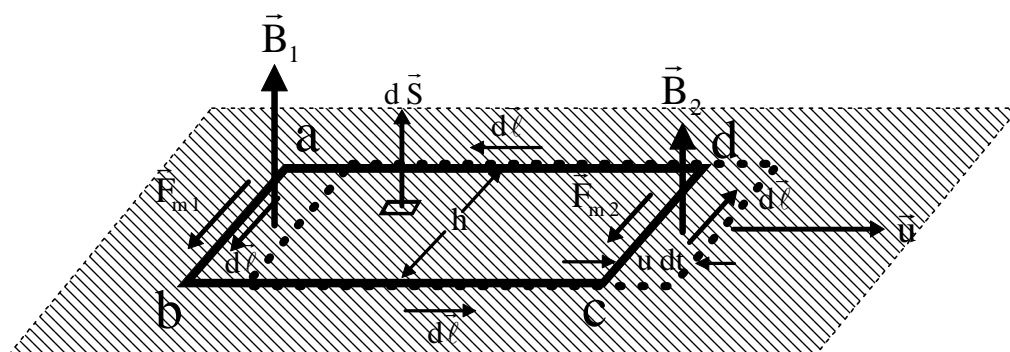
$$-\frac{d\Psi_m}{dt} = u B h = \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{\ell} = e$$

δηλαδή η έκφραση του νόμου Faraday.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το φαινόμενο της ανάπτυξης ΗΕΔ, σε αγώγιμο ορθογώνιο πλαίσιο, όταν ένα τμήμα του κινείται ομογενές πεδίο \vec{B} , μπορεί να εξηγηθεί με χρήση της μαγνητικής δύναμης Lorentz αλλά και απ' ευθείας από τον νόμο του Faraday.

7.5.2) Κινούμενο ορθογώνιο πλαίσιο σε μη ομογενές στατικό πεδίο \vec{B}

Στην περίπτωση αυτή θα εξετάσουμε την κίνηση, με σταθερή ταχύτητα u , ενός ορθογώνιου αγώγιμου πλαισίου μέσα σε χώρο όπου επικρατεί ένα μη ομογενές πεδίο \vec{B} (βλ. σχ. 7.6)



Σχ. 7.6

Αν εξετάσουμε τις μαγνητικές δυνάμεις Lorentz στα ελεύθερα φορτία του πλαισίου θα συμπεράνουμε ότι αναπτύσσονται:

$$- \text{η δύναμη } \vec{F}_{m1} = q (\vec{u} \times \vec{B}_1) \text{ στην πλευρά } \mathbf{a - b}$$

$$- \text{η δύναμη } \vec{F}_{m2} = q (\vec{u} \times \vec{B}_2) \text{ στην πλευρά } \mathbf{c - d}$$

όπου \vec{B}_1 και \vec{B}_2 οι αντίστοιχες τιμές του πεδίου \vec{B}

Επομένως στην πλευρά $\mathbf{a - b}$ έχουμε την ηλεκτροδιαχωριστική πεδιακή ένταση $\vec{E}_{s1} = \vec{u} \times \vec{B}_1$ και αντίστοιχα στην πλευρά $\mathbf{c - d}$ την $\vec{E}_{s2} = \vec{u} \times \vec{B}_2$

Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα από το προηγούμενο παράδειγμα, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της έντασης \vec{E}_s στην περιφέρεια του πλαισίου θα είναι:

$$e = \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{\ell} = u B_1 h - u B_2 h = u h (B_1 - B_2)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό μας δίνει την αναπτυσσόμενη ΗΕΔ στο πλαίσιο

Εξετάζουμε τώρα την μεταβολή της μαγνητικής ροής δια του πλαισίου σε χρονικό διάστημα dt . Εφ' όσον στο απειροστό αυτό χρονικό διάστημα το πλαίσιο κινείται σε απειροστό μήκος $u dt$, αυτό σημαίνει ότι

- χάνεται μαγνητική ροή $u dt h B_1$
- κερδίζεται μαγνητική ροή $u dt h B_2$

συνεπώς σε χρόνο dt η μεταβολή $d\Psi_m$ της μαγνητικής ροής είναι:

$$d\Psi_m = \Psi_{m \text{ τελική}} - \Psi_{m \text{ αρχική}} = u dt h (B_2 - B_1)$$

και

$$\frac{d\Psi_m}{dt} = u h (B_2 - B_1)$$

παρατηρούμε ότι αμέσως προκύπτει:

$$e = \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{\ell} = u h (B_1 - B_2) = - \frac{d\Psi_m}{dt}$$

δηλαδή η έκφραση του νόμου του Faraday

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιοδήποτε σχήμα βρόχου που κινείται μέσα σε μη ομογενές στατικό πεδίο \vec{B}

7. 5. 3) Ακίνητος βρόχος σε χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο \vec{B}

Ένα βασικό ερώτημα που μπορεί να τεθεί εδώ είναι το ακόλουθο:

- Τι θα συμβεί αν έχουμε έναν ακίνητο αγωγίμο βρόχο μέσα σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο \vec{B} ;

Το πείραμα αποδεικνύει ότι θα έχουμε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα. Αυτό όμως δεν μπορεί να εξηγηθεί τώρα με χρήση της μαγνητικής δύναμης \vec{F}_m διότι δεν έχουμε κίνηση αγωγού (η μαγνητική δύναμη ασκείται μόνον σε κινούμενα φορτία).

Ποια δύναμη ασκείται σε ακίνητα φορτία; προφανώς η **ηλεκτρική** δύναμη. Άρα έχουμε τώρα την εμφάνιση ενός ηλεκτρικού πεδίου το οποίο δημιουργείται επαγωγικά από το χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο \vec{B} και ισχύει η σχέση:

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Το ηλεκτρικό αυτό πεδίο αυτό δεν μπορεί να είναι στατικό διότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμά του σε μια κλειστή καμπύλη δεν είναι μηδέν.

Συνοψίζουμε όλα τα προηγούμενα

- Όταν ένας **αγώγιμος βρόχος** κινείται μέσα σε χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο \vec{B} τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} στον βρόχο αυτό θα είναι:

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

ο όρος $\oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$ εκφράζει τη συνεισφορά που οφείλεται στην κίνηση του βρόχου
(**Η.Ε.Δ. λόγω μαγνητικής δύναμης**)

ο όρος $-\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ εκφράζει τη συνεισφορά που οφείλεται στην χρονική μεταβολή του πεδίου \vec{B} . (**Η.Ε.Δ. λόγω ηλεκτρικής δύναμης**)

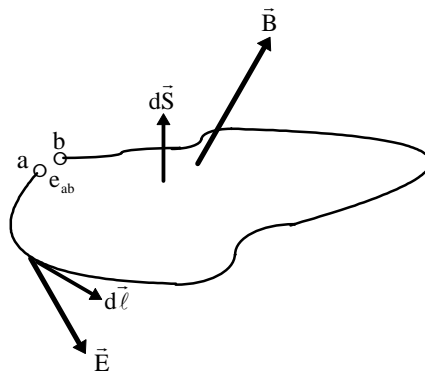
Συνοπτικά λοιπόν μπορούμε να γράψουμε:

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Psi_m}{dt}$$

Η τελευταία αυτή σχέση αποτελεί, όπως προαναφέρθηκε, την γενική διατύπωση του Νόμου της Ηλεκτρομαγνητικής Επαγωγής (Νόμος Faraday)

7. 5. 4) Ανοικτός βρόχος

Αν έχουμε ένα βρόχο ανοικτό για ένα **απειροστά μικρό** τμήμα του (σχ. 7.7), ώστε να μην αλλάζει η τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, τότε στα άκρα **a- b** θα εμφανιστεί η ΗΕΔ e_{ab} όπου:



Σχ. 7.7

$$e_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Τα διανύσματα $d\vec{\ell}$ και $d\vec{S}$ συνδέονται, όπως πάντα, «δεξιόστροφα»

Αν τα σημεία \mathbf{a} και \mathbf{b} ενωθούν τότε προφανώς $e_{ab} = 0$ αλλά $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$

Υπενθυμίζεται ότι εφ' όσον η e_{ab} είναι μία ΗΕΔ αυτό σημαίνει ότι αν $e_{ab} > 0$ τότε το σημείο \mathbf{b} έχει υψηλότερο δυναμικό από το \mathbf{a} , και αντίστροφα.

7. 6) Αυτεπαγωγή

7. 6. 1) Γενικά για το φαινόμενο της αυτεπαγωγής

Είναι γνωστό ότι όταν ένας αγωγός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί γύρω του ένα μαγνητικό πεδίο. Όταν το ρεύμα του αγωγού είναι χρονικά μεταβαλλόμενο τότε θα έχουμε αντίστοιχα και ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή $\vec{B}(t)$ (σημείωση: εδώ με τον όρο «μεταβαλλόμενο ρεύμα» εννοείται «βραδέως μεταβαλλόμενο» όπως έχει εξηγηθεί στα προηγούμενα)

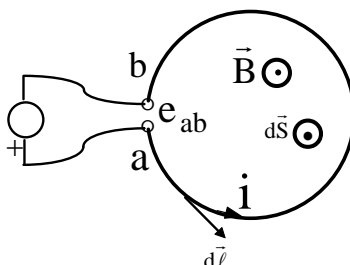
Είναι προφανώς δυνατόν η χρονικά μεταβαλλόμενη μαγνητική επαγωγή $\vec{B}(t)$ να δημιουργεί χρονικά μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή $\Psi_m(t)$ η οποία όμως να «εμπλέκεται» με αυτό ακριβώς το γεωμετρικό σχήμα του αγωγού (πεπλεγμένη ροή)

Το αποτέλεσμα θα είναι να αναπτυχθεί στον αγωγό μία ΗΕΔ εξ' επαγωγής η οποία θα οφείλεται στο ίδιο το (χρονικά μεταβαλλόμενο) ρεύμα του αγωγού. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **αυτεπαγωγή** . Το μέγεθος της αναπτυσσόμενης ΗΕΔ εξ' **αυτεπαγωγής**, όπως ορθότερα λέγεται, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το γεωμετρικό σχήμα του αγωγού αλλά και τον προσανατολισμό του σε σχέση με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου $\vec{B}(t)$.

Γενικά το φαινόμενο της αυτεπαγωγής εμφανίζεται «εντονότερο» σε αγωγούς με σχήμα σπείρας.

7. 6. 2) Σπειροειδής αγωγός

Έστω ότι έχουμε μια σπείρα με εμβαδόν S (σχ. 7.8) συνδεδεμένη με μια ηλεκτρική πηγή η οποία δίνει χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα i στη σπείρα. Τα άκρα $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ της σπείρας, θεωρείται ότι βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους.



Σχ. 7.8

Σύμφωνα με τη φορά του ρεύματος $i(t)$ στο σχήμα, αν $i(t) > 0$, τότε το πεδίο $\vec{B}(t)$ που δημιουργεί το $i(t)$ θα έχει φορά προς τα επάνω. Η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή του πεδίου $\vec{B}(t)$, στην επιφάνεια της σπείρας, θα προκαλέσει την ανάπτυξη, όπως είναι γνωστό, ενός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}(t)$. Αν ορίσουμε τα διανύσματα $d\vec{\ell}$ και $d\vec{S}$ όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, του ηλεκτρικού αυτού πεδίου στην περιφέρεια της σπείρας και με φορά από το \mathbf{a} προς το \mathbf{b} , θα δίνεται από την σχέση:

$$e_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Psi_m}{dt}$$

Παρατηρούμε ότι:

- Αν $i(t)$ αυξάνει, άρα $\frac{di(t)}{dt} > 0$, τότε και τα $\vec{B}(t)$, $\Psi_m(t)$ αυξάνουν επομένως

ισχύει $\frac{d\Psi_m(t)}{dt} > 0$, άρα $e_{ab} = - \frac{d\Psi_m}{dt} < 0$.

Επειδή η e_{ab} είναι μία ΗΕΔ η σχέση $e_{ab} < 0$ σημαίνει ότι το ηλεκτρικό δυναμικό V_a του σημείου \mathbf{a} είναι υψηλότερο από αυτό του σημείου \mathbf{b} , δηλαδή $V_a > V_b$ ή $V_{ab} > 0$

- Αν $i(t)$ μειώνεται, άρα $\frac{di(t)}{dt} < 0$, τότε και τα $\vec{B}(t)$, $\Psi_m(t)$ μειώνονται, επομένως

ισχύει $\frac{d\Psi_m(t)}{dt} < 0$, άρα $e_{ab} = - \frac{d\Psi_m}{dt} > 0$.

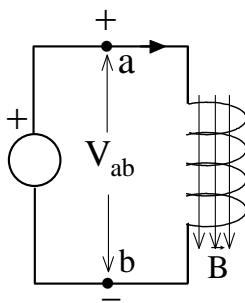
Προκύπτει τώρα ότι $V_a < V_b$ ή $V_{ab} < 0$

7. 6. 3) Πηνίο N σπειρών

Αν έχουμε N όμοιες σπείρες ,δηλαδή ένα πηνίο, τότε:

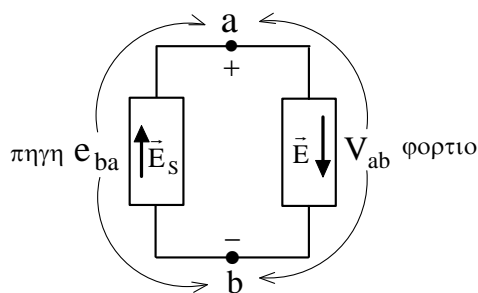
$$e_{ab} = -N \frac{d\Psi_m}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad \text{όπου } \Psi = N \Psi_m$$

Παρατηρούμε ότι το πηνίο συμπεριφέρεται σαν μια πηγή τάσης με ΗΕΔ: $e_{ab} = -\frac{d\Psi}{dt}$ και μηδενική εσωτερική αντίσταση.



Σχ. 7.9

Γνωρίζουμε όμως ότι στις πηγές ισχύει γενικά (βλ. Σχ. 7.10)



$$e_{ba} = \int_b^a \vec{E}_S \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_{ab}$$

Σχ. 7.10

Δηλαδή η ηλεκτροδιαχωριστική πεδιακή ένταση \vec{E}_S (μέσα στην πηγή) ανυψώνει το δυναμικό από το b στο a ενώ η ηλεκτρική πεδιακή ένταση (στο φορτίο) \vec{E} προκαλεί πτώση του δυναμικού από το a στο b

$$\text{Άρα } e_{ba} = V_{ab} \Rightarrow e_{ab} = -V_{ab}$$

Με βάση τα προηγούμενα μπορούμε να γράψουμε:

$$e_{ab} = -\frac{d\Psi}{dt} = -V_{ab} \quad \text{άρα} \quad V_{ab} = \frac{d\Psi}{dt}$$

Δηλαδή η πτώση τάσεως στο πηνίο είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής

Σε ένα γραμμικό και χρονικά σταθερό πηνίο η μαγνητική ροή και το ρεύμα συνδέονται με την γραμμική σχέση:

$$\Psi = L i$$

όπου $L = \frac{\Psi}{i}$ ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου με μονάδα το

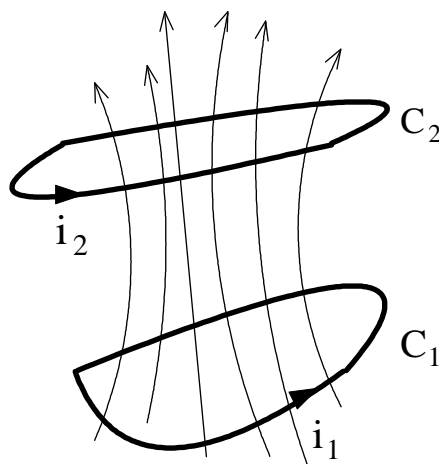
$$\frac{\text{volt} \cdot \text{sec}}{\text{A}} = \text{Henry}$$

$$\text{άρα} \quad V_{ab} = \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{ή} \quad V_{ab} = L \frac{di}{dt}$$

Το φαινόμενο της αυτεπαγωγής παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στο άνοιγμα διακοπών (δηλ. στη διακοπή του ρεύματος ενός κυκλώματος). Στην περίπτωση που η παράγωγος di/dt έχει μεγάλη τιμή (απότομη διακοπή) και ταυτόχρονα έχουμε μια σημαντική τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής L τότε είναι δυνατόν να αναπτυχθούν ΗΕΔ με πολύ μεγάλη τιμή που μπορούν να είναι πολύ επικίνδυνες για τον χειριστή του διακόπτη αλλά και για όλη την ηλεκτρική εγκατάσταση. Αντίθετα δεν παρουσιάζεται πρόβλημα κατά το κλείσιμο ενός διακόπτη (γιατί;)

7.7) Αμοιβαία επαγωγή

Έστω ότι έχουμε δύο πηνία (ή και δύο απλούς βρόχους) C_1 και C_2 (βλ. Σχ. 7.11)



Σχ. 7.11

Ο βρόχος C_1 διαρρέεται από ρεύμα i_1 και ο βρόχος C_2 διαρρέεται από ρεύμα i_2 . Τα ρεύματα αυτά θεωρούνται **χρονικά μεταβαλλόμενα**. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου B που δημιουργεί το ρεύμα i_1 στο βρόχο C_1 είναι δυνατόν να διέρχονται και δια του βρόχου C_2 και επίσης οι δυναμικές γραμμές του πεδίου B που δημιουργεί το ρεύμα i_2 στο βρόχο

C_2 είναι δυνατόν να διέρχονται και δια του βρόχου C_1 . Το φαινόμενο λέγεται αμοιβαία επαγωγή ή αλληλεπαγωγή.

Έστω Ψ_1 η ολική πεπλεγμένη μαγνητική ροή που διέρχεται από το βρόχο C_1 .

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12}$$

και αντίστοιχα για την ολική πεπλεγμένη μαγνητική ροή του βρόχου C_2

$$\Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22}$$

όπου εδώ χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\Psi_{\kappa\lambda}$ όπου

κ : σε ποιο βρόχο αναφερόμαστε και

λ : από ποιο βρόχο (ή ρεύμα) προέρχεται ή ροή

Θεωρώντας ότι ισχύει η γραμμικότητα μπορούμε να γράψουμε:

$$\Psi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2$$

$$\Psi_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2$$

όπου $L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = L_1$, $L_{22} = \frac{\Psi_{22}}{i_2} = L_2$, $L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}$, $L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}$

οι συντελεστές L_{11} , L_{22} και γενικά $L_{\kappa\kappa}$ είναι πάντοτε θετικοί, ενώ οι συντελεστές $L_{\kappa\lambda}$ μπορούν να είναι θετικοί ή αρνητικοί.

Ο συντελεστής $L_{\kappa\lambda}$ είναι θετικός όταν η ροή $\Psi_{\kappa\lambda}$ διαρρέει το βρόχο κ κατά την ίδια φορά που διαρρέει το βρόχο κ και η ροή $\Psi_{\kappa\kappa}$. Διαφορετικά είναι αρνητικός.

Αν οι βρόχοι C_1 και C_2 ανοικτοκυκλωθούν για μια απειροστά μικρή απόσταση τότε θα αναπτυχθούν στα άκρα τους ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις e_1 και e_2 αντίστοιχα

Θα έχουμε:

$$e_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -\left(L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$e_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -\left(L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \right)$$

Αποδεικνύεται ότι $L_{12} = L_{21} = M$ (συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής). Αυτό σημαίνει ότι ανεξάρτητα από τα σχήματα και τις σχετικές θέσεις των δύο βρόχων C_1 και C_2 , η μαγνητική ροή που διέρχεται από τον C_2 όταν ο C_1 διαρρέεται από ρεύμα i είναι ακριβώς η ίδια με τη μαγνητική ροή που διέρχεται από τον C_1 όταν ο C_2 διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα.

Ο συντελεστής M εξαρτάται μόνον από τη γεωμετρία της διάταξης των δύο βρόχων. Επίσης ορίζεται εδώ και ο συντελεστής σύζευξης k όπου:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

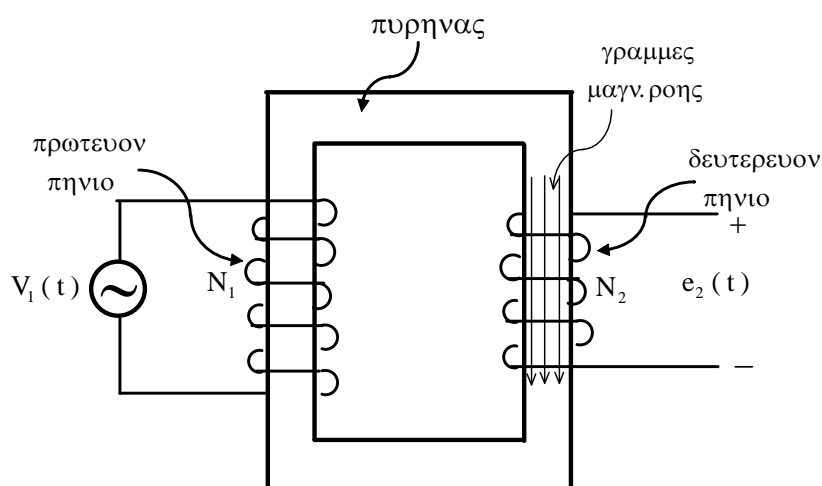
7.8) Εφαρμογές της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής

Το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής έχει, όπως είναι γνωστό, τεράστια σημασία στις εφαρμογές του Ηλεκτρισμού. Στο φαινόμενο αυτό βασίζεται η λειτουργία δύο σημαντικότερων ηλεκτρικών (ή γενικότερα ηλεκτρομηχανικών) διατάξεων:

α) του μετασχηματιστή

β) της ηλεκτρικής γεννήτριας

Η λειτουργία του μετασχηματιστή βασίζεται στο φαινόμενο της αμοιβαίας επαγωγής. Ο μετασχηματιστής είναι μια διάταξη αποτελούμενη από δύο πηνία, 1 και 2, τα οποία είναι **μαγνητικά συζευγμένα** δηλαδή οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου του πηνίου 1 διέρχονται μέσα από τις σπείρες του πηνίου 2 και αντίστροφα. Τα δύο αυτά πηνία μπορούν να έχουν κοινό σιδηροπυρήνα (όπως συνήθως συμβαίνει στην πράξη), αλλά μπορούν και να είναι σε σύζευξη μέσω του αέρα. (βλ. σχημα 7.12)



Σχ. 7.12

Αν π.χ. το πηνίο 1 (πρωτεύον πηνίο) τροφοδοτηθεί με χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό ρεύμα (και χρονικά μεταβαλλόμενη ηλεκτρική τάση V_1) αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη ΗΕΔ εξ' επαγωγής e_2 στο πηνίο 2 (δευτερεύον πηνίο) λόγω της χρονικής μεταβολής της μαγνητικής ροής. Η τιμή αυτής της ΗΕΔ μπορεί να είναι μεγαλύτερη ή και

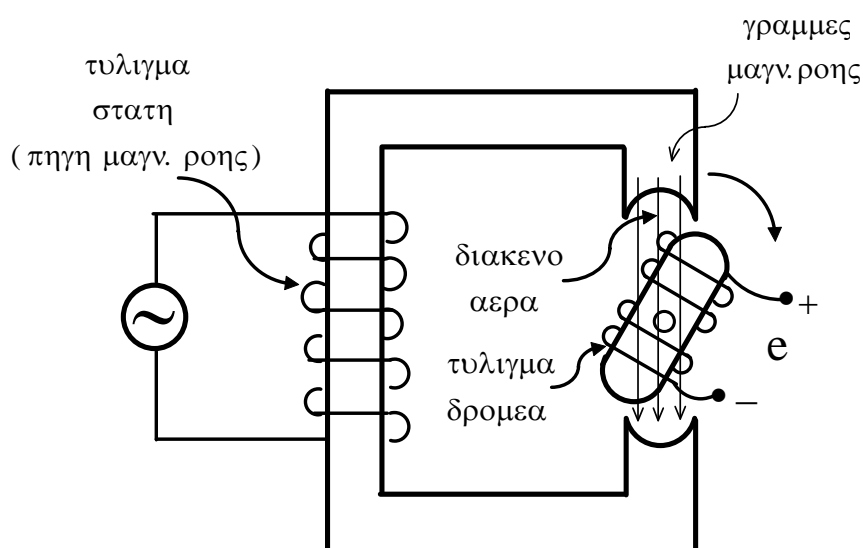
μικρότερη από την τάση V_1 και αυτό εξαρτάται από τους αριθμούς σπειρών N_1 και N_2 των δύο πηνίων.

Η μεγάλη χρησιμότητα του μετασχηματιστή είναι ακριβώς δυνατότητα που παρέχει στην αλλαγή (αύξηση ή μείωση) της τιμής μιας ηλεκτρικής τάσεως, με απλό τρόπο και χωρίς μεγάλες απώλειες ενέργειας. Προφανώς ο μετασχηματιστής λειτουργεί μόνον με μεταβαλλόμενες τάσεις ή , ακριβέστερα για τις εφαρμογές, με εναλλασσόμενες τάσεις. Είναι δε γεγονός ότι το εναλλασσόμενο ρεύμα οφείλει την επικράτησή του, στις εφαρμογές του ηλεκτρισμού, στην ύπαρξη του μετασχηματιστή.

Τα δύο πηνία που διαθέτει ένας μετασχηματιστής είναι προφανώς ακίνητα και η ανάπτυξη ΗΕΔ οφείλεται στην χρονική μεταβολή μαγνητικής ροής.

Είναι όμως δυνατόν να έχουμε χρονική μεταβολή μαγνητικής ροής η οποία να οφείλεται σε μηχανική κίνηση. Στην περίπτωση αυτή συμβαίνει πάντοτε **ηλεκτρομηχανική μετατροπή ενέργειας** και έχουμε την λειτουργία ηλεκτρικής γεννήτριας .

Στο σχήμα 7.13 φαίνεται σε απλοποιημένη μορφή μια **στρεφόμενη** ηλεκτρική γεννήτρια.



Σχ. 7.13

Τα βασικά μέρη μιας ηλεκτρικής γεννήτριας είναι:

- 1) το σταθερό τμήμα (ή ο «στάτης») με το πηνίο (τύλιγμά) του
- 2) το στρεφόμενο τμήμα (ή ο «δρομέας») με το πηνίο (τύλιγμά) του
- 3) το διάκενο αέρα απαραίτητο για την σχετική κίνηση μεταξύ στάτη και δρομέα

Το ένα από τα δύο πηνία (η τυλίγματα όπως ειδικότερα αποκαλούνται) χρησιμεύει για την παραγωγή της μαγνητικής ροής . Το τύλιγμα αυτό μπορεί να είναι το σταθερό ή το στρεφόμενο. Το άλλο τύλιγμα είναι αυτό επί του οποίου επάγεται η ΗΕΔ . Και αυτό το τύλιγμα μπορεί να είναι το σταθερό ή το στρεφόμενο. Προφανώς σημασία έχει η σχετική κίνηση μεταξύ των δύο τυλιγμάτων

Στο παράδειγμα του σχήματος το τύλιγμα του στάτη παράγει την μαγνητική ροή και στο τύλιγμα του δρομέα αναπτύσσεται η ΗΕΔ e εξ' επαγωγής.

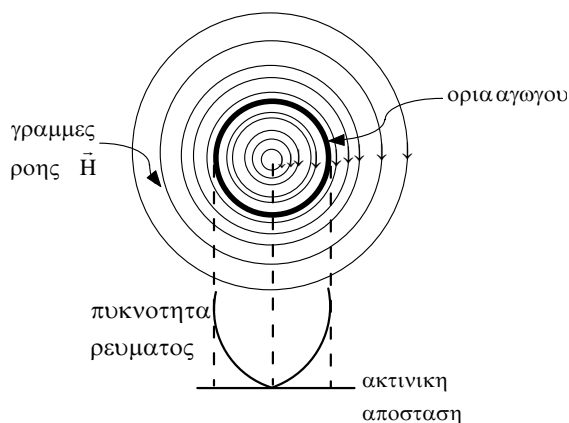
7.9) Επιδερμικό φαινόμενο

Το επιδερμικό φαινόμενο, που περιγράφεται παρακάτω, είναι άμεση συνέπεια του φαινομένου της επαγωγής

Όταν ένας αγωγός διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα με σχετικά υψηλή συχνότητα, παρατηρείται ότι η ωμική αντίστασή του παίρνει μεγαλύτερες τιμές από αυτές που έχει στο συνεχές ρεύμα.

Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι δυναμικές γραμμές της πυκνότητας ρεύματος \vec{J} , που υπάρχουν μέσα στον αγωγό, συγκεντρώνονται προς την επιφάνεια του αγωγού, με αποτέλεσμα να μειώνεται η «ενεργός» διατομή S του αγωγού, άρα να αυξάνει η αντίστασή του. Αυτό αποκαλείται «επιδερμικό φαινόμενο»

Θα δούμε παρακάτω μια εξήγηση του φαινομένου αυτού για την περίπτωση ενός αγωγού με κυκλική διατομή (βλ. σχ. 7.14)



Σχ. 7.14

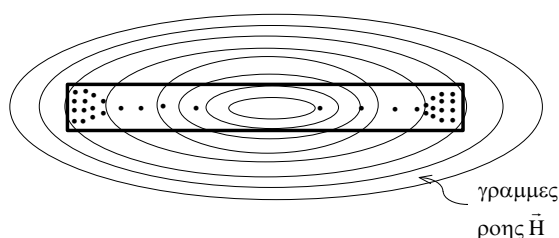
Παρατηρούμε ότι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου (γραμμές ροής) υπάρχουν και μέσα στην επιφάνεια του αγωγού. Οι γραμμές αυτές εμπλέκουν δυναμικές γραμμές της πυκνότητας ρεύματος περισσότερο προς το κέντρο του αγωγού και λιγότερο προς τα σημεία κοντά στην επιφάνεια του αγωγού.

Επομένως η «κατανεμημένη» αυτεπαγωγή του αγωγού θα έχει μεγαλύτερη τιμή σε σημεία κοντά στο κέντρο παρά σε σημεία κοντά στην επιφάνεια (το κέντρο του αγωγού περιβάλλεται από όλες τις γραμμές ροής).

Στις υψηλές συχνότητες αυτή η «επί πλέον αυτεπαγωγή» του κεντρικού τμήματος του αγωγού έχει σημαντική επίδραση στη ροή του ρεύματος. Το περιφερειακό τμήμα του αγωγού παρουσιάζει μικρότερη επαγωγική αντίδραση από ότι το κεντρικό.

Οι δυναμικές γραμμές της πυκνότητας ρεύματος \vec{J} ανακατανέμονται έτσι ώστε να έχουμε μεγαλύτερο αριθμό δυναμικών γραμμών του \vec{J} εκεί όπου αυτές περιβάλλονται από το μικρότερο αριθμό γραμμών ροής του μαγνητικού πεδίου

Στο σχήμα 7.15 φαίνεται η κατανομή των γραμμών της πυκνότητας ρεύματος σε σχέση με τις γραμμές ροής του μαγνητικού πεδίου για ένα αγωγό με διατομή σε μορφή ταινίας



Σχ. 7.15

Οι μαύρες κουκίδες δείχνουν την κατανομή των γραμμών της πυκνότητας ρεύματος

Σε αρκετά υψηλές συχνότητες το μεγαλύτερο ποσοστό του ρεύματος συγκεντρώνεται στην επιφάνεια του αγωγού και ισχύει η σχέση(*) :

$$\frac{\text{ρευμα σε βαθος } z}{\text{ρευμα στην επιφανεια}} = e^{-z/\delta}$$

όπου τα μήκη z και δ έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης και το δ ονομάζεται «βάθος διεισδύσεως». Το δ δίνεται από τη σχέση:

$$\delta = 5033 \sqrt{\frac{\rho}{\mu_r f}}$$

όπου: δ = βάθος διεισδύσεως σε cm

ρ = ειδική αντίσταση αγωγού σε Ω cm

f = συχνότητα λειτουργίας σε Hz

μ_r = συντελεστής σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας του αγωγού (αδιάστατο)

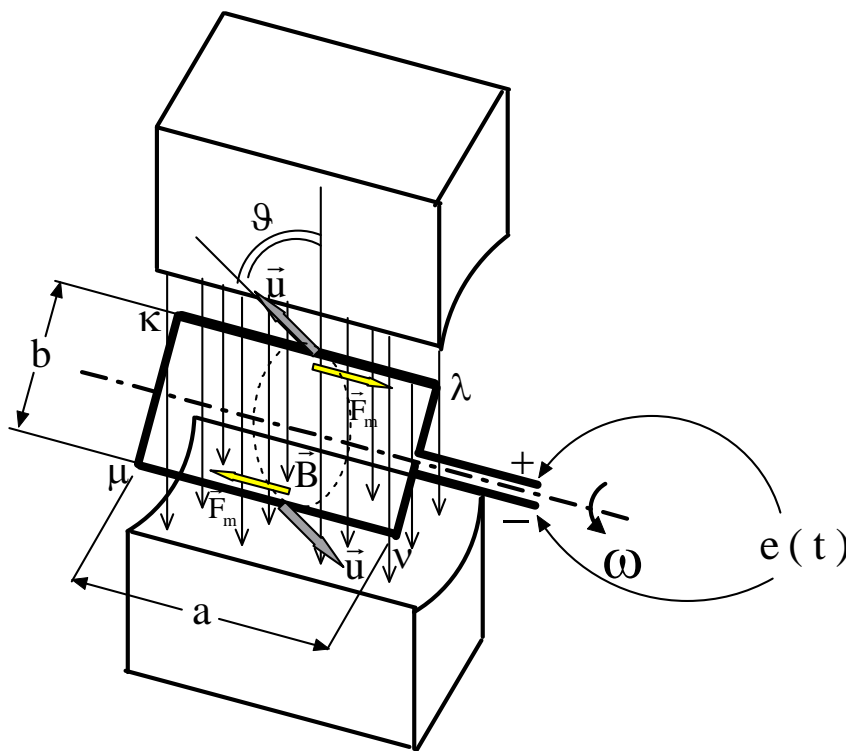
Π.χ. για αγωγό χαλκού σε συχνότητα 1 MHz προκύπτει $\delta = 0.0064$ cm

(*) F. E. TERMAN "Electronic and Radio Engineering" Mc Graw – Hill Book Comp. New York 1955

7. 10) Ασκήσεις Κεφαλαίου 7

ΑΣΚ 7. 1) Να υπολογιστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη εξ' επαγωγής σε ένα ορθογώνιο πλαίσιο διαστάσεων $a \times b$ που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω μέσα σε σταθερό πεδίο με μαγνητική επαγωγή B .

Παρακάτω (σχ. 7.16) φαίνεται η γεωμετρία του προβλήματος:



Σχ. 7.16

Χρησιμοποιούμε τη γενική σχέση για την ΗΕΔ $e = \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$

Παρατηρούμε ότι αναπτύσσεται ΗΕΔ στις πλευρές $\kappa - \lambda$ και $\mu - \nu$ του πλαισίου. Οι ΗΕΔ αυτές προστίθενται όπως φαίνεται και από τις φορές των μαγνητικών δυνάμεων F_m (βλ. σχήμα).

Έτσι θα έχουμε:

$$e = \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = 2 u B \sin \vartheta a$$

(ο παράγοντας 2 οφείλεται στην ανάπτυξη ΗΕΔ σε δύο πλευρές του πλαισίου)

επειδή $\vartheta = \omega t$

θα πάρουμε τελικά:

$$e = a 2 u B \sin \omega t$$

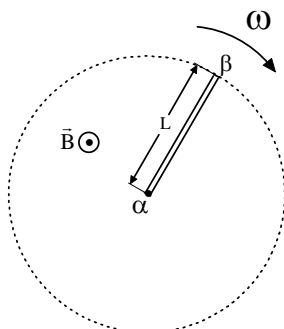
και εφ' όσον η γραμμική ταχύτητα u θα είναι: $u = \frac{b}{2} \omega$

προκύπτει τελικά: $e = a b \omega B \sin \omega t$ ή $e = \omega S B \sin \omega t$

όπου $S = a b$ εμβαδόν του πλαισίου

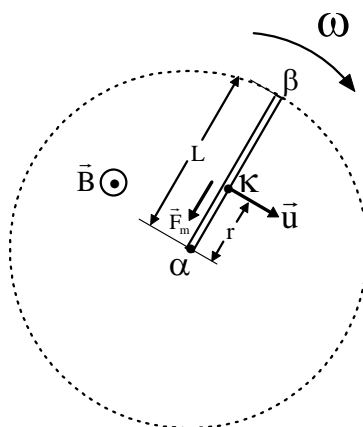
ΑΣΚ 7. 2) Μια αγώγιμη ράβδος , μήκους L , περιστρέφεται, με γωνιακή ταχύτητα ω , γύρω από το ένα άκρο της. Η ράβδος βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή \vec{B} . Το διάνυσμα \vec{B} είναι κάθετο στη ράβδο (βλ. και σχήμα 7.17).

Να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη ΗΕΔ στα άκρα $\alpha - \beta$ της ράβδου.



Σχ. 7.17

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο κ επάνω στη ράβδο. Το σημείο αυτό έστω ότι βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο περιστροφής α . (βλ. σχήμα 7.18)



Σχ. 7.18

Εφ' όσον η περιστροφή γίνεται σύμφωνα με τη φορά του σχήματος η γραμμική ταχύτητα στο σημείο κ θα έχει την φορά που φαίνεται στο σχήμα 7.18 και θα έχει μέτρο

$$u = \omega r$$

Προφανώς τα διανύσματα \vec{B} και \vec{u} είναι πάντοτε κάθετα. Η δύναμη που θα ασκείται σε ένα στοιχειώδες θετικό φορτίο q μέσα στη ράβδο θα είναι:

$$\vec{F}_m = q (\vec{u} \times \vec{B})$$

Λόγω της καθετότητας των \vec{B} και \vec{u} η δύναμη \vec{F}_m θα έχει φορά παράλληλη προς τη ράβδο και μέτρο $F_m = q u B$

Επίσης εύκολα προκύπτει ότι η φορά της δύναμης \vec{F}_m θα είναι προς το άκρο α της ράβδου (κέντρο περιστροφής) . Συνεπώς, και με τις δεδομένες φορές των \vec{B} και ω , θα έχουμε συσσώρευση **θετικών** φορτίων στο άκρο α και **αρνητικών** φορτίων στο άκρο β της ράβδου.

Η ηλεκτροδιαχωριστική πεδιακή ένταση \vec{E}_s μέσα στη ράβδο θα έχει μέτρο:

$$E_s = \frac{F_m}{q} = u B = \omega r B$$

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη $e_{\beta\alpha}$ που θα αναπτυχθεί υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$e_{\beta\alpha} = \int_{\beta}^{\alpha} \vec{E}_s \cdot d\vec{r} = \int_0^L \omega r B dr = \omega B \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^L = \frac{1}{2} L^2 \omega B$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

8.1) Γενικά

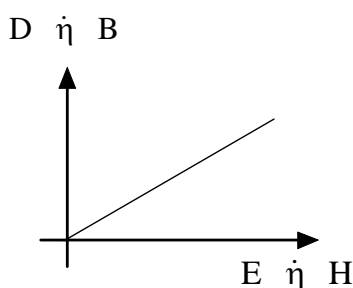
Για να εγκατασταθεί ένα ηλεκτρικό ή ένα μαγνητικό πεδίο σε μια περιοχή του χώρου απαιτείται η προσφορά ενέργειας. Η ενέργεια αυτή αποθηκεύεται στο πεδίο. Είναι προφανές ότι ένα ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο είναι χώρος **αποθήκευσης ενέργειας** και ποτέ δεν μπορεί να γίνει **πηγή ενέργειας**.

Υπενθυμίζεται ότι στην περίπτωση χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνυπάρχουν.

Παρακάτω θα διατυπώσουμε, χωρίς απόδειξη, 4 προτάσεις σχετικές με την ενέργεια των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Οι προτάσεις αυτές μπορούν να προκύψουν από τις εξισώσεις του Maxwell και φυσικά δέχονται πειραματική επαλήθευση.

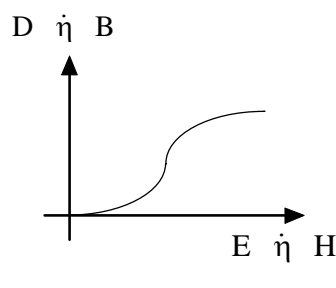
Αναφέρουμε αρχικά ότι τα υλικά με τα οποία θα ασχοληθούμε, και μέσα στα οποία θα αναπτύσσονται τα πεδία, θα είναι **ισοτροπικά**. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα \vec{E} (ένταση ηλεκτρικού πεδίου) και \vec{D} (διηλεκτρική μετατόπιση) για το ηλεκτρικό πεδίο, και \vec{H} (ένταση μαγνητικού πεδίου) και \vec{B} (μαγνητική επαγωγή) για το μαγνητικό πεδίο θα είναι **παράλληλα**. Στα ισοτροπικά υλικά, η σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ_r και η σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_r είναι βαθμωτά μεγέθη. Στα ανισοτροπικά υλικά (τα οποία δεν θα εξετάσουμε εδώ) το ϵ_r , ή το μ_r , ή και τα δύο ταυτόχρονα είναι τανυστές (δηλ έχουν τη μορφή τετραγωνικού πίνακα 3×3). Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα \vec{E} και \vec{D} δεν θα είναι παράλληλα, και αντίστοιχα τα διανύσματα \vec{H} και \vec{B} δεν θα είναι παράλληλα.

Για τα ισοτροπικά υλικά με τα οποία θα ασχοληθούμε θα διακρίνουμε 3 διαφορετικές περιπτώσεις (βλ. σχ. 8.1 α, β, γ)



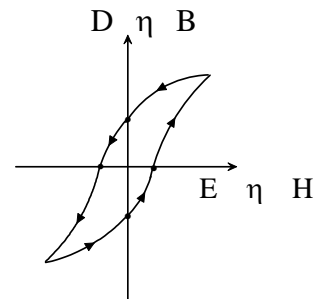
Γραμμικό υλικό

Σχ. 8.1α



Μη γραμμικό υλικό

Σχ. 8.1β



Υλικό με υστέρηση

Σχ. 8.1γ

Στα γραμμικά υλικά ισχύουν οι σχέσεις:

- Για το ηλεκτρικό πεδίο $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$ όπου το ϵ_r σταθερό και ανεξάρτητο του E

- Για το μαγνητικό πεδίο $B = \mu_0 \mu_r H$ όπου το μ_r σταθερό και ανεξάρτητο του H

Στα μη γραμμικά υλικά θα έχουμε:

- Για το ηλεκτρικό πεδίο $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$ όπου το $\epsilon_r = \epsilon_r (E)$ δηλ. ϵ_r το είναι μια μη γραμμική συνάρτηση του E

- Για το μαγνητικό πεδίο $B = \mu_0 \mu_r H$ όπου το $\mu_r = \mu_r (H)$ δηλ. μ_r το είναι μια μη γραμμική συνάρτηση του H

Τέλος στα υλικά με υστέρηση έχουμε βεβαίως τη μη γραμμικότητα αλλά επιπλέον έχουμε και το φαινόμενο της υστέρησης.

8. 2) Οι 4 βασικές προτάσεις για την ενέργεια και τις απώλειες στο Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Διατυπώνουμε παρακάτω τις ακόλουθες 4 προτάσεις:

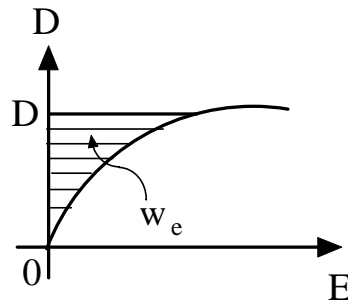
8. 2. 1) Πυκνότητα αποθηκευμένης ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου

Σε ένα χώρο όπου είναι εγκατεστημένο ένα ηλεκτρικό πεδίο η πυκνότητα της αποθηκευμένης ενέργειας (ενέργεια / μονάδα όγκου) του πεδίου δίδεται από τη σχέση:

$$w_e = \int_0^D E' dD' \quad \left(\frac{\text{Joule}}{\text{m}^3} \right)$$

όπου η μεταβολή της διηλεκτρικής μετατόπισης στο διάστημα από 0 έως D απαιτήθηκε για την εγκατάσταση του πεδίου.

Παρατηρούμε ότι στο διάγραμμα E, D (σχ. 8.2) η πυκνότητα ενέργειας είναι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν.



Σχ. 8.2

Στην περίπτωση γραμμικού υλικού όπου $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{D^2}{2 \epsilon_0 \epsilon_r}$$

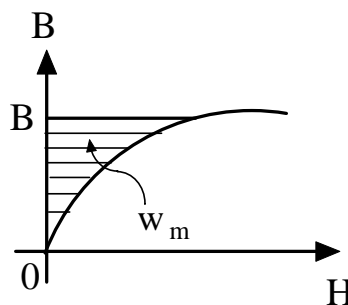
8. 2. 2) Πυκνότητα αποθηκευμένης ενέργειας μαγνητικού πεδίου

Σε ένα χώρο όπου είναι εγκατεστημένο ένα μαγνητικό πεδίο η πυκνότητα της αποθηκευμένης ενέργειας (ενέργεια / μονάδα όγκου) του πεδίου δίδεται από τη σχέση:

$$w_m = \int_0^B H' dB' \quad \left(\frac{\text{Joule}}{\text{m}^3} \right)$$

όπου η μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής στο διάστημα από 0 έως B απαιτήθηκε για την εγκατάσταση του πεδίου.

Παρατηρούμε ότι στο διάγραμμα H, B (σχ. 8.3) η πυκνότητα ενέργειας είναι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν.



Σχ. 8.3

Στην περίπτωση γραμμικού υλικού όπου $B = \mu_0 \mu_r H$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 = \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu_r}$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια αποθηκεύεται ανάλογα με το τετράγωνο των E και H. Επομένως στα σημεία με μεγάλη τιμή των E και H έχουμε και σημαντικά μεγαλύτερη τιμή

των w_e και w_m . Για παράδειγμα αναφέρεται η περίπτωση ενός μαγνητικού κυκλώματος με διάκενα αέρος. Στην περίπτωση αυτή η τιμή του H είναι πολύ μεγαλύτερη στα διάκενα από ότι στο σιδηρομαγνητικό υλικό. Άρα στα διάκενα θα έχουμε και το μεγαλύτερο ποσοστό της αποθηκευμένης ενέργειας μαγνητικού πεδίου.

8. 2. 3) Ειδική ισχύς απωλειών Joule

Σε ένα ηλεκτρικό πεδίο E η ανά μονάδα όγκου ισχύς που μετατρέπεται σε θερμότητα, και χάνεται υπό μορφή απωλειών, δίνεται από τη σχέση:

$$P_{απ} = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad \left(\frac{W}{m^3} \right)$$

όπου \vec{J} η πυκνότητα ρεύματος.

Στην περίπτωση που έχουμε γραμμικό μέσο και ισχύει ο νόμος του Ohm

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$P_{απ} = \gamma E^2$$

όπου γ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού στο οποίο αναπτύσσεται το ηλεκτρικό πεδίο.

8. 2. 4) Πυκνότητα διαδιδόμενης ισχύος

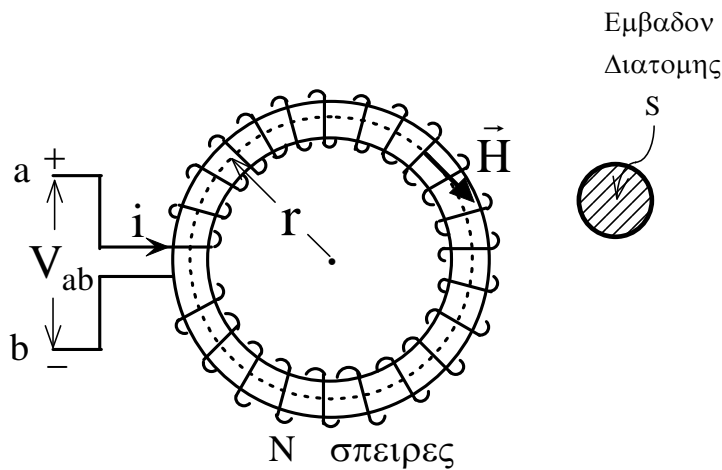
Σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παρατηρείται συνεχής ροή ενέργειας από την πηγή του πεδίου προς το άπειρο, μέσω του εκπεμπόμενου ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Για σημεία αρκετά μακριά από την πηγή το κύμα αυτό θεωρείται επίπεδο, δηλαδή τα διανύσματα των πεδίων \vec{E} και \vec{H} είναι κάθετα μεταξύ τους και επίσης κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος. Ορίζεται εδώ ένα διανυσματικό μέγεθος που ονομάζεται πυκνότητα διαδιδόμενης ισχύος, δηλαδή ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας. Η εν λόγω επιφάνεια θεωρείται κάθετη προς την διεύθυνση διαδόσεως του κύματος (ή της ενέργειας).

Το διανυσματικό αυτό μέγεθος ονομάζεται διάνυσμα Poynting \vec{P} και δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

8.3) Απώλειες υστέρησης σιδηρομαγνητικού υλικού

Στο εδάφιο αυτό θα εξειδικεύσουμε τη μελέτη του θέματος «αποθηκευμένη ενέργεια μαγνητικού πεδίου» για την περίπτωση ενός σιδηρομαγνητικού υλικού με υστέρηση. Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε ένα δακτυλιοειδές πηνίο N – σπειρών με σιδηρομαγνητικό πυρήνα με συντελεστή μ_r . Το πηνίο τροφοδοτείται με ρεύμα i και η τάση στα άκρα του είναι V_{ab} . Το πηνίο αυτό αποκαλείται και τοροειδές πηνίο. (βλ. σχ. 8.4) Η μέση ακτίνα του δακτυλίου είναι r και η μέση διαδρομή ροής έχει μήκος $2\pi r$. Η διατομή του δακτυλίου, με εμβαδόν S , είναι κυκλική με ακτίνα πολύ μικρότερη από r . Έτσι το μαγνητικό πεδίο μέσα στο δακτύλιο μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφο



Σχ. 8.4

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία το μαγνητικό πεδίο στο δακτύλιο θα έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere για την μέση διαδρομή της μαγνητικής ροής:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r H = Ni \quad \text{άρα} \quad H = \frac{Ni}{2\pi r}$$

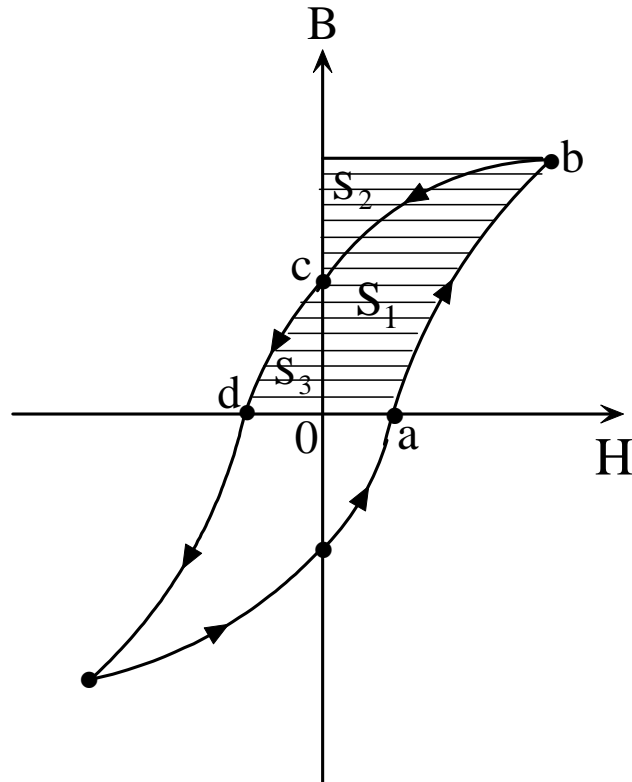
και η μαγνητική ροή θα είναι:

$$\Psi_m = BS = \mu_0 \mu_r H S = \frac{\mu_0 \mu_r Ni S}{2\pi r}$$

Μεταβάλλοντας το ρεύμα i θα έχουμε μεταβολή του μαγνητικού πεδίου H μέσα στον σιδηρομαγνητικό πυρήνα, άρα και μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής B . Έτσι μπορούμε να

έχουμε ένα πλήρη κύκλο μαγνήτισης του σιδηρομαγνητικού υλικού δηλαδή να διαγράψουμε ένα πλήρη βρόχο υστερήσεως. (βλ. σχ. 8.5)

Θα εξετάσουμε τη διαδρομή $a - b - c - d$ η οποία καλύπτει τον μισό ακριβώς βρόχο και τα συμπεράσματα που θα προκύψουν προφανώς επεκτείνονται, λόγω συμμετρίας, και στον υπόλοιπο μισό βρόχο.



Σχ. 8.5

1) Κίνηση στο τμήμα a-b

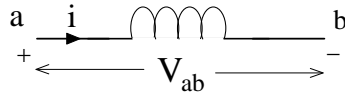
Κινούμενοι από το σημείο a στο σημείο b, (όπου το μαγνητικό πεδίο έχει **θετική τιμή και αυξάνει**), θεωρούμε μια απειροστά μικρή αύξηση του πεδίου H στο τμήμα αυτό.

Επειδή το μαγνητικό πεδίο H έχει θετική τιμή και αυξάνει, τα ίδια θα ισχύουν και για το ρεύμα i , συνεπώς: $i > 0$ και $\frac{di}{dt} > 0$.

Η Η.Ε.Δ. στα άκρα του πηνίου θα είναι: $e_{ab} = -N \frac{d\Psi_m}{dt} = -L \frac{di}{dt}$ συνεπώς $e_{ab} < 0$

Αλλά ισχύει $V_{ab} = -e_{ab}$ επομένως θα είναι $V_{ab} > 0$

Παρακάτω (σχ. 8.6) σχεδιάζουμε το δακτυλιοειδές πηνίο σε απλή κυκλωματική μορφή και σημειώνουμε ξανά τις φορές αναφοράς τάσεως και ρεύματος.



Σχ. 8.6

Παρατηρούμε ότι με τις δεδομένες φορές αναφοράς και επειδή ισχύει $i > 0$ και $V_{ab} > 0$ το πηνίο θα **απορροφά** ενέργεια από την πηγή που το τροφοδοτεί.

Η στοιχειώδης αυτή ενέργεια dW για χρονικό διάστημα dt θα είναι:

$$dW = V_{ab} i dt$$

όπου:
$$V_{ab} = -e_{ab} = -(-N \frac{d\Psi_m}{dt}) = N \frac{d\Psi_m}{dt}$$

έχουμε όμως:
$$\Psi_m = B S \quad \text{άρα} \quad \frac{d\Psi_m}{dt} = S \frac{dB}{dt}$$

από τις τρεις τελευταίες σχέσεις προκύπτει:

$$dW = V_{ab} i dt = N \frac{d\Psi_m}{dt} i dt = N S \frac{dB}{dt} i dt = N S i dB$$

Αλλά επειδή προηγουμένως υπολογίσαμε το μαγνητικό πεδίο $H = \frac{Ni}{2\pi r}$ θα πάρουμε τη

σχέση:
$$Ni = H 2\pi r$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή στην έκφραση για την ενέργεια $dW = N S i dB$

θα πάρουμε τελικά:

$$dW = 2\pi r S H dB$$

Παρατηρούμε όμως ότι $2\pi r S = U$ όπου U ο όγκος του δακτυλίου.

Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$dW = U H dB$$

και για την κίνηση από το σημείο a στο σημείο b η συνολική ενέργεια που θα απορροφήσει το πηνίο θα είναι:

$$W_{ab} = \int_a^b dW = U \int_a^b H dB = U (S_1 + S_2)$$

όπου S_1 και S_2 οι αντίστοιχες γραμμοσκιασμένες περιοχές στη γραφική παράσταση του βρόχου υστερήσεως.

2) Κίνηση στο τμήμα b-c

Κινούμενοι από το σημείο b στο σημείο c, (όπου το μαγνητικό πεδίο έχει **θετική τιμή** και **μειώνεται** βλ. σχ. 8.5), θεωρούμε μια απειροστά μικρή μείωση του πεδίου H στο τμήμα αυτό.

Επειδή το μαγνητικό πεδίο H έχει θετική τιμή και μειώνεται, τα ίδια θα ισχύουν και για το ρεύμα i , συνεπώς: $i > 0$ και $\frac{di}{dt} < 0$.

Η Η.Ε.Δ. στα άκρα του πηνίου θα είναι: $e_{ab} = -N \frac{d\Psi_m}{dt} = -L \frac{di}{dt}$ συνεπώς $e_{ab} > 0$

Αλλά ισχύει $V_{ab} = -e_{ab}$ επομένως θα είναι $V_{ab} < 0$

Παρατηρούμε τώρα ότι με τις δεδομένες φορές αναφοράς και επειδή ισχύει $i > 0$ και $V_{ab} < 0$ το πηνίο θα **δίνει** ενέργεια στην πηγή.

Χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια ανάλυση όπως προηγουμένως φθάνουμε στο συμπέρασμα ότι για την κίνηση από το σημείο b στο σημείο c η συνολική ενέργεια που θα προσφέρει το πηνίο στην πηγή θα είναι:

$$W_{ab} = \int_b^c dW = U \int_b^c H dB = -U S_2$$

θέσαμε αρνητικό πρόσημο για να δείξουμε ότι πρόκειται για προσφορά ενέργειας από το πηνίο στην πηγή.

3) Κίνηση στο τμήμα c - d

Κινούμενοι από το σημείο c στο σημείο d, (όπου το μαγνητικό πεδίο έχει **αρνητική τιμή** και **μειώνεται**), θεωρούμε μια απειροστά μικρή μείωση του πεδίου H στο τμήμα αυτό.

Επειδή το μαγνητικό πεδίο H έχει αρνητική τιμή και μειώνεται, τα ίδια θα ισχύουν και για το ρεύμα i , συνεπώς: $i < 0$ και $\frac{di}{dt} < 0$.

Η Η.Ε.Δ. στα άκρα του πηνίου θα είναι: $e_{ab} = -N \frac{d\Psi_m}{dt} = -L \frac{di}{dt}$ συνεπώς $e_{ab} > 0$

Αλλά ισχύει $V_{ab} = -e_{ab}$ επομένως θα είναι $V_{ab} < 0$

Παρατηρούμε τώρα ότι με τις δεδομένες φορές αναφοράς και επειδή ισχύει $i < 0$ και $V_{ab} < 0$ το πηνίο θα **απορροφά** ενέργεια από την πηγή.

Και πάλι χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια ανάλυση όπως προηγουμένως φθάνουμε στο συμπέρασμα ότι για την κίνηση από το σημείο c στο σημείο d η συνολική ενέργεια που θα απορροφήσει το πηνίο θα είναι:

$$W_{ab} = \int_c^d dW = U \int_c^d H dB = U S_3$$

Συνοψίζοντας τώρα όλα τα προηγούμενα θα έχουμε:

Σε ένα πλήρη κύκλο μαγνήτισης (διαγραφή όλου του βρόχου υστερήσεως) η συνολική ενέργεια που θα απορροφήσει το πηνίο θα είναι:

$$W_h = 2 U (S_1 + S_2 - S_2 + S_3) = 2 U (S_1 + S_3)$$

(ο παράγοντας 2 μπαίνει για το υπόλοιπο μισό του βρόχου, που λόγω συμμετρίας δεν εξετάσαμε)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι: $W_h = U S_h$

Όπου S_h το **εμβαδόν του βρόχου υστερήσεως**

Η απορροφούμενη αυτή ενέργεια W_h δεν ανακτάται ποτέ και χάνεται υπό μορφή θερμότητας.

Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι στα υλικά με υστέρηση (όπως είναι τα σιδηρομαγνητικά υλικά) εμφανίζονται απώλειες ενέργειας που ονομάζονται **απώλειες υστερήσεως**. Η εξήγηση για την αιτία των απωλειών αυτών βρίσκεται στις δυνάμεις τριβής που εμφανίζονται μεταξύ των περιοχών Weiss κατά τις διαδοχικές εναλλασσόμενες μαγνητίσεις του υλικού, όπου οι περιοχές αυτές πρέπει να αλλάζουν συνεχώς κατεύθυνση.

Παρατηρούμε επίσης ότι επειδή η απώλεια ενέργειας σε ένα κύκλο μαγνήτισης, είναι ανάλογη του εμβαδού του βρόχου υστερήσεως, υλικά με μεγάλο εμβαδον βρόχου (σκληρά μαγνητικά υλικά) θα παρουσιάζουν μεγαλύτερες απώλειες απο υλικά με μικρό εμβαδον βρόχου (μαλακά μαγνητικά υλικά)

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ισχύ των απωλειών υστερήσεως τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$P_h = f W_h \quad (\text{watt})$$

όπου f η συχνότητα λειτουργίας

Επίσης αναφέρουμε εδώ και έναν εμπειρικό τύπο (τύπος του Steinmetz) που μας δίνει την ισχύ απωλειών λόγω υστερήσεως:

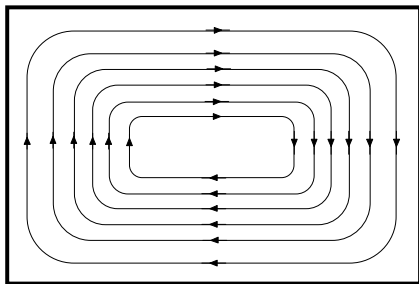
$$P_h = k_h f B_{\max}^n \quad (\text{watt})$$

όπου k_h σταθερά εξαρτώμενη από το υλικό, f η συχνότητα λειτουργίας και B_{\max} η μέγιστη τιμή της μαγνητικής επαγωγής. Ο εκθέτης n κυμαίνεται από 1.5 έως 2.5.

Οι απώλειες υστερήσεως ενός πηνίου με σιδηροπυρήνα δεν πρέπει να συγχέονται με τις ωμικές απώλειες που επίσης έχει (λόγω της ωμικής αντίστασης του τυλίγματος)

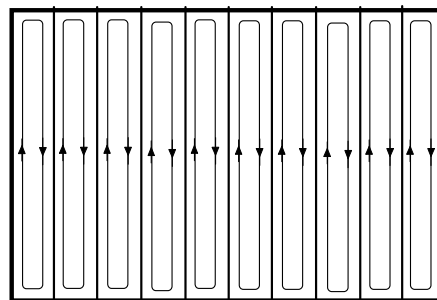
8.4) Απώλειες δινορρευμάτων

Μια άλλη αιτία απωλειών σε ένα σιδηρομαγνητικό υλικό είναι τα λεγόμενα δινορρέυματα. Εφ' όσον υπάρχει χρονικά μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή στον πυρήνα και επειδή ο πυρήνας είναι αγωγίμος θα αναπτυχθούν ρεύματα εξ' επαγωγής μέσα σ' αυτόν. Τα ρεύματα αυτά θα έχουν κυκλικές τροχιές (βλ. σχ. 8.7α) και θα προκαλούν θερμικές απώλειες Joule. Για τον περιορισμό του μήκους διαδρομής αυτών των ρευμάτων (άρα και των απωλειών) οι πυρήνες δεν αποτελούνται από συμπαγές σιδηρομαγνητικό υλικό αλλά κατασκευάζονται από λεπτά ελάσματα πάχους περίπου 0.5 mm τα οποία μονώνονται μεταξύ τους με βερνίκι. (βλ. σχ. 8.7β)



*Δινορρέυματα
(η φορά της μαγνητικής ροής είναι κάθετη
στο επίπεδο του χαρτιού)*

Σχ. 8.7α

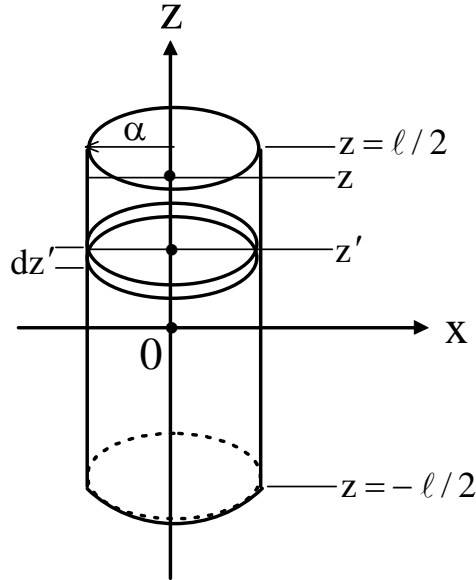


*Περιορισμός της διαδρομής των
δινορρευμάτων με χρήση μονωμένων
ελασμάτων*

Σχ. 8.7β

8.5) Ασκήσεις Κεφαλαίου 8

ΑΣΚ 8.1 Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στον άξονα σωληνοειδούς μήκους ℓ και ακτίνας a . Το σωληνοειδές αποτελείται από N σπείρες και τροφοδοτείται με ρεύμα i .



Σχ. 8.8

Η σχετική γεωμετρία φαίνεται στο σχήμα 8.8

Το σωληνοειδές έχει συνολικά $N i$ αμπερελίγματα. Ο αριθμός των αμπερελιγμάτων ανά μονάδα μήκους θα είναι: $\frac{N i}{\ell}$

Θεωρούμε ένα στοιχειώδη βρόχο ύψους dz' στη θέση $z = z'$

Ο βρόχος αυτός θα περιλαμβάνει συνολικά $\frac{N i}{\ell} dz'$ αμπερελίγματα δηλαδή θα ισοδυναμεί με $\frac{N}{\ell} dz'$ κυκλικούς βρόχους ακτίνας a που διαρρέονται από ρεύμα i . Το πεδίο κυκλικού βρόχου όμως θεωρείται γνωστό. (βλ. ΑΣΚ 5.1)

Ο στοιχειώδης αυτός βρόχος θα προκαλεί στο σημείο z (επί του άξονα) στοιχειώδες πεδίο $d\vec{H}_z$ όπου:

$$d\vec{H}_z = \frac{N i}{\ell} dz' \frac{\alpha^2}{2 (\alpha^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \hat{z}$$

άρα με επαλληλία θα έχουμε:

$$\vec{H}_z = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} d\vec{H}_z = \frac{N i}{2 \ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{\alpha^2 dz'}{(\alpha^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Το αποτέλεσμα αυτού του ολοκληρώματος είναι:

$$\bar{H}_z = \frac{N i}{2 \ell} \left[\frac{(\ell/2) + z}{\sqrt{\alpha^2 + ((\ell/2) + z)^2}} + \frac{(\ell/2) - z}{\sqrt{\alpha^2 + ((\ell/2) - z)^2}} \right] \hat{z}$$

Στο κέντρο ακριβώς του σωληνοειδούς ($z = 0$) θα έχουμε:

$$\bar{H}_z = \frac{N i}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (\ell/2)^2}} \hat{z}$$

και αν δεχτούμε $\ell \gg \alpha$ (σωληνοειδές μεγάλου μήκους) τότε ο ανωτέρω τύπος δίνει:

$$\bar{H}_z = \frac{N i}{\ell} \hat{z}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε προσεγγιστικά ότι η τιμή του μαγνητικού πεδίου $\bar{H}_z = \frac{N i}{\ell} \hat{z}$ ισχύει για ολόκληρο το εσωτερικό του σωληνοειδούς (ομογενές πεδίο) και να αγνοήσουμε εντελώς την σκέδαση των δυναμικών γραμμών.

Παρακάτω θα υπολογίσουμε με βάση την υπόθεση αυτή τον συντελεστή αυτεπαγωγής του σωληνοειδούς.

Η πεπλεγμένη μαγνητική ροή μέσα στο σωληνοειδές θα είναι:

$$\Psi_m = N B S$$

όπου: $B = \mu_0 \mu_r H_z = \mu_0 \mu_r \frac{N i}{\ell}$ η μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του σωληνοειδούς

και $S = \pi \alpha^2$ το εμβαδόν μιας σπείρας

άρα: $\Psi_m = N \mu_0 \mu_r \frac{N i}{\ell} \pi \alpha^2$

και ο συντελεστής αυτεπαγωγής L θα είναι:

$$L = \frac{\Psi_m}{i} = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 \pi \alpha^2}{\ell}$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την αποθηκευμένη ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο σωληνοειδές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση που δίνει την αποθηκευμένη ενέργεια ανά μονάδα όγκου:

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 \quad (\text{Joule/m}^3)$$

άρα η συνολική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σωληνοειδές θα είναι:

$$W_m = w_m U = w_m \ell \pi \alpha^2 \quad \text{όπου} \quad U = \ell \pi \alpha^2 \quad \text{ο όγκος του σωληνοειδούς}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $H = \frac{N i}{\ell}$ θα πάρουμε τελικά:

$$W_m = w_m \ell \pi \alpha^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \frac{N^2 i^2}{\ell^2} \ell \pi \alpha^2$$

αλλά γνωρίζοντας ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής L είναι: $L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 \pi \alpha^2}{\ell}$

καταλήγουμε στη γνωστή σχέση από τη θεωρία κυκλωμάτων:

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

9.1) Γενικά

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Maxwell συνδέουν τις τιμές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε μια περιοχή **1** με τις τιμές των πηγών του πεδίου, αλλά και τις τιμές του ίδιου του πεδίου σε μια άλλη περιοχή **2**. Για παράδειγμα ο νόμος του Faraday συνδέει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στα σημεία μιας κλειστής καμπύλης με την παράγωγο της μαγνητικής επαγωγής στα σημεία μια οποιασδήποτε επιφάνειας που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη.

Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Maxwell συνδέουν αίτιο και αποτέλεσμα σε διαφορετικά σημεία του χώρου.

Είναι όμως δυνατή η διατύπωση των εξισώσεων αυτών και σε μία άλλη ισοδύναμη μορφή έτσι ώστε να έχουμε αλληλοσύνδεση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και των πηγών του **στο ίδιο** ακριβώς σημείο του χώρου. Η μορφή αυτή διατύπωσης των εξισώσεων Maxwell πραγματοποιείται με χρήση παραγώγων και για το λόγο αυτό οι εξισώσεις λέγεται ότι διατυπώνονται σε διαφορική μορφή. Επίσης λέγονται και σημειακές εξισώσεις Maxwell, διότι όπως προαναφέραμε αναφέρονται σε ένα σημείο του χώρου. Οι διαφορικές εξισώσεις συνοδεύονται, όπως θα δούμε, και από τις λεγόμενες «οριακές συνθήκες»

9.2) Εξισώσεις Απόκλισης

Έχουμε το νόμο του Gauss για την ηλεκτρική ροή:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho \, dV = q_{\text{εσωτ}}$$

Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ των μεγεθών \vec{D} και ρ στο ίδιο σημείο χρησιμοποιούμε ένα πολύ μικρό όγκο ΔV και έστω ΔS η επιφάνεια που περιβάλλει τον μικρό αυτό όγκο. Άρα:

$$\oiint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \rho \, \Delta V$$

Διαιρώντας με ΔV θα έχουμε:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \rho$$

Το αριστερό μέλος αυτής της σχέσης είναι ακριβώς ο ορισμός της απόκλισης (div) της διανυσματικής συναρτήσεως \vec{D}

$$\text{div } \vec{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

Άρα η διαφορική μορφή του νόμου του Gauss για την πυκνότητα της ηλεκτρικής ροής θα είναι:

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

Αν ολοκληρώσουμε αυτή τη σχέση σε ένα όγκο V θα πάρουμε:

$$\iiint_V \text{div } \vec{D} \, dV = \iiint_V \rho \, dV$$

Γράφουμε και το νόμο του Gauss ολοκληρωτική μορφή:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho \, dV$$

Με σύγκριση των δύο τελευταίων σχέσεων θα προκύψει ο γνωστός από τα Μαθηματικά τύπος του Gauss.

$$\iiint_V \text{div } \vec{D} \, dV = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Η απόκλιση μιας διανυσματικής συναρτήσεως

$$\vec{D}(x, y, z) = D_x(x, y, z)\hat{x} + D_y(x, y, z)\hat{y} + D_z(x, y, z)\hat{z}$$

υπολογίζεται στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων. Ειδικά για το καρτεσιανό σύστημα αποδεικνύεται ότι ο τύπος υπολογισμού είναι:

$$\text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

και εισάγοντας τον διαφορικό τελεστή «ανάδελτα»

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

Μπορούμε να γράψουμε: $\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τον νόμο του Gauss για την πυκνότητα της μαγνητικής ροής.

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία όπως προηγουμένως, θα πάρουμε:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Η μηδενική απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου σημαίνει ότι το πεδίο αυτό είναι «σωληνοειδές» δηλαδή οι δυναμικές γραμμές του πεδίου δεν έχουν αρχή και τέλος και σχηματίζουν κλειστούς σωλήνες ροής.

Γράφουμε τώρα και την αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου σε ολοκληρωτική μορφή:

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV$$

και πάλι με την ίδια διαδικασία θα πάρουμε την ακόλουθη ισοδύναμη διαφορική σχέση:

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

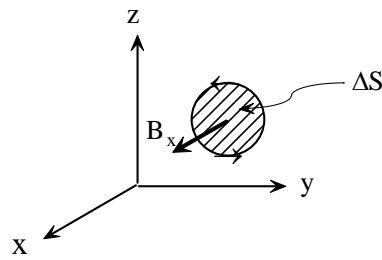
9.3) Εξισώσεις Περιστροφής

Οι διαφορικές εξισώσεις περιστροφής θα προκύψουν από τις ολοκληρωτικές εξισώσεις κυκλοφορίας.

Γράφουμε το νόμο του Faraday σε ολοκληρωτική μορφή:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Εξετάζουμε αρχικά τη συνιστώσα B_x της μαγνητικής επαγωγής. Θεωρούμε μια μικρή επιφάνεια ΔS κάθετη στον άξονα x (βλ. σχ. 9.1)



Σχ. 9.1

Ο νόμος Faraday γράφεται:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Delta S$$

όπου εδώ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του E υπολογίζεται σε μια κλειστή καμπύλη που περιβάλλει την επιφάνεια ΔS .

Διαιρώντας δια ΔS θα πάρουμε:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

Το αριστερό μέλος αυτής της σχέσης είναι η x - συνιστώσα (κάθετη στο ΔS) της περιστροφής (rot) της διανυσματικής συναρτήσεως \vec{E}

Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε: $(\text{rot } \vec{E})_x = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$

Θεωρώντας επιφάνειες ΔS κάθετες στους άξονες y και z θα πάρουμε αντίστοιχα:

$$(\text{rot } \vec{E})_y = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$(\text{rot } \vec{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Άρα από τις τρεις αυτές βαθμωτές εξισώσεις προκύπτει η διανυσματική εξίσωση:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Αυτή είναι και η διαφορική μορφή του νόμου του Faraday.

Αν ολοκληρώσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής σε μία επιφάνεια

$$\iint_S (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

και ξαναγράφουμε το νόμο του Faraday σε ολοκληρωτική μορφή

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ο γνωστός από τα Μαθηματικά τύπος του Stokes

$$\iint_S (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Η περιστροφή (ή στροβιλισμός) μιας διανυσματικής συναρτήσεως

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\hat{x} + E_y(x, y, z)\hat{y} + E_z(x, y, z)\hat{z}$$

υπολογίζεται στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων. Ειδικά για το καρτεσιανό σύστημα αποδεικνύεται ότι ο τύπος υπολογισμού είναι:

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{E}$$

Τέλος αν γράψουμε το νόμο των Ampere - Maxwell ολοκληρωτική μορφή:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

και ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως θα πάρουμε την ισοδύναμη έκφραση σε διαφορική μορφή:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Συνοψίζουμε εδώ τις 4 εξισώσεις του Maxwell σε διαφορική μορφή και τον νόμο διατήρησης του φορτίου:

$$\text{Νόμος Faraday: } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Νόμος Ampere - Maxwell: } \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Νόμος Gauss: } \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\text{Νόμος Gauss για το B: } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Νόμος διατήρησης του φορτίου: } \operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Μπορεί να αποδειχθεί και πάλι ότι από αυτές τις 5 εξισώσεις ανεξάρτητες είναι 3 και συγκεκριμένα ο Νόμος Faraday, ο Νόμος Ampere - Maxwell και ο Νόμος διατήρησης του φορτίου. Οι δύο νόμοι του Gauss μπορούν να θεωρηθούν σαν αρχικές συνθήκες.

9.4) Οριακές συνθήκες

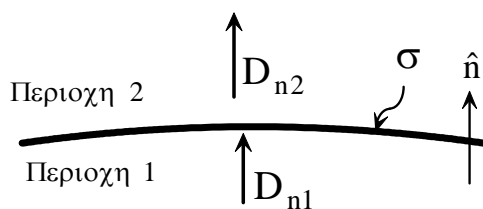
Στο χώρο που αναπτύσσεται ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι δυνατόν να υπάρχουν και σημεία όπου τα πεδιακά μεγέθη να παρουσιάζουν ανωμαλίες ή ασυνέχειες. Π.χ. σε επιφάνειες με κατανομές φορτίων και ρευμάτων ή σε διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ υλικών με διαφορετικές ιδιότητες κ.λ.π.

Στα σημεία αυτά δεν μπορούν να υπολογιστούν παράγωγοι των πεδιακών μεγεθών και επομένως δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις Maxwell σε διαφορική μορφή. Αντί αυτών χρησιμοποιούνται κάποιες ειδικές σχέσεις που περιγράφουν την μεταβολή των πεδιακών μεγεθών στις επιφάνειες ασυνέχειας. Οι σχέσεις αυτές λέγονται οριακές συνθήκες.

Παρακάτω θα διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη τις οριακές συνθήκες για τα πεδιακά μεγέθη

9.4.1) Κάθετες συνιστώσες

Θεωρούμε μια διαχωριστική επιφάνεια η οποία χωρίζει δύο διαφορετικές περιοχές 1 και 2 και έστω \hat{n} το κάθετο διάνυσμα σε ένα σημείο της επιφάνειας αυτής. Το \hat{n} κατευθύνεται από την περιοχή 1 προς την περιοχή 2 (βλ. σχ. 9.2)



Σχ. 9.2

Αποδεικνύεται ότι για τις κάθετες συνιστώσες της πυκνότητας ηλεκτρικής ροής ισχύει:

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου που ενδεχομένως υπάρχει στην διαχωριστική επιφάνεια.

Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι για τις κάθετες συνιστώσες της πυκνότητας μαγνητικής ροής ισχύει:

$$B_{n2} - B_{n1} = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

Δηλαδή οι κάθετες συνιστώσες της πυκνότητας μαγνητικής ροής (ή της μαγνητικής επαγωγής) είναι πάντα συνεχείς.

Τέλος για τις κάθετες συνιστώσες της πυκνότητας ρεύματος ισχύει:

$$J_{n2} - J_{n1} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{J}_s \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{J}_s$$

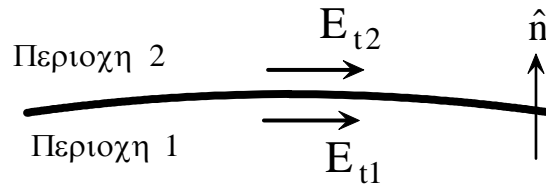
όπου σ και \vec{J}_s οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίου και ρεύματος που ενδεχομένως υπάρχουν στην διαχωριστική επιφάνεια.

9.4.2) Εφαπτομενικές συνιστώσες

Αντίστοιχα θα έχουμε (σχ. 9.3) :

Για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου

$$E_{t2} - E_{t1} = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$



Σχ. 9.3

Δηλαδή οι εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι πάντα συνεχείς.

Αντίστοιχα για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$$

9.5) Εξειδίκευση των εξισώσεων Maxwell σε στατικά πεδία

Όταν έχουμε στατικές καταστάσεις (δηλ. πεδία ανεξάρτητα του χρόνου) οι χρονικές παράγωγοι μηδενίζονται και υπάρχει αποσύζευξη των πεδίων E και H. Οι τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις στην περίπτωση αυτή γράφονται:

- Νόμος Faraday: $\text{rot } \vec{E} = 0$

- Νόμος Ampere - Maxwell: $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$

- Αρχή διατήρησης του φορτίου: $\text{div } \vec{J} = 0$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Ηλεκτροστατικό πεδίο

Χρησιμοποιούνται οι σχέσεις $\text{rot } \vec{E} = 0$ (αστρόβιλο του ηλεκτροστατικού πεδίου)

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{Νόμος Gauss})$$

β) Πεδίο ροής συνεχούς ρεύματος

Χρησιμοποιούνται οι σχέσεις $\text{rot } \vec{E} = 0$ (αστρόβιλο του ηλεκτροστατικού πεδίου,

εδώ εκφράζει το νόμο τάσεων του Kirchhoff)

$\text{div } \vec{J} = 0$ (αρχή διατήρησης του φορτίου, εδώ εκφράζει το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff)

$\vec{J} = \gamma \vec{E}$ (Γενικευμένος νόμος του Ohm)

γ) Στατικό μαγνητικό πεδίο μονίμων μαγνητών

Χρησιμοποιούνται οι σχέσεις $\text{rot } \vec{H} = 0$ (Νόμος του Ampere αλλά με $\vec{J} = 0$)

$\text{div } \vec{B} = 0$

δ) Στατικό μαγνητικό πεδίο συνεχούς ρεύματος

Χρησιμοποιούνται οι σχέσεις $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ (Νόμος του Ampere)

$\text{div } \vec{B} = 0$

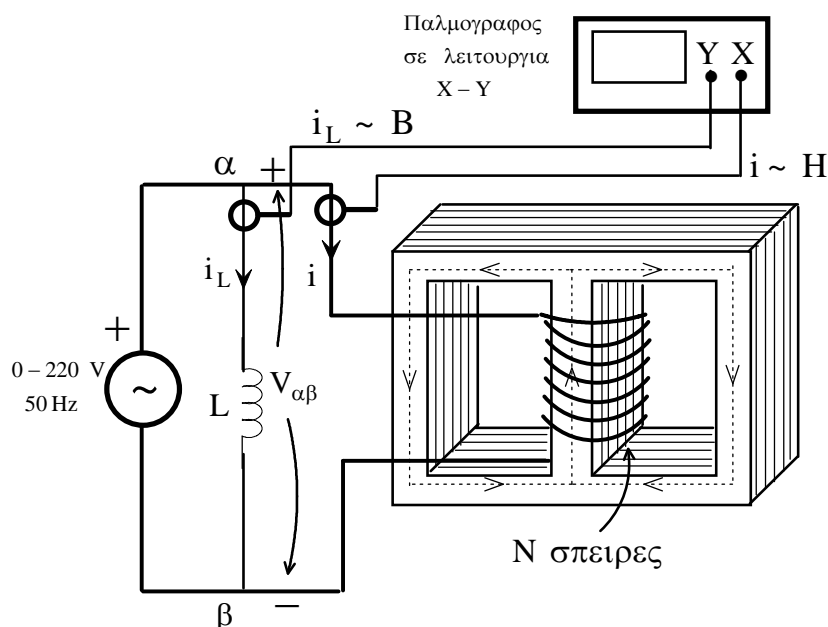
**Σ.Ν.Δ.
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑΣ**

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ

**ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ
ΜΕΓΕΘΩΝ**

1) ΚΑΤΑΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΣ ΣΙΔΗΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Στο πείραμα αυτό θα γίνει μια «ποιοτική» καταγραφή του βρόχου υστερήσεως ενός σιδηρομαγνητικού υλικού. Στην περίπτωση αυτή το σιδηρομαγνητικό υλικό είναι αυτό που αποτελεί τον πυρήνα ενός μετασχηματιστή. Η όλη διάταξη του πειράματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Το τύλιγμα του πρωτεύοντος του μετασχηματιστή τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης με συχνότητα 50 Hz και δυνατότητα ρύθμισης από 0 έως 220 Volts.

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου H στον πυρήνα του μετασχηματιστή είναι ανάλογη του ρεύματος του πρωτεύοντος i . Επομένως θα έχουμε και ένα εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο στον πυρήνα του μετασχηματιστή. Αν καταγράψουμε το ρεύμα i με ένα probe ρεύματος και το οδηγήσουμε στον άξονα X ενός παλμογράφου σε λειτουργία $X-Y$ έχουμε αρχικά την καταγραφή της μεταβολής του H για ένα πλήρη κύκλο μαγνήτισης.

Στη συνέχεια χρειαζόμαστε και ένα μέγεθος ανάλογο της μαγνητικής επαγωγής B το οποίο πρέπει να οδηγηθεί στον άξονα Y του παλμογράφου.

Έχουμε ότι: $B = \frac{\Psi_m}{S}$ όπου Ψ_m η μαγνητική ροή στον πυρήνα και S το εμβαδόν της διατομής του πυρήνα.

Επίσης ισχύει: $V_{\alpha\beta} = N \frac{d\Psi_m}{dt} = N \frac{d}{dt} [BS] = NS \frac{dB}{dt}$ άρα $\int V_{\alpha\beta} dt = NS B$

Άρα προκύπτει ότι $B \sim \int V_{\alpha\beta} dt$ (1)

Παρατηρούμε ότι αν συνδέσουμε στα σημεία α - β ένα γραμμικό πηνίο L θα ισχύει:

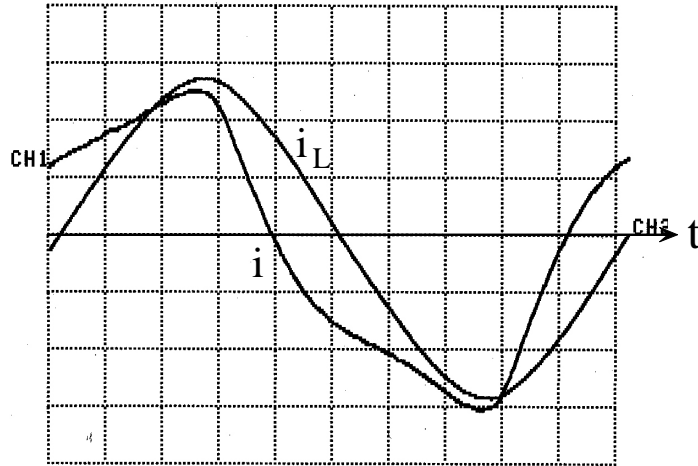
$$V_{\alpha\beta} = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L = \frac{1}{L} \int V_{\alpha\beta} dt \quad \text{δηλαδή} \quad i_L \sim \int V_{\alpha\beta} dt \quad (2)$$

άρα από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το ρεύμα $i_L \sim B$

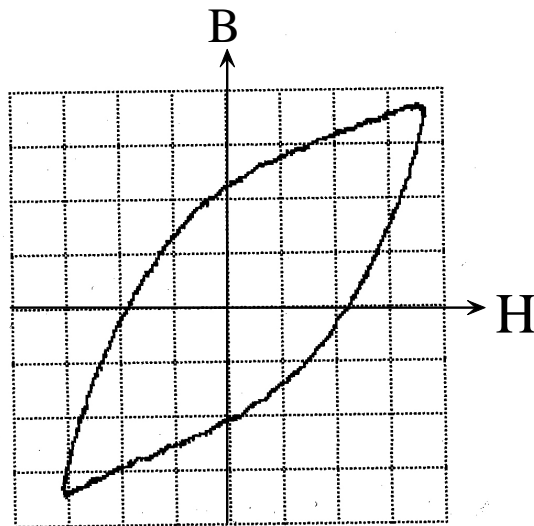
Επομένως καταγράφοντας το ρεύμα i_L με ένα probe ρεύματος και οδηγώντας το στον άξονα Y του παλμογράφου θα έχουμε τελικά την «ποιοτική» καταγραφή του βρόχου υστερήσεως

του σιδηρομαγνητικού υλικού του πυρήνα. (Δηλ. δεν θα έχουμε εδώ ακριβείς καταγραφές τιμών των H και B .)

Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται τα ρεύματα i και i_L όπως κατεγράφησαν από τον παλμογράφο, καθώς και ο βρόχος υστερήσεως που προέκυψε από τη σύνθεσή τους σε διάγραμμα $X - Y$.



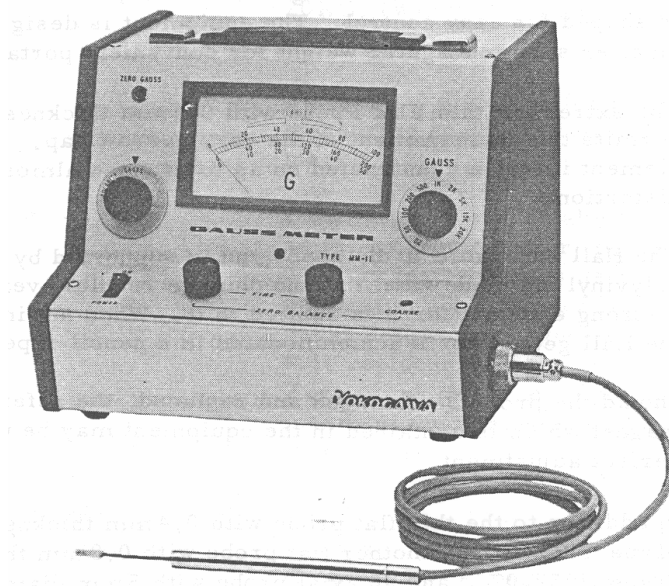
Καταγραφή από παλμογράφο των ρευμάτων i και i_L



Καταγραφή του βρόχου υστερήσεως

2) ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Για τη μέτρηση της μαγνητικής επαγωγής B θα χρησιμοποιηθεί το όργανο Yokogawa 3251. (βλ. κατωτέρω σχήμα)



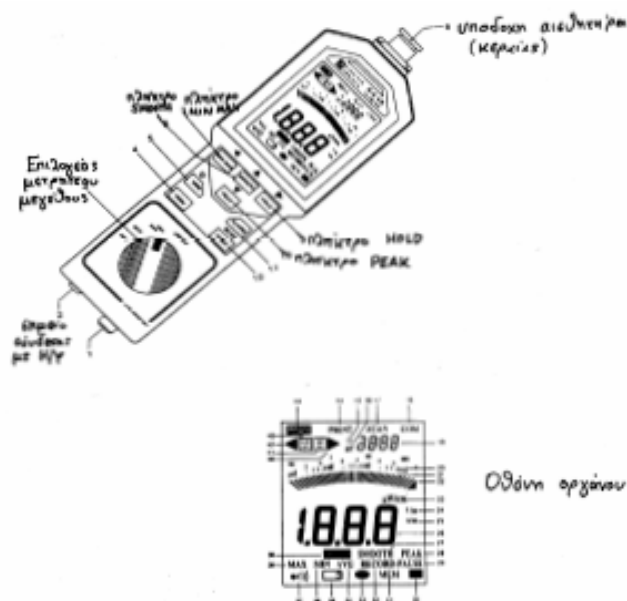
Η λειτουργία του οργάνου αυτού βασίζεται στο φαινόμενο Hall. Το όργανο έχει δυνατότητα μέτρησης τιμών του B από 0 έως 20000 Gauss σε 10 διαφορετικές κλίμακες, για στατικά πεδία αλλά και για μεταβαλλόμενα μέχρι τη συχνότητα των 500 Hz. (υπενθυμίζεται ότι 1 Tesla = 10000 Gauss). Επίσης έχει τη δυνατότητα ένδειξης και της πολικότητας του πεδίου (Βόρειος ή Νότιος μαγνητικός πόλος)

Με το όργανο αυτό θα γίνουν μετρήσεις της μαγνητικής επαγωγής B σε μόνιμους μαγνήτες αλλά και στο πεδίο που αναπτύσσεται κοντά στον πυρήνα ενός μετασχηματιστή.

3) ΜΕΤΡΗΤΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΙΣΧΥΟΣ Η/Μ ΠΕΔΙΩΝ CHAUVIN – ARNOUX C.A 43

Ο μετρητής έντασης και πυκνότητας ισχύος Ηλεκτρομαγνητικών πεδίων CHAUVIN – ARNOUX CA – 43 είναι ένα ψηφιακό φορητό όργανο το οποίο μετρά ένταση Ηλεκτρικού πεδίου σε V/m , ένταση Μαγνητικού πεδίου σε A/m και πυκνότητα ισχύος σε $\mu\text{W}/\text{m}^2$. Το όργανο αποτελείται από δύο βασικά μέρη δηλαδή το κυρίως όργανο και τον αισθητήρα ο οποίος δεν είναι παρα μία κεραία λήψεως Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Παρακάτω φαίνεται η σχηματική παράσταση του οργάνου



Αναφέρουμε ότι το όργανο αυτό δεν έχει τη δυνατότητα να μετρά σε **συγκεκριμένη συχνότητα** αλλά μετρά το συνολικό Η/Μ πεδίο (άθροισμα πεδίων διαφόρων συχνοτήτων) το οποίο λαμβάνει ο αισθητήρας του.

Το όργανο έχει τη δυνατότητα να συνδέεται με Η/Υ σε on – line σύνδεση για παρακολούθηση των μετρήσεων. Επίσης είναι δυνατή, μέσω του Η/Υ με κατάλληλο λογισμικό, η επεξεργασία των μετρήσεων και η χάραξη γραφικών παραστάσεων , όπως π.χ. της διακύμανσης των μετρήσεων σε κάποια χρονικά διαστήματα κλπ.

Μεταξύ των βασικών επιλογών στη διαδικασία μετρήσεων του οργάνου αναφέρουμε τις ακόλουθες :

- Κράτημα ένδειξης (πλήκτρο **HOLD**)

- Ένδειξη μέσης τιμής των 10 τελευταίων μετρήσεων σε ένα χρονικό διάστημα 4 sec . αυτό έχει σαν συνέπεια μια πιο “ομαλή” ένδειξη (πλήκτρο **SMOOTH**)

- Μετρήσεις κορυφής (peak) με ταυτόχρονη απενεργοποίηση ενός φίλτρου με συχνότητα αποκοπής τα 50 Hz ώστε να είναι δυνατή η μέτρηση πεδίων χαμηλής συχνότητας (πχ. κοντά σε μετασχηματιστές , γραμμές τροφοδοσίας κλπ). Επιτυγχάνεται με το πλήκτρο (**PEAK**)

- Ένδειξη ελάχιστης , μέγιστης και μέσης τιμής σε τρέχον χρονικό διάστημα (πλήκτρο **MIN MAX** με διαδοχικές πιέσεις)

Επίσης αναφέρουμε ότι το όργανο διαθέτει ενσωματωμένη μνήμη για αποθήκευση μετρήσεων οι οποίες μπορούν να διαβαστούν αργότερα από την οθόνη του ή και να εκτυπωθούν σε κοινό εκτυπωτή με τον οποίο το όργανο συνδέεται.

**ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΟΥ
CAUVIN - ARNOUX C.A – 43 FIELD METER**

Περιοχή μετρήσεων

Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου: 0.1 – 199.9 V/m

Ένταση Μαγνητικού Πεδίου: 0.1 - 19.99 A/m

Πυκνότητα Ισχύος: 0.1 – 1999 $\mu\text{W}/\text{cm}^2$

Ζώνη συχνοτήτων 100 KHz – 2.5 GHz

Αναφέρουμε παρακάτω ενδεικτικές τιμές μετρήσεων που έγιναν με το όργανο αυτό: (όλες οι μετρήσεις, εκτός της τελευταίας, έγιναν σε μηδενική απόσταση από τις αναφερόμενες συσκευές)

| ΣΥΣΚΕΥΗ | E (V/m) | P ($\mu\text{W}/\text{cm}^2$) |
|--|----------|---------------------------------|
| Κινητό τηλέφωνο σε λειτουργία συνομιλίας (συχν. 1 GHz) | 40 | άνω των 1999 |
| Οθόνη Η/Υ (CRT) 15'' | 8 | 12 |
| Μετασχηματιστής 220 V / 40W , 50 Hz (ενεργοποίηση PEAK) | 35 | 450 |
| Ένδειξη στον αέρα σε περιβάλλον κοινού δωματίου σπιτιού στην Αθήνα (χωρίς ενεργοποίηση PEAK) | 0.2 | Κατω απο 0.1 |