ΣΧΟΛΗ. Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ και ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΜΕΡΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ, ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ και ΑΣΚΗΣΕΙΣ στα ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1 , 2

Δρ. Α. Μαγουλάς

Φεβρουάριος 2015

Μερικά σχόλια – παρατηρήσεις για το πεδίο ροής συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος μέσα σε αγωγούς

Στη σελ 31 του εγχειριδίου του μαθήματος αναφέρεται το πεδίο ροής συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος μέσα σε αγωγούς. Αυτό αποκαλείται από πολλούς συγγραφείς και «Μόνιμο πεδίο ροής ηλεκτρικού ρεύματος»

Δίνουμε εδώ μια πιο αναλυτική εξήγηση:

- Μόνιμη (ή σταθερή) κατάσταση λέγεται μια κατάσταση όταν σ' αυτήν ισχύουν οι ακόλουθες 2 συνθήκες **(i)** και **(ii)**

(i) Όλα τα φυσικά μεγέθη που σχετίζονται μ΄ αυτή παραμένουν **<u>αμετάβλητα</u>** συναρτήσει του χρόνου

(ii) Για την διατήρηση της «μονιμότητας» αυτής απαιτείται **<u>διαρκής παροχή ενέργειας</u>** , από τον εξωτερικό κόσμο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για την ύπαρξη ενός στατικού ηλεκτρικού πεδίου **δεν** απαιτείται διαρκής παροχή ενέργειας.
Ποια είναι η διαφορά μεταξύ ενός μόνιμου πεδίου ροής ηλεκτρικού ρεύματος και ενός στατικού ηλεκτρικού πεδίου;
Απάντηση: Στο μόνιμο πεδίου ροής ηλεκτρικού ρεύματος έχουμε κίνηση ηλεκτρικών φορτίων αλλά με την αυστηρή παραδοχή

$$\mathbf{u}_{\text{φορτίων}} = \textbf{σταθερή}$$

Αυτή η κίνηση ηλεκτρικών φορτίων δημιουργεί ακριβώς το συνεχές (χρονικά σταθερό) ηλεκτρικό ρεύμα.
Η κατάσταση αυτή δεν μπορεί να συμβεί σε ένα στατικό ηλεκτρικό πεδίο (εξαιρούνται εδώ <u>μεταβατικά φαινόμενα</u> σε στατικά πεδία όπως π.χ. οι γνωστοί μας κεραυνοί!)

Το μόνιμο πεδίο ροής ηλεκτρικού ρεύματος είναι συνδεδεμένο άρρηκτα με τα γνωστά μας κυκλώματα συνεχούς ρεύματος.

Προσέξτε και τον ακόλουθο συλλογισμό:

- Σε ένα κύκλωμα συνεχούς ρεύματος μπορούμε κάλλιστα να έχουμε απώλειες θερμότητας (Joule) σε κάποιο τμήμα του. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να λαμβάνουμε από κάπου, διαρκώς, ενέργεια (ηλεκτρική) που να μετατρέπεται σε θερμική.
Από που λαμβάνεται αυτή η ηλεκτρική ενέργεια;
Απάντηση: από τις ηλεκτρικές πηγές του κυκλώματος (πηγές συνεχούς (σταθερού) ρεύματος)
Υπενθυμίζεται η θεμελειώδης σχέση που ισχύει στο μόνιμο πεδίο ροής συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος σε αγωγούς

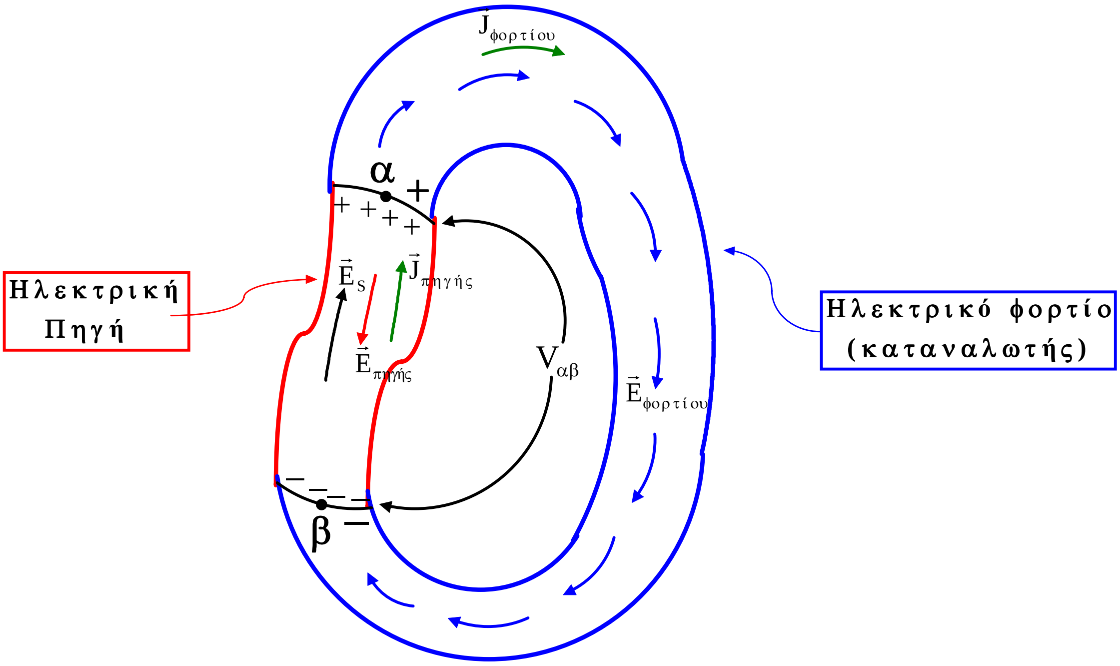
$$\vec{J} = \gamma\, \vec{E}$$

(Νόμος του Ohm σε πεδιακή μορφή)

Η σχέση αυτή συνδέει <u>σε κάθε σημείο του αγωγού</u> το αίτιο (πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$) με το αποτέλεσμα (πυκνότητα ρεύματος $\vec{\mathbf{J}}$) , γ η ειδική αγωγιμότητα του μέσου.

Μερικά σχόλια – παρατηρήσεις για ένα απλό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος (πηγή - φορτίο) . Το κύκλωμα εξετάζεται από «πεδιακή» άποψη. Δίνεται ένας γενικότερος ορισμός της Η.Ε.Δ.

Έστω ένα απλό ηλεκτρικό κύκλωμα που αποτελείται από μια ηλεκτρική πηγή και ένα φορτίο (καταναλωτή)



$\vec{E}_s$: ηλεκτροδιαχωριστική πεδιακή ένταση μέσα στην πηγή

$\vec{E}_{πηγής}$: ηλεκτρική πεδιακή ένταση μέσα στην πηγή

$\vec{E}_{φορτίου}$: ηλεκτρική πεδιακή ένταση μέσα στο φορτίο

$\vec{J}_{πηγής}$: πυκνότητα ρεύματος μέσα στην πηγή

$\vec{J}_{φορτίου}$: πυκνότητα ρεύματος μέσα στο φορτίο

(β - α) : όρια πηγής - φορτίου

Στον χώρο της πηγής ο Νόμος του Ohm γράφεται:

$$\vec{J}_{πηγής} = \gamma_{πηγής} \, (\vec{E}_S + \vec{E}_{πηγής})$$

όπου $\gamma_{πηγής}$ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού της πηγής

Στον χώρο του φορτίου αντίστοιχα:

$$\vec{J}_{φορτίου} = \gamma_{φορτίου} \; \vec{E}_{φορτίου}$$

όπου $\gamma_{φορτίου}$ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού του φορτίου

Η ηλεκτρική τάση $V_{\alpha\beta}$ μπορεί να υπολογιστεί από δύο διαφορετικούς δρόμους

- μέσω της πηγής $$\mathbf{V_{\alpha\beta}} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma} \cdot d\vec{\ell}$$

- μέσω του φορτίου $$\mathbf{V_{\alpha\beta}} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\varphi o\rho\tau\acute{\iota}o\upsilon} \cdot d\vec{\ell}$$

ισοδύναμοι ορισμοί

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\varphi o\rho\tau\acute{\iota}o\upsilon} \cdot d\vec{\ell}$$

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη (Η.Ε.Δ.) της πηγής θα είναι:

ΗΕΔ πηγής $$e_{\beta\alpha} = \int_{\beta}^{\alpha} \vec{E}_S \cdot d\vec{\ell}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ ΤΩΡΑ!</u>

Αν υπολογίσουμε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε μια <u>κλειστή διαδρομή</u> (πηγή - φορτίο) και πάρουμε ως ολοκληρωτέα συνάρτηση το <u>συνολικό αίτιο που προκαλεί κίνηση ηλεκτρικών φορτίων</u> δηλαδή:

μέσα στην πηγή: $\vec{E}_S + \vec{E}_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma}$

μέσα στο φορτίο: $\vec{E}_{\varphi o\rho\tau\acute{\iota}o\upsilon}$

θα έχουμε:

$$\oint \vec{E}_{o\lambda\iota\kappa\acute{o}} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\beta}^{\alpha} (\vec{E}_S + \vec{E}_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma}) \cdot d\vec{\ell} + \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\varphi o\rho\tau\acute{\iota}o\upsilon} \cdot d\vec{\ell} =$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} \vec{E}_S \cdot d\vec{\ell} + \int_{\beta}^{\alpha} \vec{E}_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\varphi o\rho\tau\acute{\iota}o\upsilon} \cdot d\vec{\ell} =$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} \vec{E}_S \cdot d\vec{\ell} - \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\varphi o\rho\tau\acute{\iota}o\upsilon} \cdot d\vec{\ell}$$

Προσοχή άλλαξαν τα όρια
από (β → α) έγιναν (α → β)

αλλά όπως δείξαμε ισχύει: $$\int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\varphi o\rho\tau\acute{\iota}o\upsilon} \cdot d\vec{\ell}$$

δηλαδή: $$-\int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_{\varphi o\rho\tau\acute{\iota}o\upsilon} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Συνεπώς: $$\oint \vec{E}_{o\lambda\iota\kappa\acute{o}} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\beta}^{\alpha} \vec{E}_S \cdot d\vec{\ell} = e_{\beta\alpha}$$

άρα:

Η Η.Ε.Δ. του κυκλώματος μπορεί να οριστεί ως η τιμή ενός επικαμπυλίου ολοκληρώματος σε μια **κλειστή** διαδρομή που περιλαμβάνει πηγή και φορτίο.

ΠΡΟΣΟΧΗ ΟΜΩΣ!
Ως ολοκληρωτέα διανυσματική συνάρτηση λαμβάνεται η **συνολική ένταση πεδίου** που προκαλεί κίνηση ηλεκτρικών φορτίων

δηλαδή:

- Ηλεκτροδιαχωριστική πεδιακή ένταση $\vec{E}_S$ (μόνο στην περιοχή της πηγής)

- Ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\vec{E}$ (στις περιοχές πηγής και φορτίου)

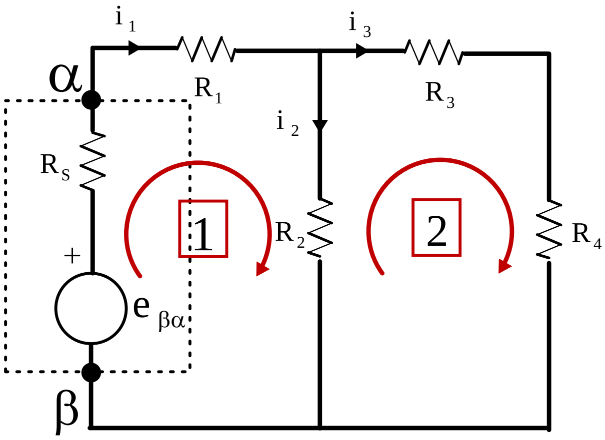
Η σχέση
$$\oint \vec{E}_{\text{ολικό}} \cdot d\vec{\ell} = e_{\beta\alpha}$$

αποτελεί γενική διατύπωση (πεδιακή) του Νόμου Τάσεων Kirchhoff σε βρόχους που περιέχουν ηλεκτρικές πηγές.
Αν ο βρόχος **δεν περιέχει** ηλεκτρικές πηγές τότε προφανώς ισχύει:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

(δεν γράψαμε $\vec{E}_{\text{ολικό}}$ εδώ αλλά απλά $\vec{E}$ διότι όταν δεν υπάρχει πηγή δεν υπάρχει $\vec{E}_S$ αλλά μόνον $\vec{E}$)

<u>Ένα απλό παράδειγμα:</u>



βρόχος 1: (έχει πηγή)
$$\underbrace{i_1 R_S + i_1 R_1 + i_2 R_2}_{\text{πτώσεις τάσεως}} = \underbrace{e_{\beta\alpha}}_{\text{ανύψωση τάσεως}}$$

βρόχος 2: (δεν έχει πηγή)
$$\underbrace{i_3 R_3 + i_3 R_4 - i_2 R_2}_{\text{πτώσεις τάσεως}} = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Σε ένα ηλεκτρικό καλώδιο διατομής S = 1.5 mm^2 διέρχεται ρεύμα με ένταση i = 2 A. Αν η ειδική αγωγιμότητα του αγωγού είναι γ = 0.6 x 10^8 (Ω m)$^{-1}$, υπολογίστε την τιμή του μέτρου της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στο αγώγιμο υλικό του καλωδίου.

Απ/ Κάνουμε χρήση της σχέσης:

$$\vec{J} = \gamma\, \vec{E}$$

ή $J = \gamma\, E$ (λαμβάνοντας τα μέτρα των διανυσμάτων)

όπου:

$$J = \frac{i}{S} = \frac{2\ A}{1.5\ mm^2} = \frac{2\ A}{1.5\times 10^{-6}\ m^2} = 1.333\times 10^6\ \ A/m^2$$

άρα:

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{1.333\times 10^6\ \ A/m^2}{0.6\times 10^8\ \ (\ \Omega\ m\ )^{-1}} \Rightarrow E = 0.0222\ \frac{V}{m} = 22.2\ \ \frac{mV}{m}$$

Η τιμή που προέκυψε για το Ε είναι πάρα πολύ μικρή! Έτσι συμβαίνει πάντοτε στα καλώδια

2) Σε ένα ηλεκτρικό καλώδιο ρέει ηλεκτρικό ρεύμα με ένταση i = 40 A. Η ταχύτητα κίνησης των φορτίων είναι u = 0.5 mm/sec. Υπολογίστε την γραμμική πυκνότητα του κινουμένου φορτίου.

Απ/ Ισχύει η σχέση:

$$i = \lambda\, u$$

άρα:

$$\lambda = \frac{i}{u} = \frac{4\ \ A}{0.5\ \ mm/sec} = \frac{4\ \ Cb/sec}{0.5\times 10^{-3}\ \ m/sec} \Rightarrow \lambda = 8\times 10^3\ \ \frac{Cb}{m}$$

<u>**Παρατήρηση:**</u> (πρακτικός υπολογισμός)
Αν υποθέσουμε ότι το καλώδιο έχει διατομή S = 2.5 mm^2, τότε μήκος L = 1 m του καλωδίου έχει όγκο $V = L\ S = 1\,m\times 2.5\ mm^2 = 2.5\times 10^{-6}\ m^3$

Η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ θα είναι:

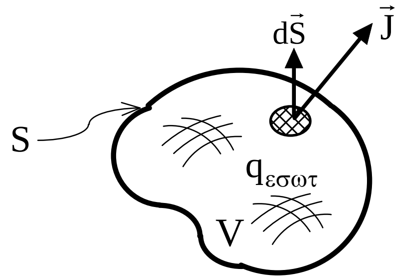
$$\rho = \frac{\text{κινουμενο φορτιο σε μηκος } 1\,m}{\text{ογκος καλωδίου μηκους } 1\,m} = \frac{8\times 10^3\ Cb}{2.5\times 10^{-6}\ m^3} \Rightarrow \rho = 0.32\times 10^{10}\ \ \frac{Cb}{m^3}$$

και θεωρώντας το φορτίο ενός ηλεκτρονίου $q_e = 1.6\times 10^{-19}\ Cb$
προκύπτει η πυκνότητα φορέων (ελευθ. ηλ/νίων) ανά μονάδα όγκου n_e :

$$n_e = \frac{\rho}{q_e} = \frac{0.32\times 10^{10}\ \ Cb/m^3}{1.6\times 10^{-19}\ \ Cb} = 2\times 10^{28}\ \frac{\eta\lambda/\nu\iota\alpha}{m^3}$$

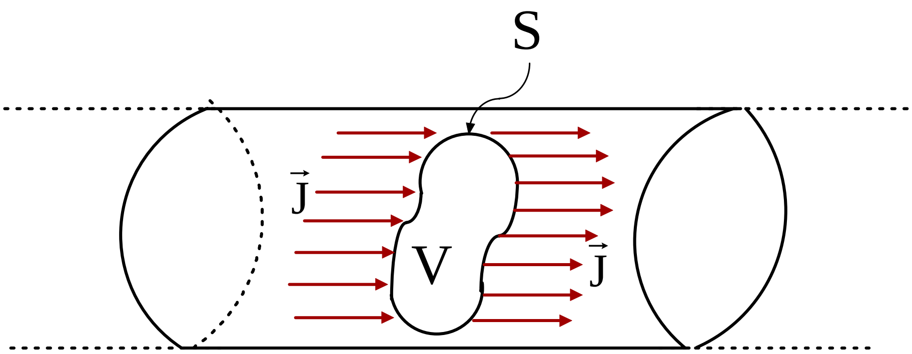
3) Διατυπώστε, με απλούς συλλογισμούς, το νόμο διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου στο εσωτερικό ενός αγωγού που διαρρέεται από συνεχές (χρονικά σταθερό) ρεύμα.

Απ/
Ο νόμος διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου γράφεται:



$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV$$

Έστω ένας αγωγός, διαρρεόμενος από σταθερό ρεύμα, μέσα στον οποίο υπάρχει ο όγκος V, με εξωτερική επιφάνεια S.



Το ρεύμα είναι χρονικά σταθερό, έχουμε μόνιμο πεδίο ροής , και αυτό σημαίνει ότι **όλα τα φυσικά μεγέθη είναι ανεξάρτητα του χρόνου.** Δηλαδή κάθε χρονική παράγωγος έχει μηδενική τιμή
Άρα:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = 0$$

συνεπώς:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

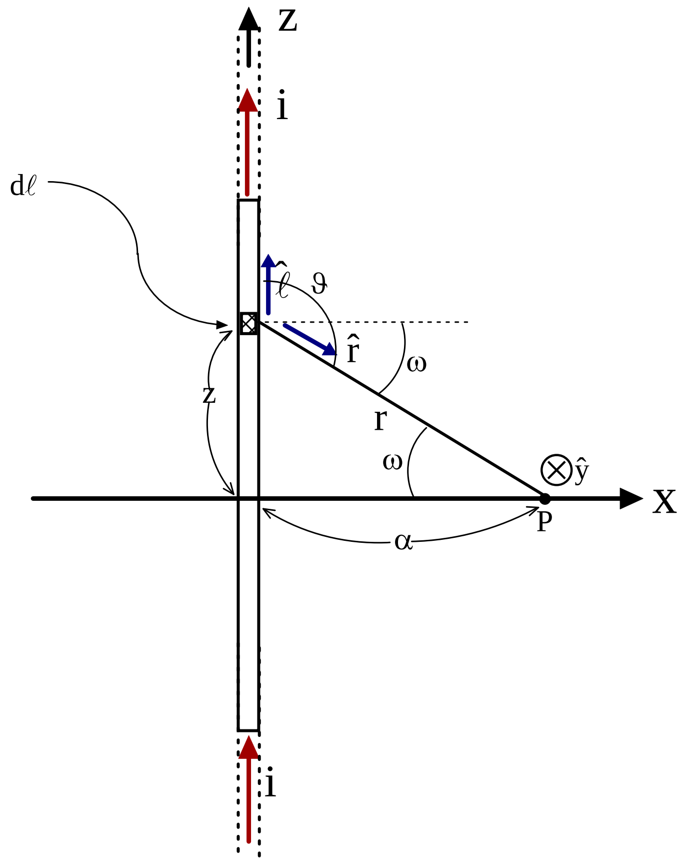
(όσες δυναμικές γραμμές του $\vec{J}$ «μπαίνουν» διαπερνώντας την επιφάνεια S τόσες ακριβώς και «βγαίνουν»)

Είναι ο γνωστός από τη θεωρία κυκλωμάτων Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff, εδώ διατυπωμένος σε «πεδιακή» μορφή.

4) Με χρήση του νόμου Biot – Savart υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$ που δημιουργεί ευθύγραμμος αγωγός, απείρου μήκους, που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα i.

Απ/

Η γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Ο αγωγός ταυτίζεται με τον άξονα z. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο P επί του άξονα x, με x = α.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ο άξονας x και ο άξονας y, μπορούν να περιστρέφονται περί τον άξονα z χωρίς να αλλάζουν τα συμπεράσματα που θα βγούν. Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο είναι ανεξάρτητο της γωνίας φ, ή διαφορετικά έχει το ίδιο **μέτρο** σε όλα τα σημεία μιας περιφέρειας, με ακτίνα α, επί του επιπέδου x-y.

Το στοιχειώδες πεδίο $d\vec{H}$ στο σημείο P θα είναι:

$$d\vec{H}\,(P) = \frac{1}{4\pi}\, i\, \frac{\hat{\ell}\times\hat{r}}{r^2}\, d\ell \qquad (1)$$

άρα
$$\vec{H}\,(P) = \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\ell}\times\hat{r}}{r^2}\, d\ell \qquad (2)$$

όπου $d\ell = dz$ και $\hat{\ell}\times\hat{r} = \hat{z}\times\hat{r} = \hat{y}\,\sin\vartheta$

Παρατηρούμε ότι $\omega = \vartheta - \dfrac{\pi}{2}$

επίσης ισχύει $\tan\omega = \dfrac{z}{\alpha} \Rightarrow z = \alpha\,\tan\omega$, $d\ell = dz = \alpha\dfrac{d}{d\omega}\tan\omega\, d\omega = \alpha\,\dfrac{1}{\cos^2\omega}\,d\omega$ (3)

ακόμη
$$\cos\omega = \frac{\alpha}{r} \Rightarrow r = \frac{\alpha}{\cos\omega} \qquad (4)$$

όταν το $d\ell = dz$ μεταβάλλεται από $-\infty$ έως $+\infty$ το ω μεταβάλλεται από $-\dfrac{\pi}{2}$ έως $+\dfrac{\pi}{2}$

Από τις σχέσεις (2) , (3) και (4) προκύπτει:

$$\vec{H}(P) = \frac{i}{4\pi}\hat{y}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta \dfrac{\alpha}{\cos^2\omega}}{\dfrac{\alpha^2}{\cos^2\omega}}\, d\omega = \frac{i}{4\pi}\hat{y}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta}{\alpha}\, d\omega$$

όπου $$\sin\vartheta = \sin\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\omega$$

άρα τελικά

$$\vec{H}(P) = \frac{i}{4\pi\alpha}\hat{y}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\omega\, d\omega = \frac{i}{4\pi\alpha}\hat{y}\ {}_{-\pi/2}^{\pi/2}[\sin\omega] = \frac{i}{4\pi\alpha}\hat{y}\ [1-(-1)] = \frac{i}{2\pi\alpha}\hat{y}$$

Άρα λοιπόν:

Το μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$ που δημιουργεί ευθύγραμμος αγωγός, απείρου μήκους και ταυτιζόμενος με τον άξονα z :

- Είναι ανεξάρτητο από το z (προφανώς λόγω του απείρου μήκους)
- Το διάνυσμα $\vec{H}$ είναι πάντοτε παράλληλο στο επίπεδο x- y
- Έχει το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία μιας περιφέρειας, που βρίσκεται σε επίπεδο παράλληλο με το x – y επίπεδο, και από το κέντρο της διέρχεται (κάθετα) ο αγωγός.

Αν η περιφέρεια αυτή έχει ακτίνα α, τότε :

το διάνυσμα $\vec{H}$ έχει την φορά της εφαπτομένης στην περιφέρεια (δηλ φ- συνιστώσα σε πολικές συντεταγμένες) και μέτρο $H = i / 2\pi\alpha$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές του πεδίου και τα διανύσματα $\vec{H}$ σε διάφορα σημεία