ΣΧΟΛΗ. Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ και ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

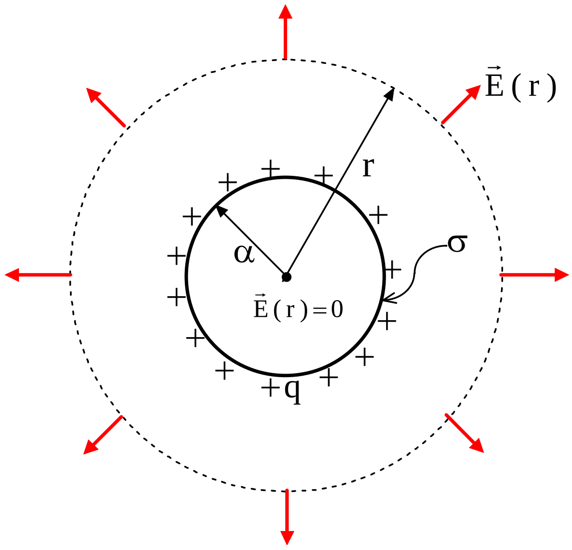
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ στο ΚΕΦ. 4

Δρ. Α. Μαγουλάς

Νοέμβριος 2015

1) Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια τέλεια αγώγιμη κοίλη σφαίρα ακτίνας α, φορτισμένη με φορτίο +q, κατανεμημένο ομοιόμορφα στην επιφάνεια της σφαίρας.

Λύση:
Έχουμε τη διάταξη



Είναι προφανές ότι, λόγω της ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου, το πεδίο θα παρουσιάζει πλήρη σφαιρική συμμετρία, όπως ακριβώς το πεδίο ενός σημειακού φορτίου.
Μπορούμε να γράψουμε για την επιφανειακή πυκνότητα **σ** του φορτίου στην επιφάνεια της σφαίρας:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi\alpha^2}$$

- Στο εξωτερικό της σφαίρας (r > α)
Επιλέγουμε μια σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα $r > \alpha$ και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss:

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = q_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = q$$

άρα $$4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r) = q \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

παρατηρούμε ότι η έκφραση αυτή είναι ακριβώς η ίδια με την έκφραση που δίνει το ηλεκτρικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου. Άρα το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας $r > \alpha$ είναι ακριβώς το ίδιο με το πεδίο ενός σημειακού φορτίου q τοποθετημένου στο κέντρο της σφαίρας.

- Στο εσωτερικό της σφαίρας (r < α)
Επιλέγουμε και πάλι μια σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα $r < \alpha$ και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss:

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = q_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = 0$$

και λόγω της συμμετρίας εύκολα φαίνεται ότι $\vec{D} = 0$ άρα και $\vec{E} = 0$ στο εσωτερικό της σφαίρας

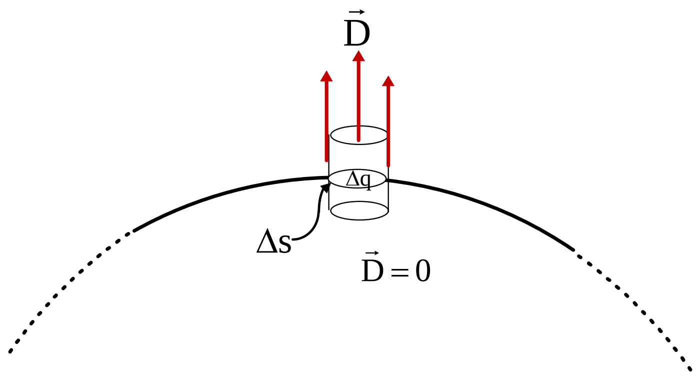
Επομένως το ηλ. πεδίο θα είναι

$$r < \alpha \qquad \vec{E}(r) = 0$$

$$r > \alpha \qquad \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\, \varepsilon_0\, r^2}\,\hat{r}$$

Προκύπτει ότι για r = α (επιφάνεια σφαίρας) έχουμε: $\vec{E}(\alpha) = \dfrac{q}{4\pi\, \varepsilon_0\, \alpha^2}\,\hat{r} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{r}$

Θα επαληθεύσουμε παρακάτω αυτό το αποτέλεσμα...
Έχουμε την επιφάνεια της σφαίρας και επιλέγουμε ένα μικρό στοιχείο εμβαδού ΔS



Στο στοιχείο ΔS προφανώς θα υπάρχει φορτίο $\Delta q = \sigma\, \Delta S$
Θεωρούμε ένα μικρό κύλινδρο με εμβαδόν βάσης ΔS και απειροστά μικρό ύψος. Ο κύλινδρος είναι τοποθετημένος κάθετα στην σφαιρική επιφάνεια, και ο μισός βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας, ο άλλος μισός στο εξωτερικό.
Προφανώς το διάνυσμα $\vec{D} = \varepsilon_0\, \vec{E}$ θα είναι κάθετο στην επιφάνεια της σφαίρας, άρα κάθετο και στις βάσεις του κυλίνδρου.
Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss στον όγκο του κυλίνδρου

$$\oiint_{\substack{\text{επιφαν.}\\ \text{κυλίνδρου}}} \vec{D}\cdot d\vec{s} = q_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = \Delta q = \sigma\, \Delta s$$

αλλά εύκολα φαίνεται ότι στο ολοκλήρωμα $\oiint_{\substack{\text{επιφαν.}\\ \text{κυλίνδρου}}} \vec{D}\cdot d\vec{s}$ (ηλεκτρική ροή) έχουμε συμβολή

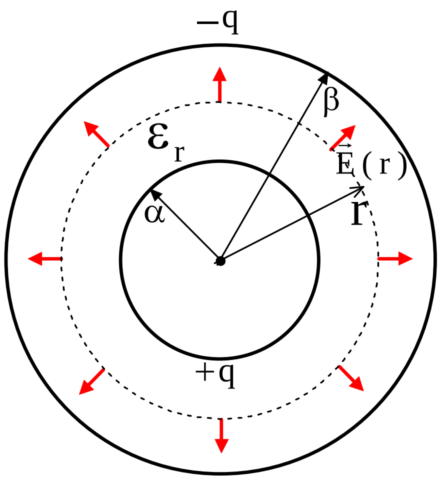
του $\vec{D}$ μόνο στην άνω βάση του κυλίνδρου, διότι στην κάτω βάση (εσωτερικό σφαίρας) ισχύει $\vec{D} = 0$ και επίσης το $\vec{D}$ είναι παράλληλο με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, άρα δεν υπάρχει συμβολή από την παράπλευρη επιφάνεια. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\oiint_{\substack{\text{επιφαν.}\\ \text{κυλίνδρου}}} \vec{D}\cdot d\vec{s} = D(\alpha)\,\Delta s = \sigma\, \Delta s \qquad \text{άρα} \qquad D(\alpha) = \sigma$$

Επομένως $$\vec{E}(\alpha) = \frac{\vec{D}(\alpha)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\alpha^2}\,\hat{r}$$

Δηλ. η ίδια σχέση που βρήκαμε και πριν.

2) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα ενός σφαιρικού πυκνωτή. Ο πυκνωτής αποτελείται από δύο ομόκεντρες σφαίρες με ακτίνες α και β.



Υποθέτουμε ότι η εσωτερική σφαίρα, ακτίνας α, φέρει φορτίο +q , και η εξωτερική σφαίρα ακτίνας β, φέρει φορτίο – q.
Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των δύο σφαιρών θα έχει προφανώς σφαιρική συμμετρία και σε μία απόσταση r από το κέντρο των σφαιρών, όπου α < r < β, θα δίνεται από την έκφραση (σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση)

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad \alpha < r < \beta$$

Υπολογίζουμε τη διαφορά δυναμικού $V_{\alpha\beta}$ μεταξύ των δύο ομοκέντρων σφαιρών δηλ. των δύο οπλισμών του πυκνωτή.

$$V_{\alpha\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

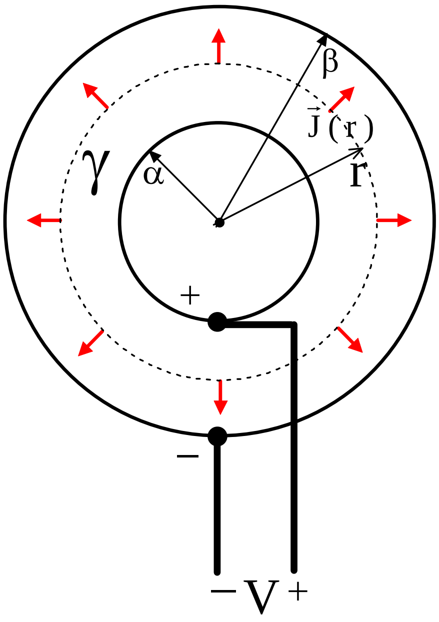
άρα
$$V_{\alpha\beta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)$$

Επομένως η χωρητικότητα C θα είναι:

$$C = \frac{q}{V_{\alpha\beta}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}$$

3) Δυο ομόκεντρα σφαιρικά τέλεια αγώγιμα κελύφη με ακτίνες α και β διαχωρίζονται με αγώγιμο υλικό με ειδική αγωγιμότητα γ. Έστω ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο κελυφών είναι V = σταθ. Ζητείται να υπολογίσετε:

1) **Την ένταση του ρεύματος i που ρέει από το ένα κέλυφος στο άλλο**
2) **Την ωμική αντίσταση R μεταξύ των δύο κελυφών**



Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας και της σχέσεως $\vec{J} = \gamma\,\vec{E}$ το διάνυσμα $\vec{J}$ της χωρικής πυκνότητας ρεύματος, θα έχει ακριβώς την ίδια «κατανομή» στο χώρο με το $\vec{E}$.

Σε μια σφαίρα ακτίνας r , όπου α < r < β, το $\vec{J}$ θα γράφεται:

$$\vec{J}(r) = \frac{i}{4\pi r^2}\,\hat{r} \qquad \alpha < r < \beta$$

όπου i η ένταση του ρεύματος που διέρχεται από την σφαιρική επιφάνεια

και επειδή $$\vec{E}(r) = \frac{1}{\gamma}\vec{J}(r) = \frac{i}{4\pi r^2 \gamma}\,\hat{r}$$

μπορούμε να γράψουμε για την τάση V:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{i}{4\pi\gamma\, r^2}\,dr = \frac{i}{4\pi\gamma}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dr}{r^2} = \frac{i}{4\pi\gamma}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

άρα $$V = \frac{i}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$$

συνεπώς $$i = \frac{V\,4\pi\,\gamma}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}$$

και $$R = \frac{V}{i} = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$$