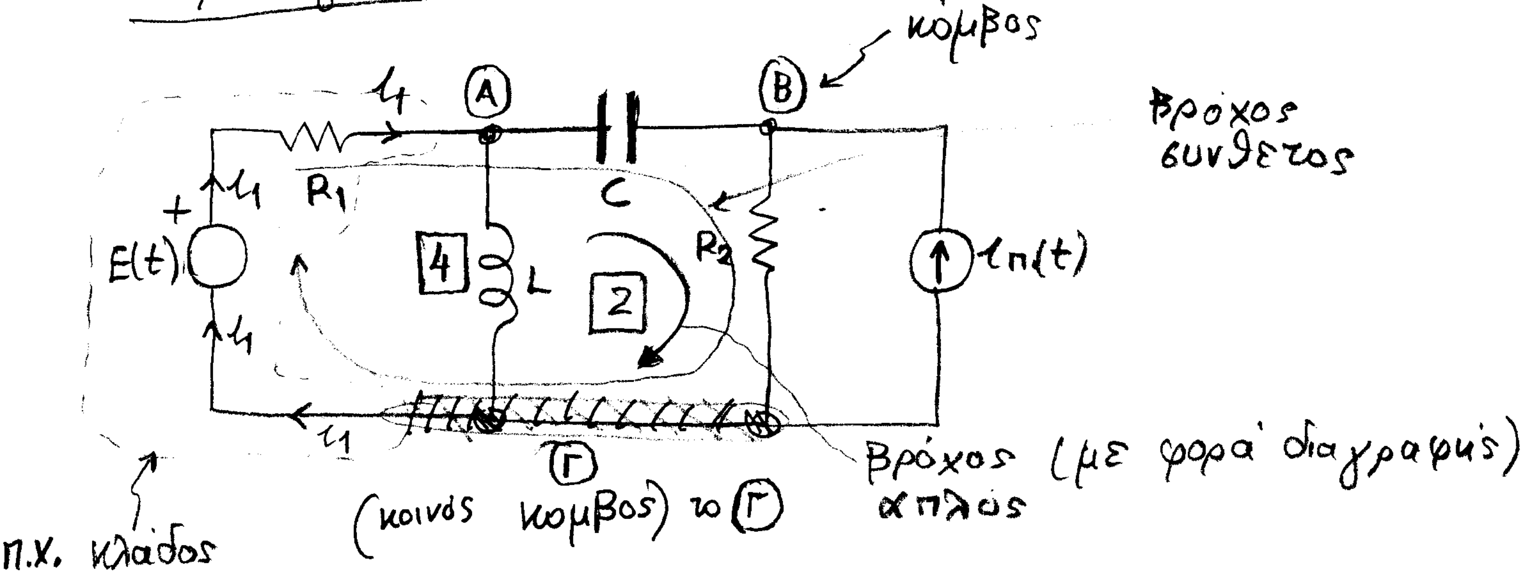
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ή ΔΙΚΤΥΟ

6.1 Βασικοί ορισμοί

Είναι σύνολο ηλεκτρ. στοιχείων (R, L, C + πηγές) συνδεδεμένων μεταξύ τους με διάφορους τρόπους, που εκτελεί κάποια λειτουργία

Παράδειγμα (πχ κυκλώματος)



Κλάδος → σύνολο από ένα ή περισσότερα ηλεκτρικά στοιχεία συνδεδεμένα σε σειρά και διαρρεόμενα από το ΙΔΙΟ ρεύμα (π.χ ο κλάδος του σχήματος)

Κόμβος → σημείο ένωσης 3 ή περισσοτέρων κλάδων πχ τα σημεία (A), (B), (Γ) στο σχήμα

Βρόχος → κλειστή διαδρομή από κλάδους.
π.χ ο βρόχος $\boxed{2}$ αποτελούμενος από τα στοιχεία L, C, R_2

- απλός βρόχος, δεν περιλαμβάνει εσωτερικό κλάδο (όπως π.χ. ο $\boxed{2}$)

οι απλοί βρόχοι λέγονται και οφθαλμοί

- σύνθετος βρόχος, περιλαμβάνει εσωτερικά κλάδο (όπως π.χ ο $\boxed{4}$)

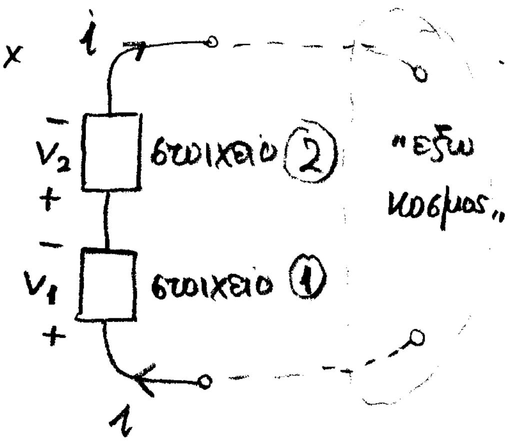
Ο σύνθετος βρόχος $\boxed{4}$ αποτελείται από τα στοιχεία

$E(t)$, R_1, C, R_2 και έχει (εσωτερικά) το στοιχείο L

εδώ να θυμίσουμε τις έννοιες "εν σειρά" σύνδεση και "παράλληλη" σύνδεση διαφόρων ηλ. στοιχείων

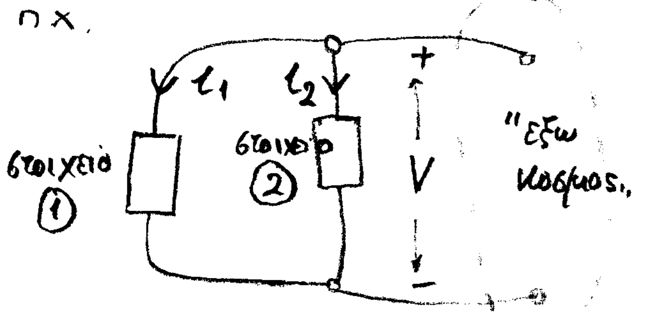
Εν σειρά σύνδεση → κοινό ρεύμα i (διαφορετικές τάσεις στα άκρα κάθε στοιχείου)

π.χ



Παράλληλη σύνδεση → κοινή τάση V (διαφορετικά ρεύματα διαρρέουν το κάθε στοιχείο)

π.χ.



Π.χ στο κύκλωμα που φαίνεται στη σελίδα 49

- τα στοιχεία $E(t)$ και R_1 είναι συνδεδεμένα εν σειρά

  οι συνδυασμός $E(t)-R_1$ είναι παράλληλα συνδεδεμένος με το πηνίο L

- η R_2 είναι παράλληλα συνδεδεμένη με την πηγή ρεύματος $i_n(t)$

Ερώτηση:

- Πώς είναι συνδεδεμένη η R_2 με τον πυκνωτή C;

Απ/ ούτε εν σειρά ούτε παράλληλα

δηλαδή τα στοιχεία R_2 και C ΔΕΝ έχουν ούτε κοινό ρεύμα ούτε κοινή τάση!

Όμοια τό L και το C δεν είναι συνδεδεμένα ούτε εν σειρά ούτε παράλληλα

6.2) Νόμοι Kirchhoff

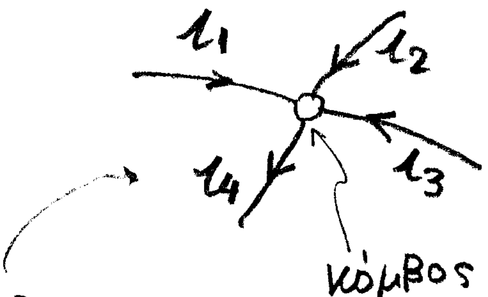
Οι δύο Νόμοι του Kirchhoff δηλαδή

- α) ο Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff (Ν.Ρ.Κ.)
- β) ο Νόμος Τάσεων Kirchhoff (Ν.Τ.Κ.)

αποτελούν τα "εργαλεία" για την επίλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων (ή δικτύων)

Οι δύο αυτοί Νόμοι προέρχονται από βασικές αρχές της Θεωρίας πεδίων, ειδικά προσαρμοσμένες για τα ηλ. κυκλώματα

6.2.1) Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff



εδώ $i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0$

Σε κάθε κόμβο ενός κυκλώματος το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που προέρχονται ή απέρχονται είναι ίσο με μηδέν

$$\sum_k i_k = 0 \quad (\text{σε κάθε κόμβο})$$

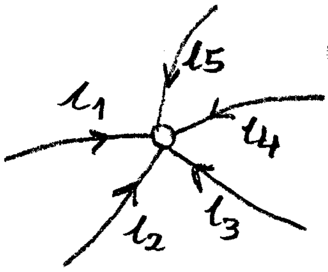
ΠΡΟΣΟΧΗ

Τα ρεύματα που φθάνουν (προσέρχονται) στον κόμβο έχουν πάντα αντίθετο πρόσημο από τα ρεύματα που φεύγουν (απέρχονται) από τον κόμβο

π.χ. - προσερχόμενα ρεύματα → πρόσημο (+)
- απερχόμενα ρεύματα → πρόσημο (−)

(ή αντίθετα – δεν έχει σημασία!)

Επίσης στην παρακάτω κατάσταση **ΔΕΝ** υπάρχει λάθος

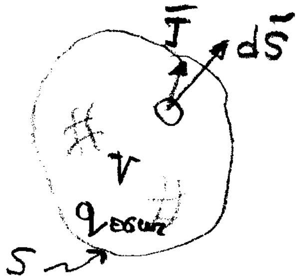


N.P.K $\quad i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$

(όλα τα ρεύματα προσέρχονται)

Προφανώς κάποιο (ή κάποια) από τα $i_1, i_2, \dots, i_5$ θα είναι αρνητικά

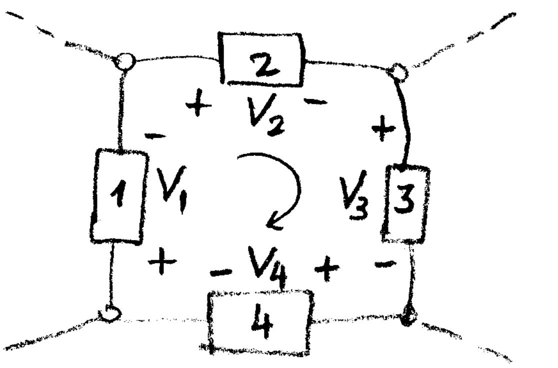
Ο Ν.Ρ.Κ. εκφράζει την αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου



$$\oiint \bar{J}\cdot d\bar{S} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dV$$

$$= -\frac{d}{dt} q_{εσωτ}$$

6.2.2) Νόμος Τάσεων Kirchhoff



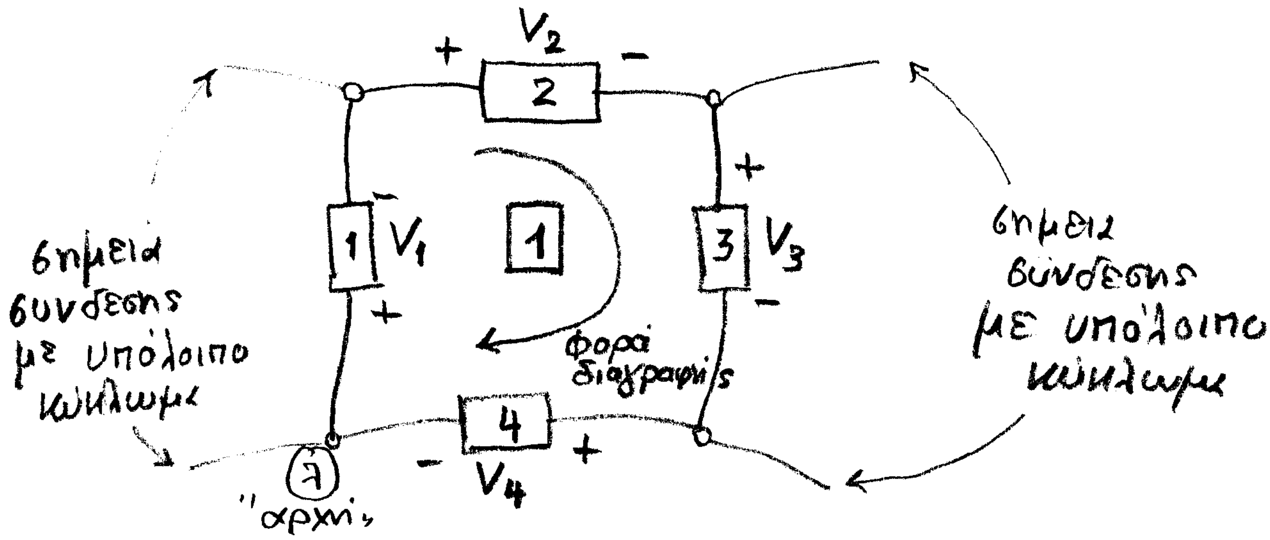
Σε κάθε βρόχο το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων των διαφόρων ηλ. στοιχείων είναι ίσο με το μηδέν

$$\sum_k V_k = 0 \quad (\text{σε κάθε βρόχο})$$

π.χ. $\quad V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$

ακολουθούν παρατηρήσεις εφαρμογής του Ν.Τ.Κ.

Έστω ο βρόχος $\boxed{1}$ που αποτελείται από 4 ηλ. στοιχεία



- Στον βρόχο τίθεται αυθαίρετα μια φορά διαγραφής έτσι ↻ ή ↺ έτσι

(προτιμάται συνήθως η "ωρολογιακή" φορά ↻)

- Σε κάθε στοιχείο έχει τεθεί αυθαίρετα η φορά αναφοράς της τάσης στα άκρα του

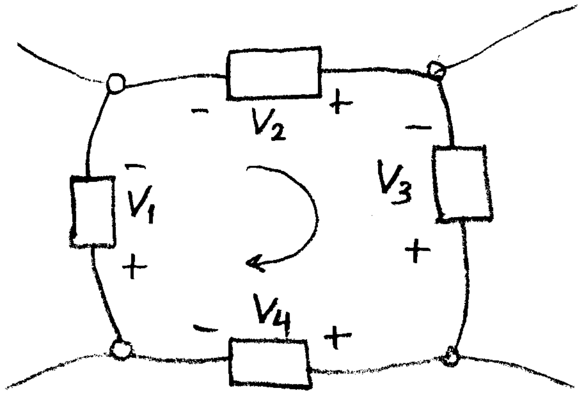
- Ξεκινάμε από ένα σημείο του βρόχου π.χ το (λ) και κινούμενοι γύρω-γύρω διαγράφουμε όλο τον βρόχο και επιστρέφουμε εκεί όπου ξεκινήσαμε!

- Αν σε ένα ηλ. στοιχείο συναντήσουμε πρώτα το (+) και μετά το (−) τότε η τάση V στα άκρα του λαμβάνεται με θετικό πρόσημο, αλλοιώς με αρνητικό

Έτσι στο παραπάνω σχήμα θα έχουμε:

αρχή από το (λ) → $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$

Αν όμως είχαμε τις παρακάτω φ.α. τάσεων



θα γράφαμε τον Ν.Τ.Κ. ως εξής

$$V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0$$

Ο Ν.Τ.Κ. εκφράζει το <u>αστρόβιλο του ηλεκτροστατικού πεδίου</u>

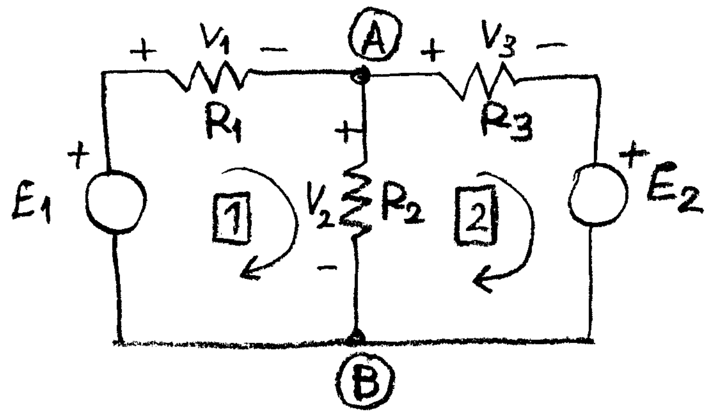
$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = 0$$

αλλά χρειάζεται <u>προσοχή</u> όταν στον βρόχο υπάρχουν ηλ. πηγές (δηλ. ΗΕΔ)

(Αυτό το θέμα δεν απασχολεί <u>άμεσα</u> την θεωρία κυκλωμάτων)

Παράδειγμα

Έστω το απλό ηλ. κύκλωμα του σχήματος



εφαρμόστε τον Ν.Τ.Κ. στους απλούς βρόχους $\boxed{1}$ και $\boxed{2}$

Ν.Τ.Κ. $\boxed{1}$ $-E_1 + V_1 + V_2 = 0$

Ν.Τ.Κ $\boxed{2}$ $-V_2 + V_3 + E_2 = 0$

<u>Σημείωση</u>: Οι πηγές E_1 και E_2 έχουν "από μόνες τους" θέση το (+) στο ένα άκρο τους. Στις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 η τοποθέτηση των φ.α. των V_1, V_2, V_3 έχει γίνει από εμάς <u>αυθαίρετα</u>

2h
23/10

6.3) Το Πρόβλημα Αναλύσεως Δικτύου (Π.Α.Δ.)

- Αποτελεί το κεντρικό πρόβλημα στη βασική θεωρία κυκλωμάτων

Τίθεται ως εξής:

- Δίδεται ένα ηλ. κύκλωμα (δίκτυο) δηλαδή:
  - Τα ηλ. στοιχεία (R, L, C) από τα οποία αποτελείται τι τιμές έχουν, και πώς είναι συνδεδεμένα
  - Επίσης αν κάποιο (ή κάποια) από τα στοιχεία μπορεί να αποθηκεύσει ενέργεια (π.χ. L, C) πόση είναι αυτή η αποθηκευμένη ενέργεια στο στοιχείο (αυτό είναι ένα λεπτό σημείο και αρχικά θα παρακαμφθεί...)
- Οι πηγές του ηλ. δικτύου (τάσεως ή ρεύματος) πλήρως γνωστές οι συναρτήσεις $E(t)$, $I_n(t)$

Ζητούνται

- Οι τάσεις και τα ρεύματα σε κάθε κλάδο του δικτύου

Παρακάτω διατυπώνεται ο "μηχανισμός" επίλυσης του Π.Α.Δ.

Επίλυση του Π.Α.Δ.

- Εστω πλ δίκτυο που έχει
  b : κλάδους n : κόμβους

άρα έχει $2b$ αγνώστους (V, i) σε καθε κλάδο

αλλα:
απο τις σχεσεις τάσεως-ρεύματος στοιχείων
(δηλ αν ξερω το $V \rightarrow$ βρισκω το i, και αντιστροφα)
οι αγνωστοι τελικα ειναι b (οσοι και οι κλάδοι)

χρειάζομαι b γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις
που θα τις βρω ?

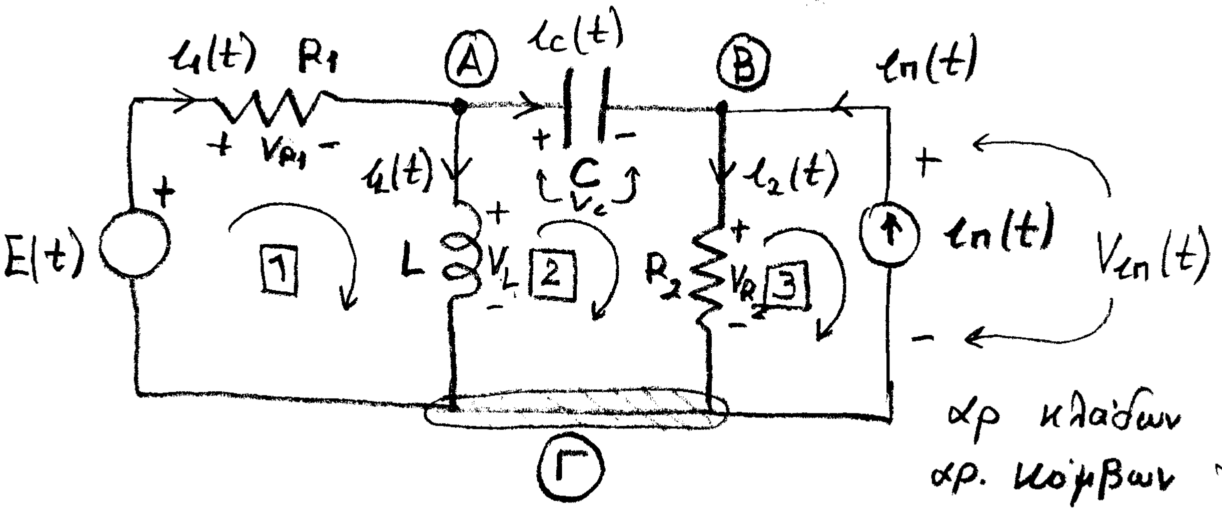
Απάντηση $\longrightarrow$ απο τους Νόμους Kirchhoff

Συγκεκριμένα:
απο N.P.K. n κόμβοι δίνουν $n-1$ γραμμικα ανεξαρτητες εξισώσεις

οι υπόλοιπες $b-(n-1)$ γραμμικα ανεξαρτητες εξισώσεις θα ληφθουν
απο τον N.T.K. και μάλιστα
στους απλους βρόχους
(οφθαλμούς)

Παράδειγμα (1)

Επιστρέφουμε στο πλ δίκτυο:



αρ κλάδων $b=5$

αρ. κόμβων $n=3$

Δίδονται:

- Η συνδεσμολογία (φαίνεται στο σχήμα)
- οι τιμές των R_1, R_2, L, C, και $i_L(0^-), V_c(0^-)$
- οι συναρτήσεις $E(t)$, $i_n(t)$ $\forall t$

Ζητούνται:

Τα ρεύματα $i_1(t), i_L(t), i_c(t), i_2(t)$ και η τάση $V_{in}(t)$

(Πράγματι το δίκτυο έχει $b=5$ κλάδους, άρα 5 αγνώστους)

Σημειώνεται ότι οι φ.α. των $i_1(t)$, $i_L(t)$, $i_c(t)$, $i_2(t)$ και $V_{in}(t)$ έχουν τεθεί <u>ΑΥΘΑΙΡΕΤΑ</u>. Η επιλογή αυτή των φ.α. δεν έχει καμμία ιδιαίτερη σημασία στην επίλυση του Π.Α.Δ.

Προχωρούμε στην καταστρωση των εξισώσεων

Απο Ν.Ρ.Κ. $n = 3$ αρα $n-1 = 2$ εξισώσεις

Ν.Ρ.Κ. (A) $i_1(t) - i_L(t) - i_c(t) = 0$ (1)

Ν.Ρ.Κ. (B) $i_c(t) - i_2(t) + i_n(t) = 0$ (2)

(γνωστή)

χρειαζομαι ακόμη 3 εξισώσεις
- Θα τις πάρω απο τον Ν.Τ.Κ. στους οφθαλμους $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ και $\boxed{3}$

Ν.Τ.Κ. $\boxed{1}$ $-E(t) + V_{R_1}(t) + V_{L_1}(t) = 0$ (3)

Ν.Τ.Κ. $\boxed{2}$ $-V_L(t) + V_c(t) + V_{R_2}(t) = 0$ (4)

Ν.Τ.Κ. $\boxed{3}$ $-V_{R_2}(t) + V_{in}(t) = 0$ (5)

αλλά απο σχέσεις τάσεως - ρεύματος έχω

$$V_{R_1}(t) = R_1 i_1(t)$$

$$V_{R_2}(t) = R_2 i_2(t)$$

$$V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} i_c(t')\,dt + V_c(0^-)$$

άρα με συνκατάταξη των εξισώσεων (1) – (5) θα έχω

(61)

$$\left.\begin{aligned}
&i_1(t) - i_L(t) - i_c(t) = 0 && (1)\\
&i_c(t) - i_2(t) = -i_\pi(t) && (2)\\
&R_1 i_1(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = E(t) && (3)\\
&-L\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} i_c(t')\,dt' + V_c(0^-) + R_2 i_2(t) = 0 && (4)\\
&-R_2 i_2(t) + V_{i\pi}(t) = 0 && (5)
\end{aligned}\right\}$$

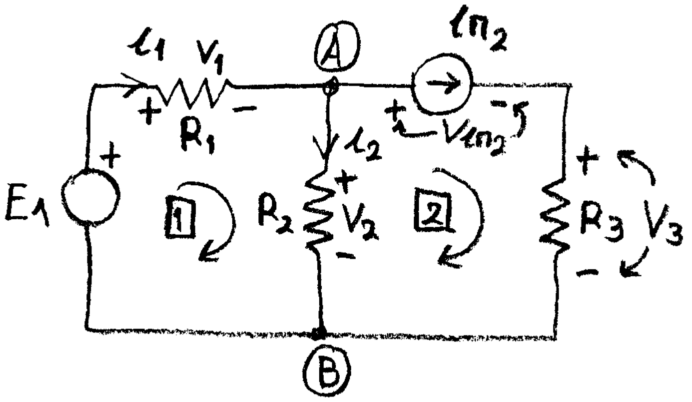
Αυτό είναι ένα σύστημα 5 ολοκληρω-διαφορικών εξισώσεων με 5 άγνωστες συναρτήσεις τις $\left(i_1(t),\ i_2(t),\ i_L(t),\ i_c(t),\ V_{i\pi}(t)\right)$

Δεν θα προχωρήσουμε φυσικά στην επίλυση του!

Αρκεί η εύρεση των εξισώσεων

Παράδειγμα 2

Θα παρουσιάσουμε τώρα ένα απλούστερο παράδειγμα και θα κάνουμε και πλήρη αριθμητική επίλυση. Το κύκλωμά μας αποτελείται μόνον από ωμικές αντιστάσεις και πηγές συνεχούς τάσεως και ρεύματος



$V_1 = R_1 i_1$

$V_2 = R_2 i_2$

$V_3 = I_{\pi_2} R_3$

Δίδονται οι τιμές:

$E_1 = 12\ V$, $I_{\pi_2} = 0.5A$

$R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$

Τοποθετώ αυθαίρετα τις φορές των i_1, i_2, $V_{I\pi_2}$

Άρα έχω αρ. κλάδων $b = 3$ (άρα 3 άγνωστοι)
αρ κόμβων $n = 2$

- άγνωστοι $(i_1, i_2, V_{I\pi_2})$

θα πάρω

από Ν.Ρ.Κ. $n-1 = 2-1 = 1$ εξίσωση

από Ν.Τ.Κ. $b-(n-1) = 3-1 = 2$ εξισώσεις

Παρακάτω τις γράφω

63

$$\left.\begin{array}{ll} \text{N.P.K. (A)} & i_1 - i_2 - i_{\pi 2} = 0 \\ \text{N.T.K. } \boxed{1} & -E_1 + R_1 i_1 + R_2 i_2 = 0 \\ \text{N.T.K. } \boxed{2} & -R_2 i_2 + V_{i\pi 2} + i_{\pi 2} R_3 = 0 \end{array}\right\}$$

αναкατατάσσω

$$\left.\begin{array}{l} i_1 - i_2 = i_{\pi 2} \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 = E_1 \\ -R_2 i_2 + V_{i\pi 2} = -i_{\pi 2} R_3 \end{array}\right\}$$

αντικαθιστώ αριθμ. τιμές και έχω τελικά

$$\left.\begin{array}{l} i_1 - i_2 = 0.5 \\ 8 i_1 + 5 i_2 = 12 \\ -5 i_2 + V_{i\pi_2} = -1 \end{array}\right\}$$

σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ V_{i\pi 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Λύση

$i_1 = 1.1154$ Amp

$i_2 = 0.6154$ Amp

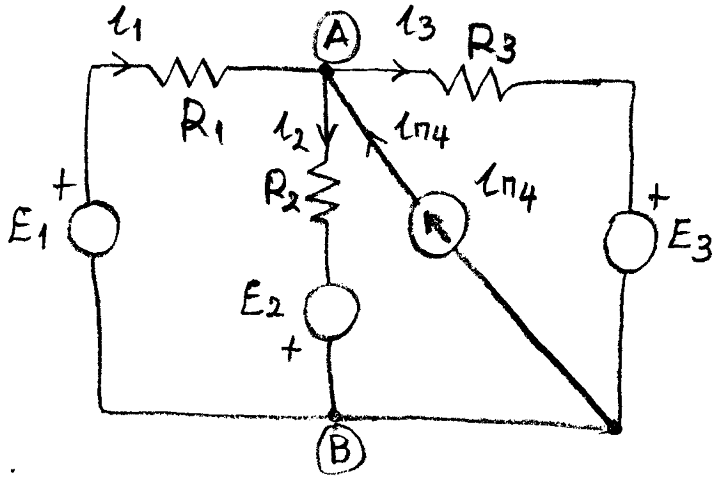
$V_{i\pi 2} = 2.0769$ Volts

από CASIO fx-991ES plus

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = \frac{29}{26} \\ i_2 = \frac{8}{13} \\ V_{i\pi 2} = \frac{27}{13} \end{array}\right\}$$

Άσκηση

Δίδεται το ηλ. δίκτυο του σχήματος
Ζητείται να γράψετε τις εξισώσεις ανάλυσης



Βρείτε πρώτα τους αγνώστους (πόσοι και ποιοι) τοποθετείστε φ.α κ.λ.π.

6.4) Ισοζύγιο ισχύος σε ηλ. δίκτυα:

Όπως είναι γνωστό κάθε ηλ δίκτυο αποτελείται από παθητικά ηλεκτρικά στοιχεία (αντιστάσεις, πηνία, πυκνωτές) και ενεργητικά ηλεκτρικά στοιχεία (πηγές τάσεως ή ρεύματος)

Με βάση την "Αρχή Διατηρήσεως της Ενέργειας" θα πρέπει

- Όση ενέργεια παράγεται από ηλ. στοιχεία του Δικτύου (κλειστό σύστημα) ακριβώς ίση να καταναλίσκεται ή να αποθηκεύεται σε άλλα ηλ στοιχεία του.

Εδώ υπενθυμίζεται ότι:

- Η ωμική αντίσταση R μετατρέπει όση ηλεκτρική ενέργεια της προσφέρεται σε θερμότητα η οποία διασκορπίζεται στο περιβάλλον
- Το πηνίο L και ο πυκνωτής C (ιδανικά στοιχεία) δεν καταναλώνουν ενέργεια αλλά την αποθηκεύουν και την ξαναδίνουν πίσω όποτε χρειαστεί

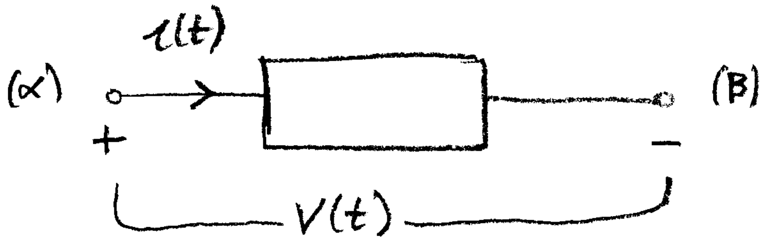
Οι ηλεκτρικές πηγές τώρα:

- Είναι δυνατόν να <u>παράγουν</u> ενέργεια αλλά είναι δυνατόν επίσης να <u>απορροφούν</u> ενέργεια

Αυτό εξαρτάται από τις συνθήκες που επικρατούν στο δίκτυο (τιμές τάσεων και ρευμάτων σε κάθε κλάδο)

Παρακάτω θα ασχοληθούμε ειδικότερα όχι με το μέγεθος <u>ενέργεια</u> αλλά με το συναφές μέγεθος $\boxed{\text{ισχύς} = \dfrac{\text{ενέργεια}}{\text{μονάδα χρόνου}}}$ $\left(1\,W = 1\,\dfrac{Joule}{sec}\right)$

Υπενθυμίζεται η σχέση που δίνει την ισχύ που παράγει η απορροφά ένα ηλ. στοιχείο



Εστω ότι οι φορές αναφοράς είναι <u>συσχετισμένες</u>

- Αν $p(t) = V(t)\,i(t) > 0$

  το στοιχείο <u>απορροφά</u> ισχύ την χρονική στιγμή t

- Αν $p(t) = V(t)\,i(t) < 0$

  το στοιχείο <u>παράγει</u> ισχύ την χρονική στιγμή t

Αν οι φορές αναφοράς είναι <u>μη συσχετισμένες</u> ισχύουν ακριβώς τα αντίθετα

Δηλαδή

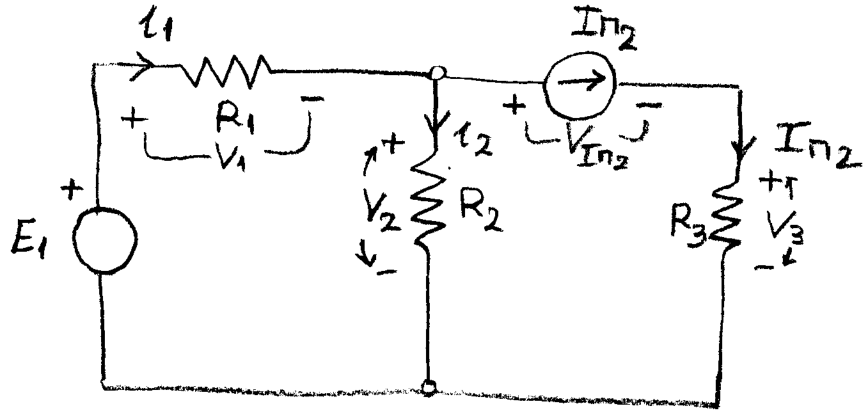
αν $p(t) > 0$ το στοιχείο παράγει ισχύ

αν $p(t) < 0$ το στοιχείο απορροφά ισχύ

Ας δούμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 1)

Επιστρέφουμε στο παράδειγμα που λύθηκε προηγούμενα όπου έχουμε ένα απλό ηλ δίκτυο το οποίο και έχει επιλυθεί. Επαναλαμβάνουμε το σχήμα:



$E_1 = 12V$, $I_{\pi_2} = 0.5A$

$R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 2\Omega$

Είχαμε βρεί την λύση:

$i_1 = 1.1154\ A$

$i_2 = 0.6154\ A$

$V_{I_{\pi_2}} = 2.0769\ V$

Το δίκτυο αποτελείται από 5 ηλ στοιχεία εξετάζουμε την ηλ. ισχύ σε καθε ένα από αυτά
- Για τις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 δεν τίθεται θέμα διότι σίγουρα απορροφουν ισχύ. Θα έχουμε λοιπόν

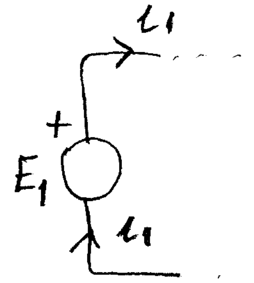
$$P_{R_1} = V_1 i_1 = R_1 i_1 \cdot i_1 = R_1 i_1^2 = 9.9529\ W$$

$$P_{R_2} = i_2^2 R_2 = 1.8936\ W$$

$$P_{R_3} = I_{\pi_2}^2 R_3 = 0.5\ W$$

εξετάζουμε τις 2 πηγές E_1, $I_{\pi 2}$. Εδώ θέλει προσοχή

Πηγή E_1

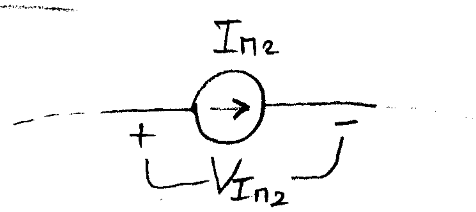


φορές αναφοράς – Μη συσχετισμένες

$$P_{E_1} = E_1 \cdot i_1 = 13.3848 \ W > 0$$

άρα η πηγή E_1 παράγει ισχύ $P_{E_1} = 13.3848 W$

Πηγή $I_{\pi 2}$



φορές αναφοράς – Συσχετισμένες

$$P_{I_{\pi 2}} = V_{I_{\pi 2}} \cdot I_{\pi 2} = 1.0384 \ W > 0$$

άρα η πηγή $I_{\pi 2}$ απορροφά ισχύ $P_{I_{\pi 2}} = 1.0384 W$

Συγκεντρώνουμε όλα τα αποτελέσματα στον ακόλουθο πίνακα

	ισχύς παραγόμενη	ισχύς απορροφώμενη
	$P_{E_1} = 13.3848 \ W$	$P_{R_1} = 9.9529 \ W$
		$P_{R_2} = 1.8936 \ W$
		$P_{R_3} = 0.5 \ W$
		$P_{I_{\pi 2}} = 1.0384 \ W$
Σύνολα	$P_{\pi\alpha\rho\alpha\gamma} = 13.3848 W$	$P_{\alpha\pi\text{ορρο}\varphi} = 13.3849 \ W$

Προφανώς $P_{\pi\alpha\rho\alpha\gamma} = P_{\alpha\pi o\rho\rho o\varphi}$

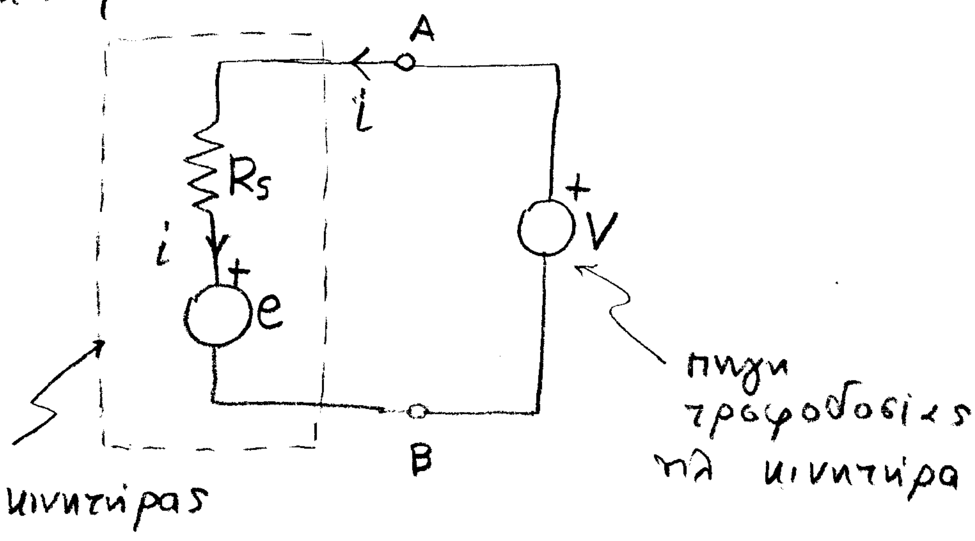
Η πολύ μικρή διαφορά που προέκυψε (και πάντα θα προκύπτει) οφείλεται στο "στρογγύλεμα" των δεκαδικών αριθμών που βγαίνουν από τις πράξεις

Στο ερώτημα:

- Τι γίνεται με την ηλεκτρική ισχύ που απορροφά μια ηλεκτρική πηγή;

Η απάντηση εξαρτάται από τις ειδικές συνθήκες που υπάρχουν.

Π.χ είδαμε στο μάθημα του "ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ" ότι ένας ηλεκτρικός κινητήρας παριστάνεται από το κύκλωμα



R_s : Εσωτερική αντίσταση ηλ. κινητήρα

e : Αντι - ΗΕΔ ηλ κινητήρα

Στην λειτουργία του κινητήρα η πηγή e πάντα θα απορροφά ισχύ ($e>0$, $i>0$, φ.α. συσχετισμένες)

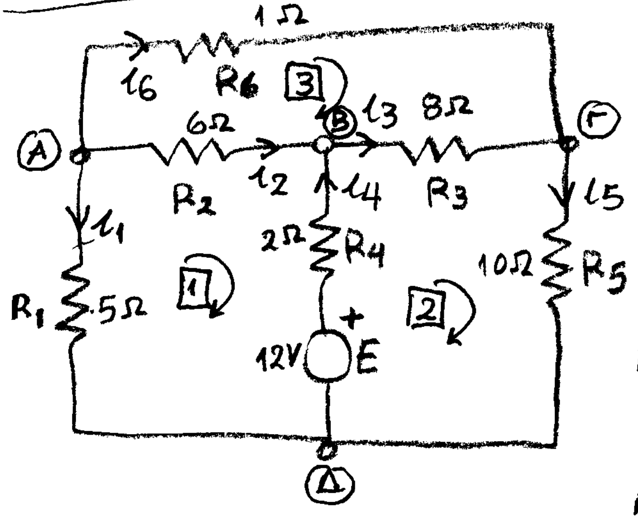
Η ισχύς αυτή γίνεται η μηχανική ισχύς του κινητήρα

Αλλα παραδειγματα για μελετη

Για τα παρακάτω δύο κυκλώματα ζητούνται

- Η επίλυση τους
- Το ισοζύγιο ισχύος

Παράδειγμα 2



$E = 12V$

$R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 6\Omega$

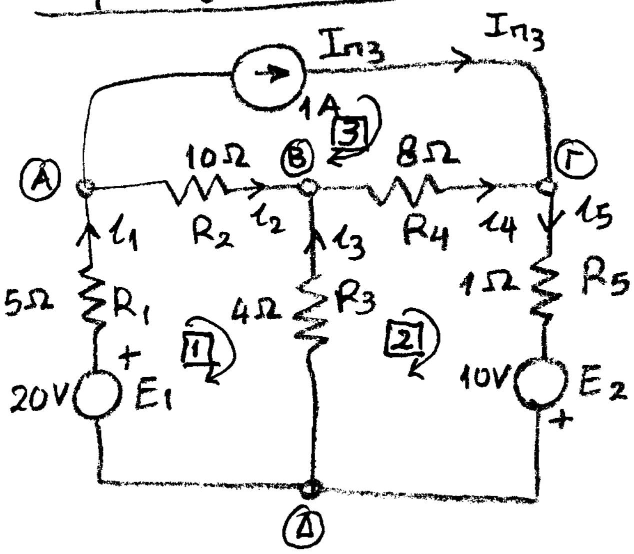
$R_3 = 8\Omega$, $R_4 = 2\Omega$

$R_5 = 10\Omega$, $R_6 = 1\Omega$

άγνωστοι $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{N.P.K (A)} & -i_1 - i_2 - i_6 = 0 \\
\text{NPK (B)} & i_2 + i_4 - i_3 = 0 \\
\text{NPK (Γ)} & i_3 + i_6 - i_5 = 0 \\
\text{NTK } \boxed{1} & -i_1 R_1 + i_2 R_2 - i_4 R_4 + E = 0 \\
\text{NTK } \boxed{2} & -E + i_4 R_4 + i_3 R_3 + i_5 R_5 = 0 \\
\text{NTK } \boxed{3} & -i_2 R_2 + i_6 R_6 - i_3 R_3 = 0
\end{array}\right\}$$

Παράδειγμα 3



$E_1 = 20V$, $E_2 = 10V$, $I_{n3} = 1A$

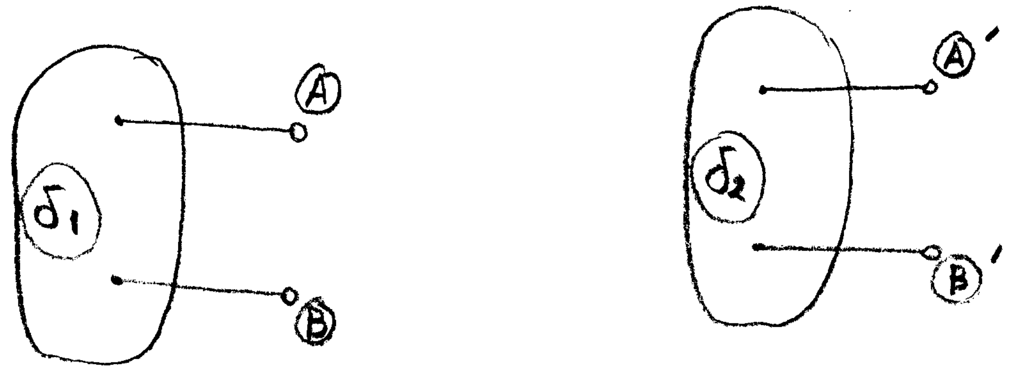
$R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$

$R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 8\Omega$

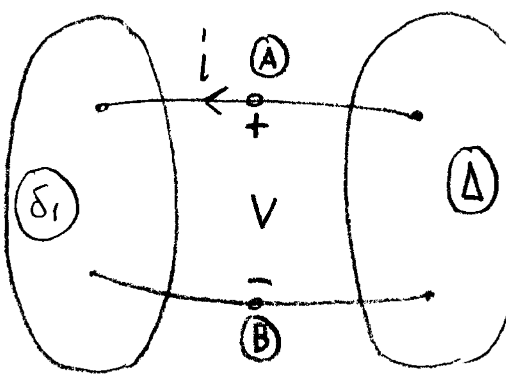
$R_5 = 1\Omega$

6.5) Ισοδύναμα δίκτυα

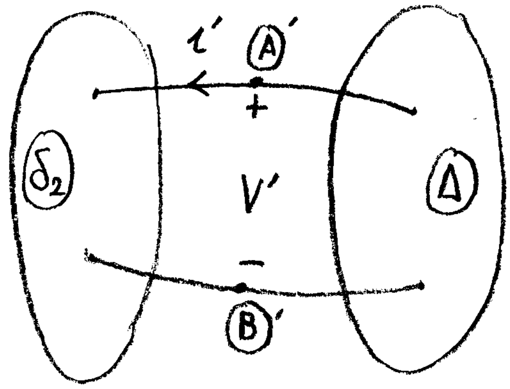
Έχουμε 2 ηλεκτρικά δίκτυα το δ_1 και το δ_2 και σε καθε ένα απ' αυτά "βγαίνει" προς τον "έξω κόσμο" ένα ζευγάρι ακροδεκτών όπως στο παρακάτω σχήμα:



Υποθέτουμε τώρα ότι συνδέουμε διαδοχικά το δ_1 και το δ_2 σε ένα άλλο δίκτυο το Δ



συνδεση
$\delta_1 - \Delta$



συνδεση
$\delta_2 - \Delta$

Προφανώς θα έχουμε σε καθε περίπτωση τα ρεύματα και τις τάσεις (V, i) και (V', i')

Εάν το δίκτυο (Δ) δεν "βλέπει" καμμία διαφορά όταν συνδέεται με το (δ_1) ή το (δ_2) τότε τα δίκτυα (δ_1) και (δ_2) λέγονται <u>ισοδύναμα</u>

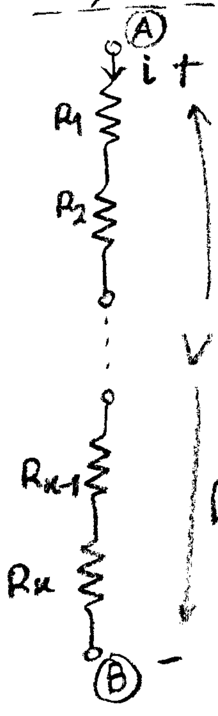
Ακριβέστερα:

Όταν με την παραδοχή $(V = V')$ προκύπτει $(i = i')$ ή με την παραδοχή $(i = i')$ προκύπτει $(V = V')$ τα δίκτυα (δ_1) και (δ_2) λέγονται <u>ισοδύναμα</u>

Σημειώστε ότι τα (δ_1) και (δ_2) ως προς την εσωτερική τους δομή μπορεί να είναι εντελώς διαφορετικά, αλλά να εμφανίζουν στον "έξω κόσμο" (δίκτυο (Δ)) την <u>ίδια ακριβώς συμπεριφορά</u>

6.5.1) <u>Παραδείγματα ισοδυνάμων δικτύων</u>

<u>Σύνδεση αντιστάσεων "εν σειρά"</u>

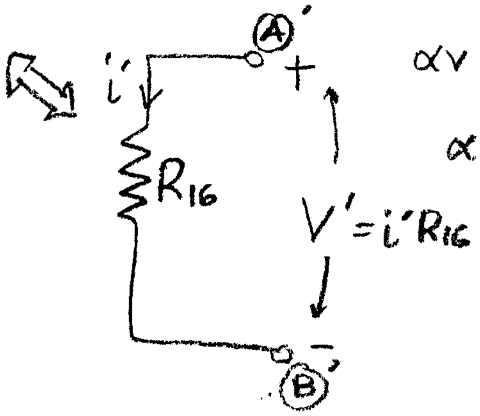


Έστω κ - αντιστάσεις συνδεδεμένες "εν σειρά" (κοινό ρεύμα i)

Πώς θα βρεθεί ένα ισοδύναμο δίκτυο;

Απ/ η τάση V θα είναι $V = iR_1 + iR_2 + \dots + iR_\kappa$

άρα $V = i(R_1 + R_2 + \dots + R_\kappa)$ και $V' = i' R_{\iota\sigma}$

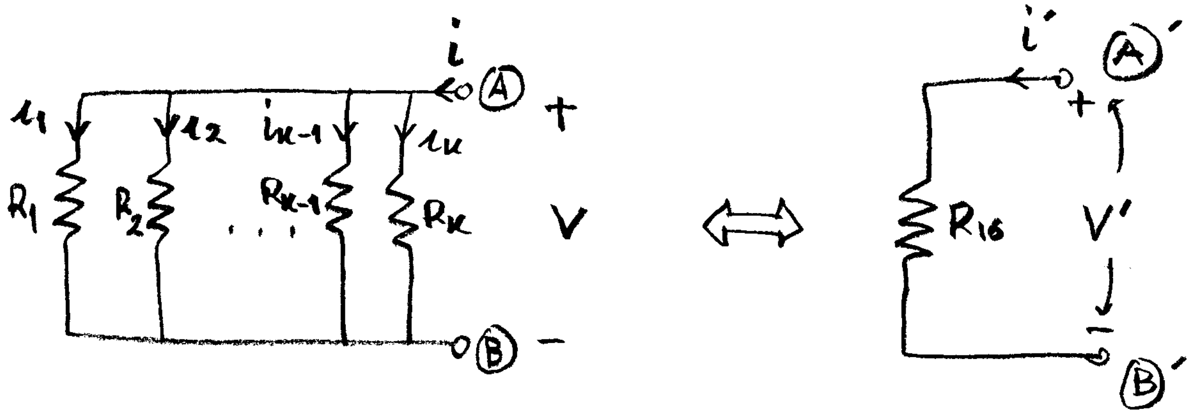


αν $i = i'$ πρέπει $V = V'$

άρα $i(R_1 + R_2 + \dots + R_\kappa) = i' R_{\iota\sigma}$

ή $\boxed{R_1 + R_2 + \dots + R_\kappa = R_{\iota\sigma}}$

Σύνδεση αντιστάσεων παράλληλα



έστω $i = i'$

όπου $i = i_1 + i_2 + \dots + i_{k-1} + i_k = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots + \frac{V}{R_{k-1}} + \frac{V}{R_k}$

άρα $i = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_{k-1}} + \frac{1}{R_k}\right)$

επίσης $i' = \frac{V'}{R_{10}}$

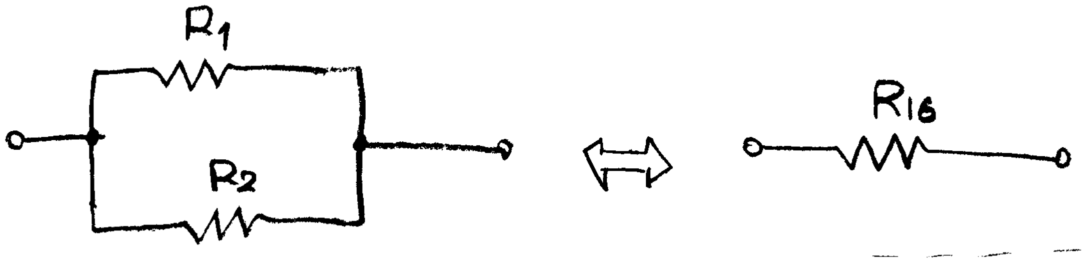
εφ' όσον υποθέσαμε ότι $i = i'$ προκύπτει ότι

$$V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_{k-1}} + \frac{1}{R_k}\right) = V'\frac{1}{R_{10}}$$

για να ισχύει η ισοδυναμία θα πρέπει $V = V'$

άρα $$\boxed{\frac{1}{R_{10}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_{k-1}} + \frac{1}{R_k}}$$

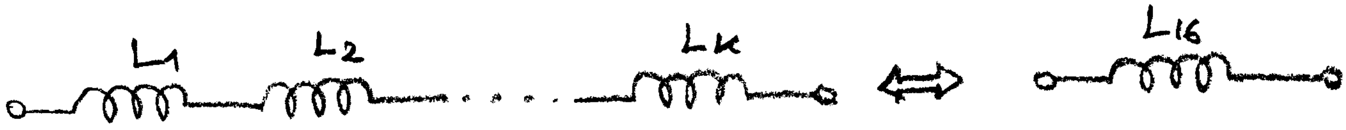
Σημείωση: (ειδικά για $K=2$) έχουμε τον τύπο



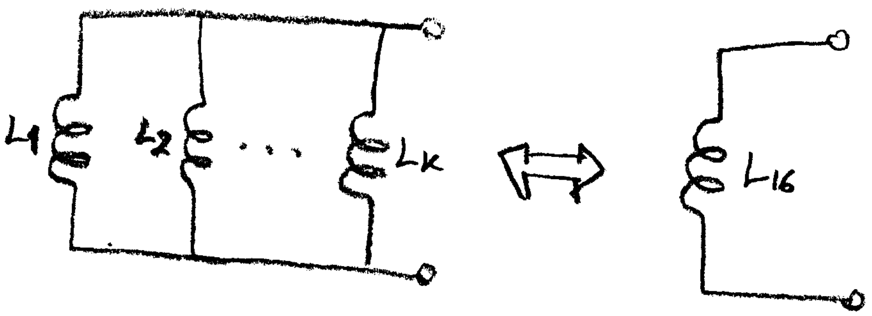
$$\frac{1}{R_{10}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \Rightarrow \boxed{R_{10} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

Σύνδεση πηνίων εν σειρά και παράλληλα

Εύκολα αποδεικνύονται οι σχέσεις

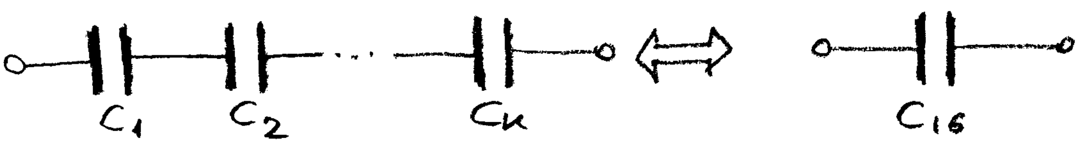


$$L_{16} = L_1 + L_2 + \dots + L_\kappa$$

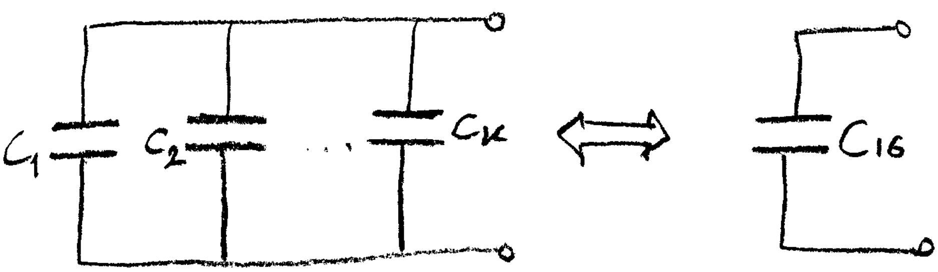


$$\frac{1}{L_{16}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_\kappa}$$

7.4) Σύνδεση πυκνωτών εν σειρά και παράλληλα



$$\frac{1}{C_{16}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_\kappa}$$

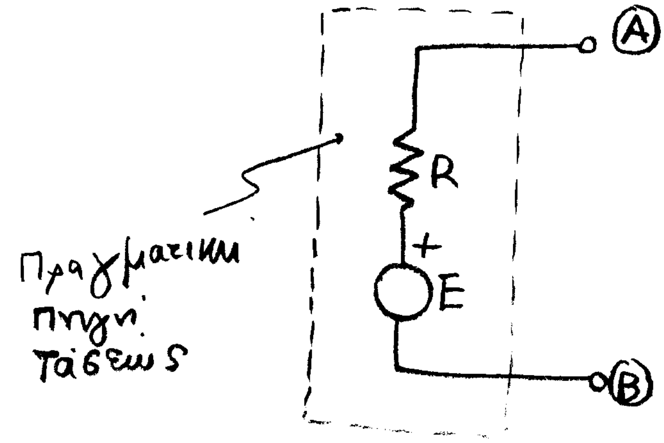


$$C_{16} = C_1 + C_2 + \dots + C_\kappa$$

6.6) Ισοδυναμία πραγματικών πηγών

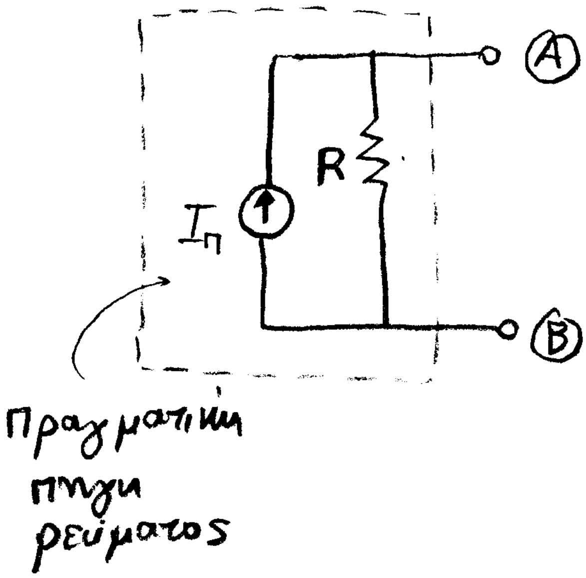
Λέγοντας πραγματική πηγή τάσεως εννοούμε:

- Μία ιδανική πηγή τάσεως <u>εν σειρά</u> με μία ωμική αντίσταση. Τα δύο αυτά στοιχεία δεν ξεχωρίζουν, (δεν διασπώνται) ποτέ



<u>Ερώτηση</u>
-γιατί "εν σειρά" η R;

Αντίστοιχα η πραγματική πηγή ρεύματος αποτελείται από μία ιδανική πηγή ρεύματος <u>παράλληλα</u> με μία ωμική αντίσταση



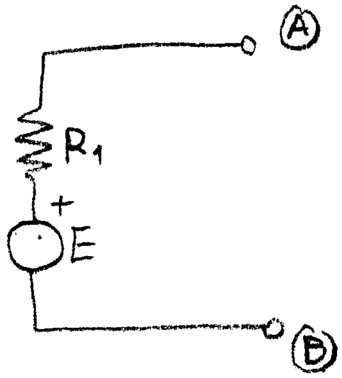
- γιατί παρ/λα η R;

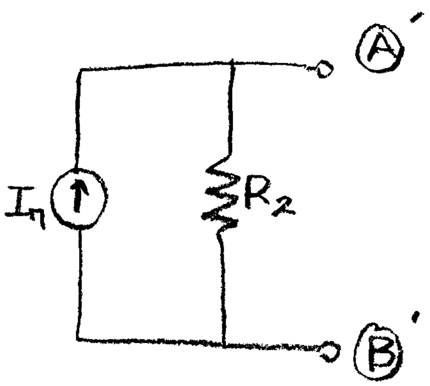
Τίθεται το ερώτημα

Είναι δυνατόν, και υπο ποιές συνθήκες, μια πραγματική πηγή τάσεως να είναι ισοδύναμη με μια πραγματική πηγη ρεύματος

Απαντηση

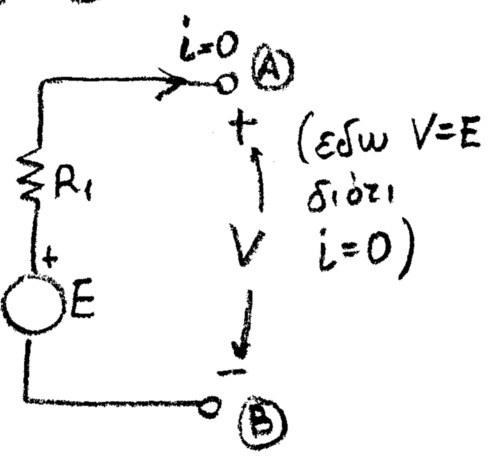
Έστω οι δύο πηγές

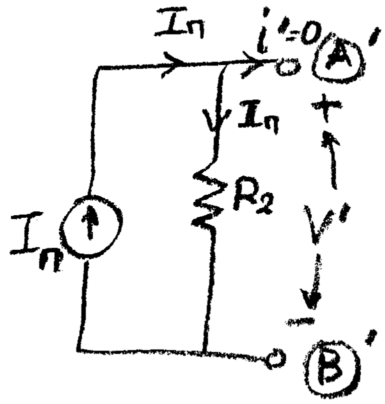




εξετάζουμε τον ορισμο της ισοδυναμίας

Αρχικά θεωρούμε ανοικτοκυκλωμένα τα σημεία (A) - (B) και (A)' - (B)' αρα $i = i' = 0$





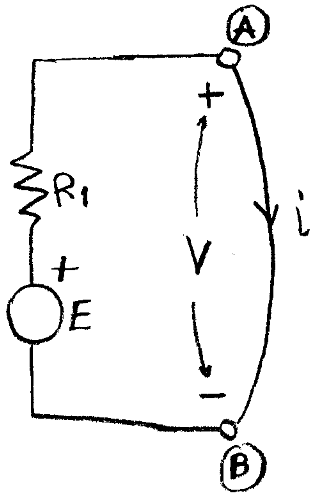
θα πρέπει $V = V'$ για να είναι ισοδύναμα

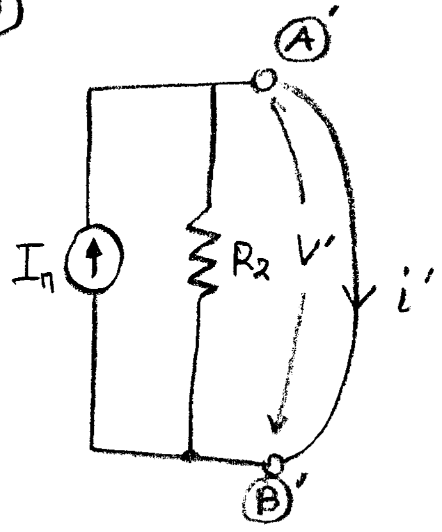
φαίνεται αμέσως ότι $V = E$ και $V' = R_2 I_\pi$

αρα πρέπει να ισχύει $E = R_2 I_\pi$ (1)

Στη συνέχεια θεωρούμε βραχυκυκλωμένα τα σημεία

Ⓐ - Ⓑ και Ⓐ' - Ⓑ'





εδώ $i' = I_\pi$
(δεν περνάει καθόλου ρεύμα από την R_2)

τώρα προφανώς ισχύει $V = V' = 0$

για να είναι ισοδύναμα θα πρέπει $i = i'$

Προφανώς $i = \dfrac{E}{R_1}$ και $i' = I_\pi$ (γιατί?)

άρα $\dfrac{E}{R_1} = I_\pi$ (2)

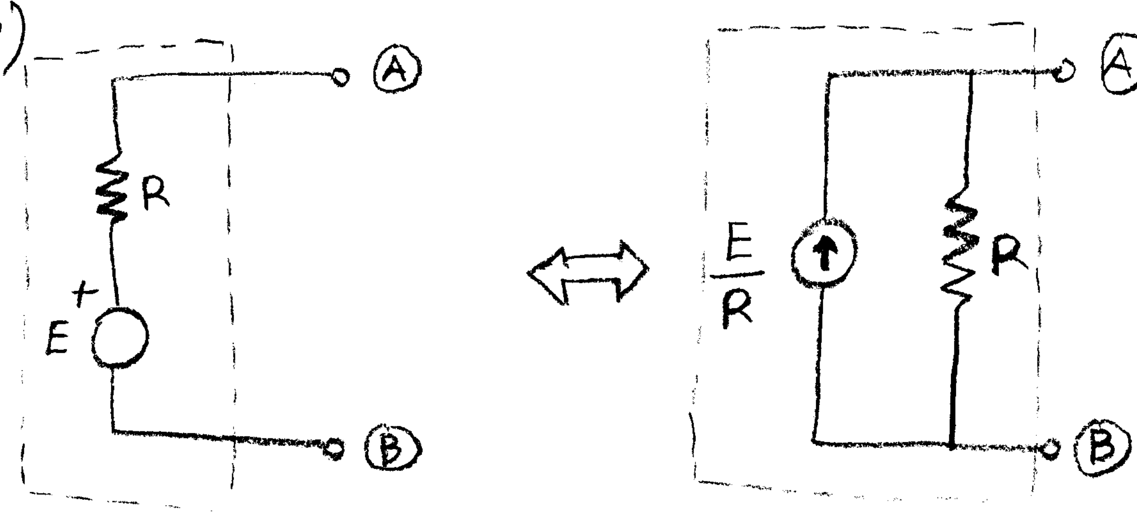
από τις σχέσεις (1) και (2) θα πάρουμε:

$$\left.\begin{aligned} E &= R_2 I_\pi \\ \frac{E}{R_1} &= I_\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} E &= R_2 I_\pi \\ E &= R_1 I_\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_1 = R_2$$

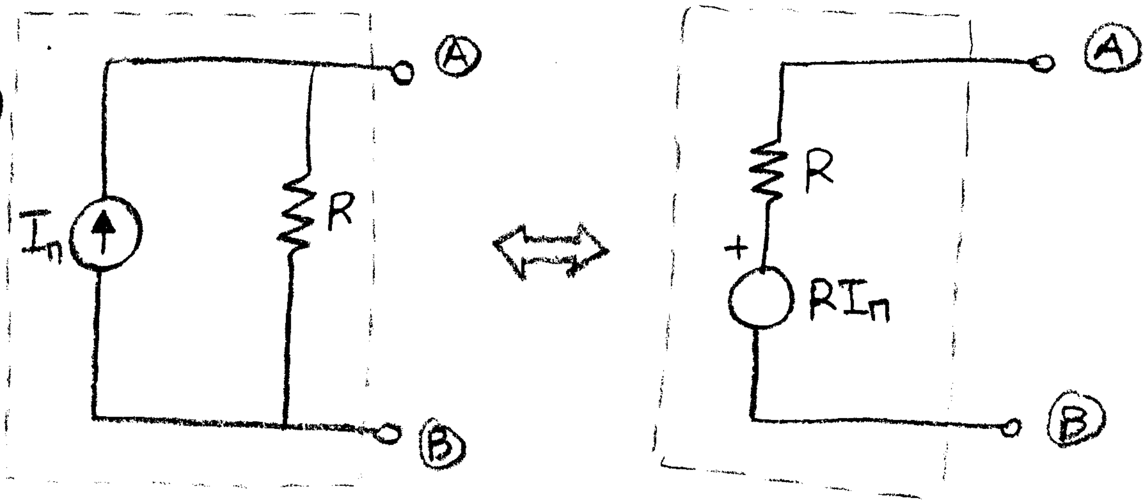
Παρακάτω φαίνονται τα ισοδύναμα δίκτυα

α) Από πραγμ. πηγή τάσεως → σε πραγμ. πηγή ρεύματος

β) Από πραγμ. πηγή ρεύματος → σε πραγμ. πηγή τάσεως α)



β)



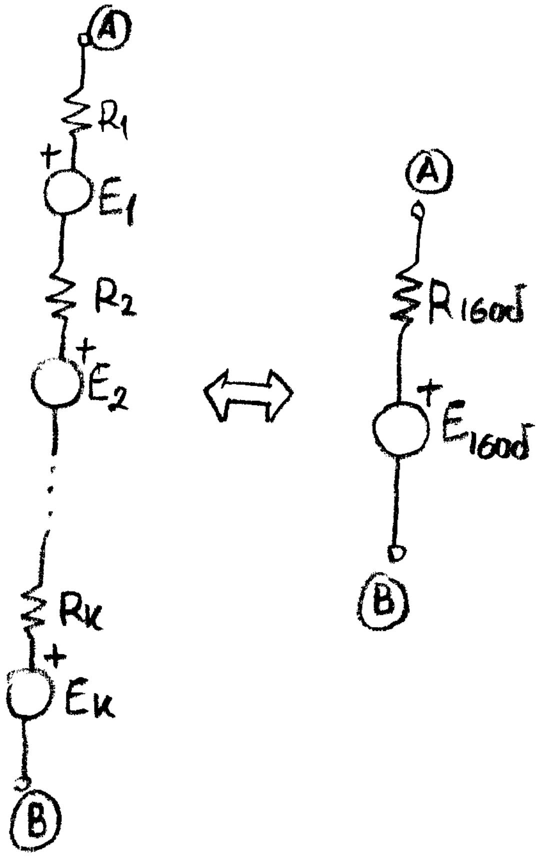
Οι ανωτερω 2 περιπτωσεις ειναι πολύ χρήσιμες σε πολλες εφαρμογες, όπως θα δουμε παρακάτω

6.7) Συνδέσεις πραγματικών πηγών

Με βάση τα προηγούμενα μπορούμε να μελετήσουμε τα ισοδύναμα συνδεσμολογιών <u>πραγματικών πηγών</u> (τάσεως ή ρεύματος). Οι συνδεσμολογίες θα είναι εν σειρά πηγές, ή παράλληλες πηγές (τάσεως ή ρεύματος πάντοτε). Έχουμε συνολικά 4 περιπτώσεις, οι δύο εκ των οποίων είναι απλές και οι άλλες δύο πιο περίπλοκες στην εύρεση του ισοδυνάμου.

Θα ξεκινήσουμε με τις δύο απλές περιπτώσεις

<u>Πραγματικές πηγές τάσεως συνδεδεμένες εν σειρά</u>



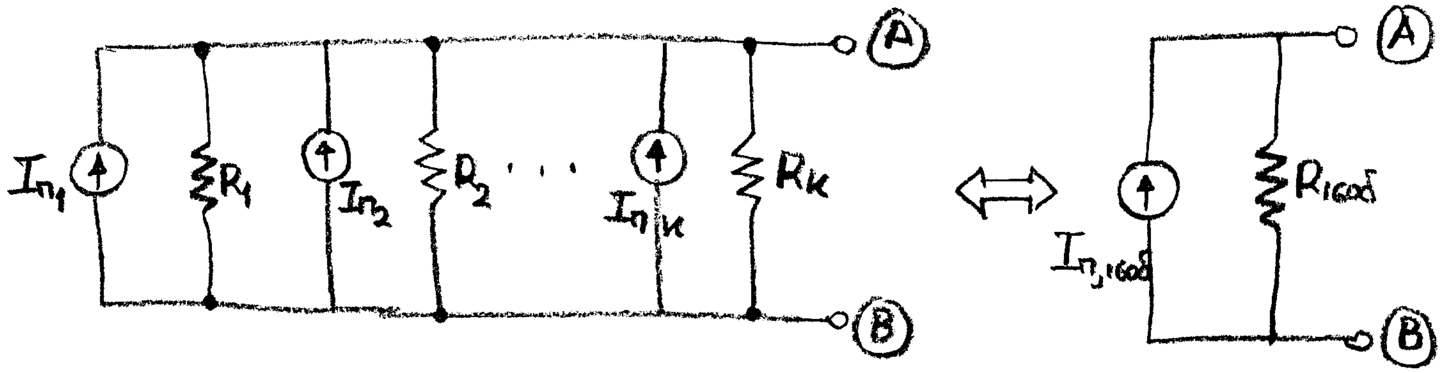
Εύκολα φαίνεται ότι θα έχουμε

$$R_{ισοδ} = R_1 + R_2 + \dots + R_κ$$

και $$E_{ισοδ} = E_1 + E_2 + \dots + E_κ$$

(αν κάποια πηγή από τις $E_1, E_2, \dots, E_κ$ έχει το (+) προς το B τότε λαμβάνεται με αρνητικό πρόσημο)

Πραγματικές πηγές ρεύματος συνδεδεμένες παράλληλα



Εδώ θα έχουμε

$$I_{\pi,ισοδ} = I_{\pi_1} + I_{\pi_2} + \dots + I_{\pi K}$$

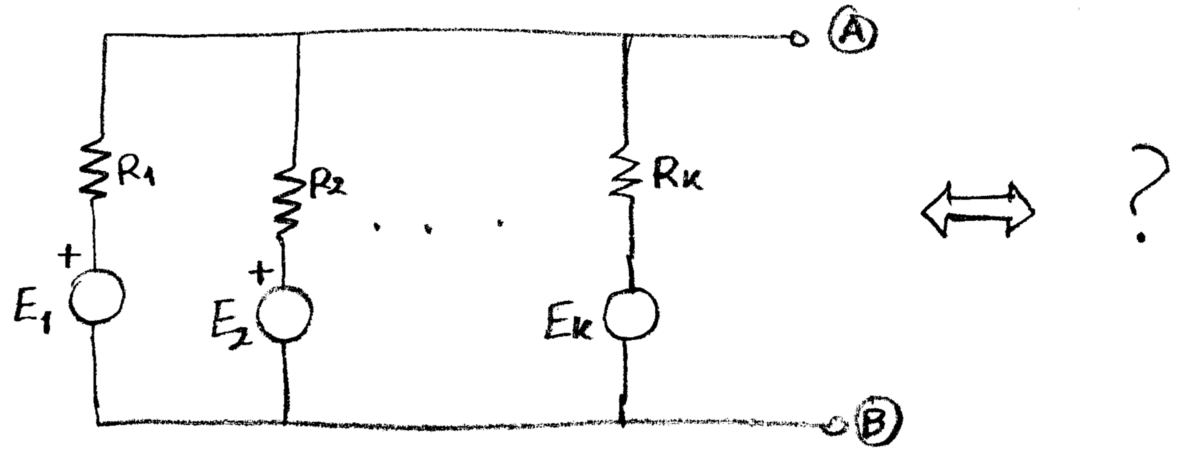
και
$$\frac{1}{R_{ισοδ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_K}$$

αν κάποια πηγή από τις $I_{\pi_1}, I_{\pi_2}, \dots, I_{\pi K}$ έχει φορά ρεύματος προς το B τότε λαμβάνεται με αρνητικό πρόσημο

Προχωράμε παρακάτω στις 2 πιο περίπλοκες περιπτώσεις ↲ 2h

1 – Πραγματικές πηγές τάσεως συνδεδεμένες παράλληλα

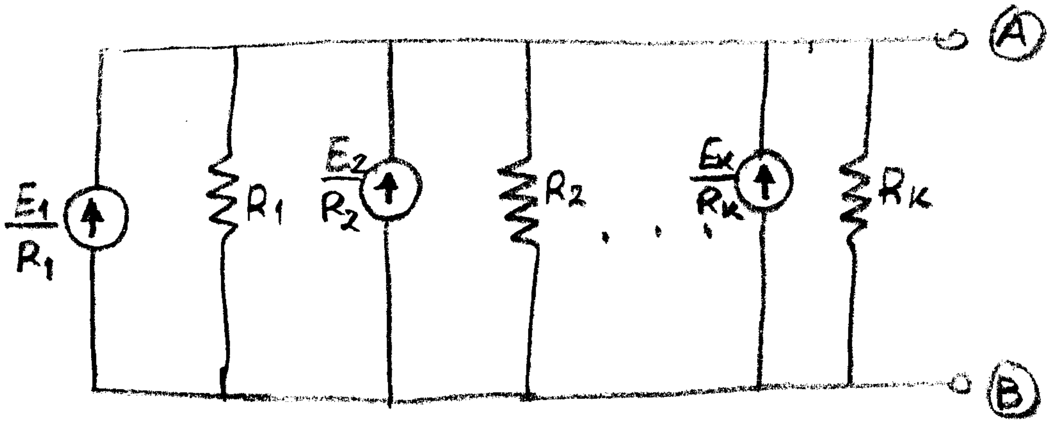
Εδώ έχουμε την συνδεσμολογία



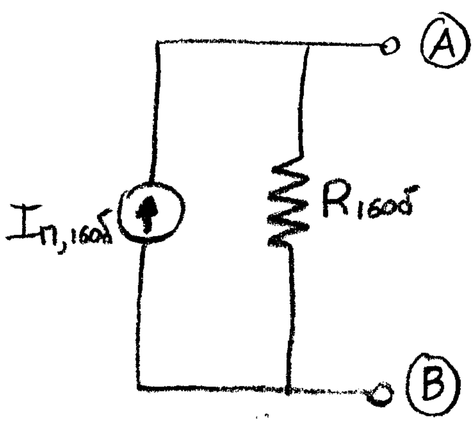
Πως θα βρεθεί ένα ισοδύναμο που να αποτελείται από μία πηγή τάσεως εν σειρά με μία ωμική αντίσταση;

Σκεπτικό

Μετατρέπουμε κάθε πηγή τάσεως στην ισοδύναμη πηγή ρεύματος. Δηλαδή:



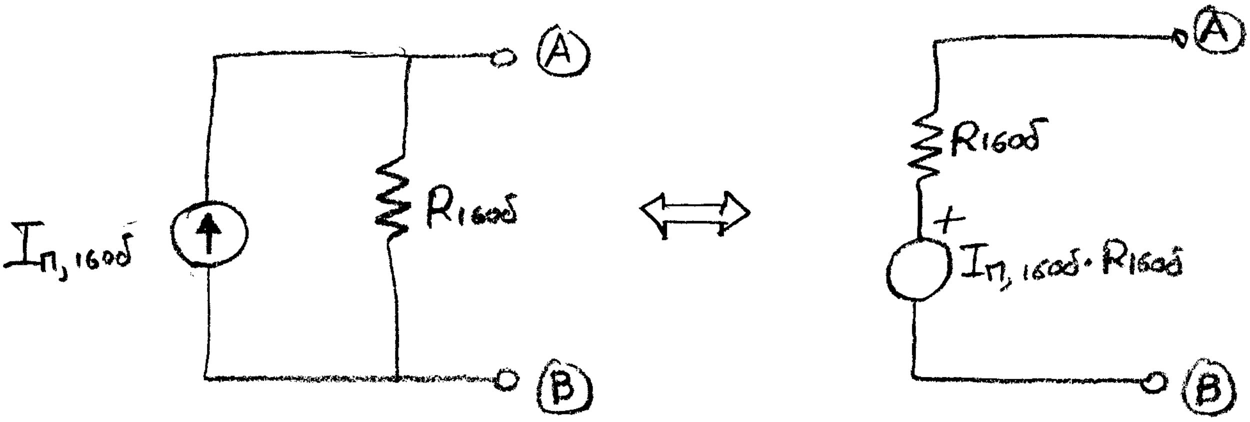
εδώ έχουμε παράλληλη σύνδεση πραγματικών πηγών ρεύματος άρα το ισοδύναμο θα είναι:



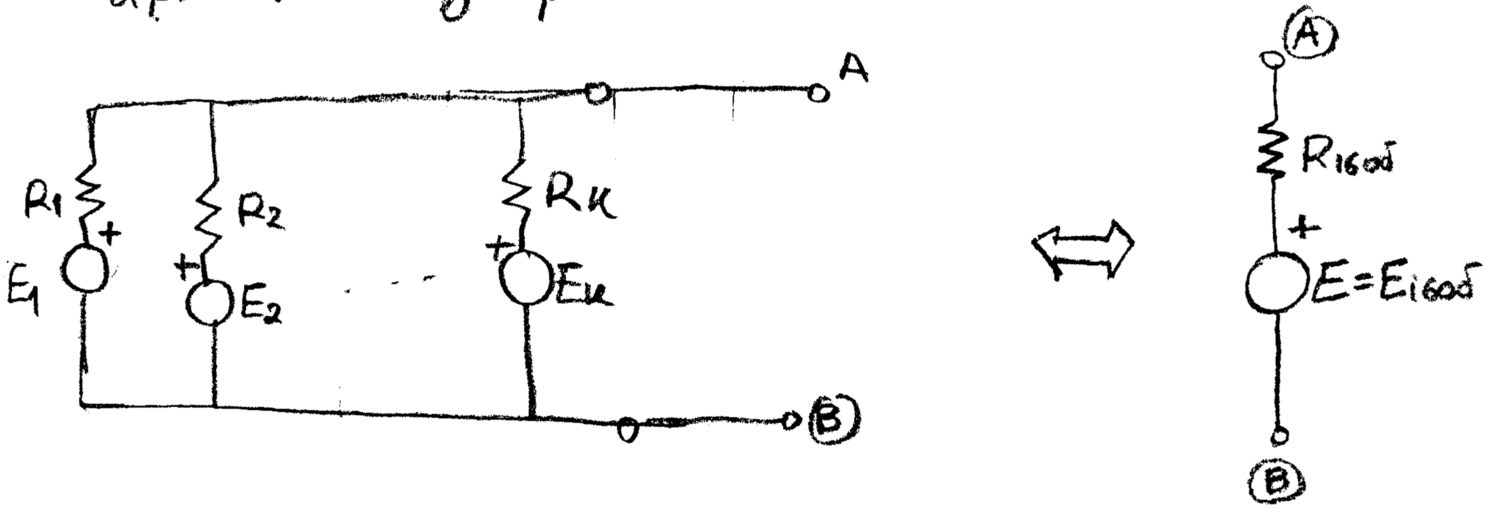
$$I_{\pi,\iota\sigma o\delta} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \dots + \frac{E_\kappa}{R_\kappa}$$

$$\frac{1}{R_{\iota\sigma o\delta}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_\kappa}$$

Μετατρέπουμε την πραγματική πηγή ρεύματος σε πραγματική πηγή τάσεως. Δηλαδή



άρα καταλήγουμε στο ισοδύναμο



όπου

$$\boxed{\frac{1}{R_{ισοδ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_K}}$$

και $E_{ισοδ} = E = I_{π,ισοδ}\cdot R_{ισοδ}$

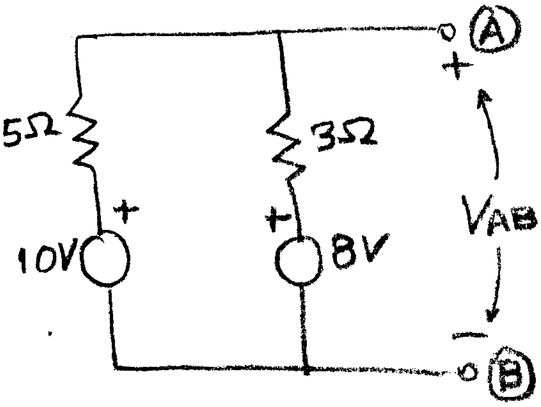
άρα $$\boxed{E = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \dots + \frac{E_K}{R_K}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_K}}}$$

οι δύο τελευταίοι τύποι που δίνουν το ισοδύναμο είναι γνωστοί στην βιβλιογραφία ως τύποι του θεωρήματος Millman (ισοδύναμο παρ/λης συνδεσμολογίας πηγών)

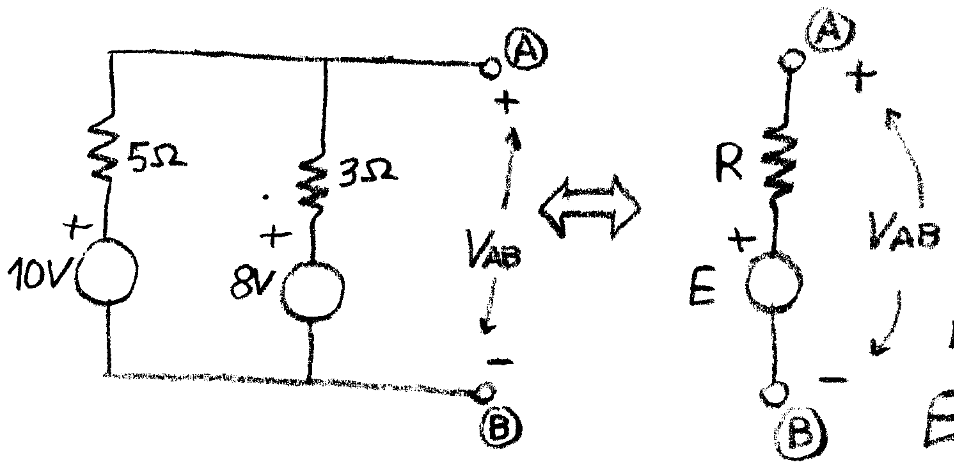
Προφανώς αν κάποια πηγή έχει το (+) προς το σημείο (B) λαμβάνεται με αρνητικό πρόσημο

Εφαρμογές του Θεωρ. Millman (πολύ χρήσιμο "εργαλείο" στην ανάλυση κυκλωμάτων)

α) Στην παρακάτω συνδεσμολογία, υπολογίστε την τάση V_{AB}



Απ/ Βρίσκουμε το ισοδύναμο



όπου

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$R = 1.875\,\Omega$$

και

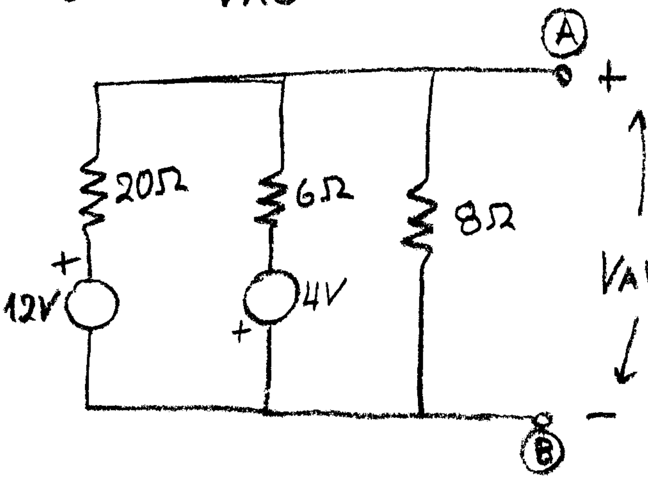
$$E = \frac{10 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow E = 8.75\,V$$

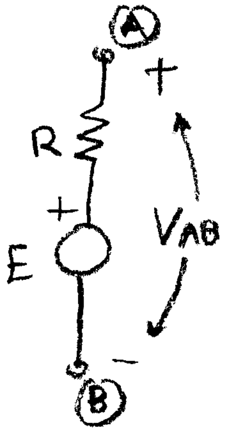
Προφανώς η $V_{AB} = E$ (εφ' όσον δεν έχει συνδεθεί τίποτα άλλο μεταξύ (A) και (B)) άρα

$$V_{AB} = 8.75\ V$$

β) Στην παρακάτω συνδεσμολογία υπολογίστε την τάση V_{AB}



Απ/ Εδώ έχουμε 3 παράλληλους κλάδους από τους οποίους οι 2 έχουν πηγή. Η συνδεσμολογία έχει ισοδύναμο

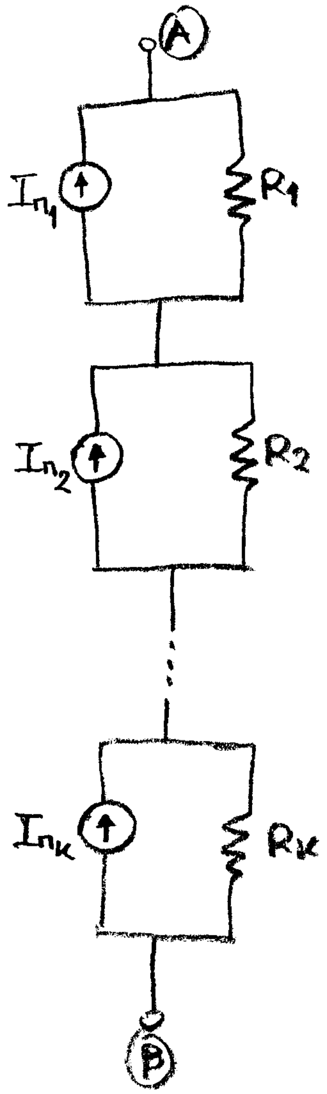


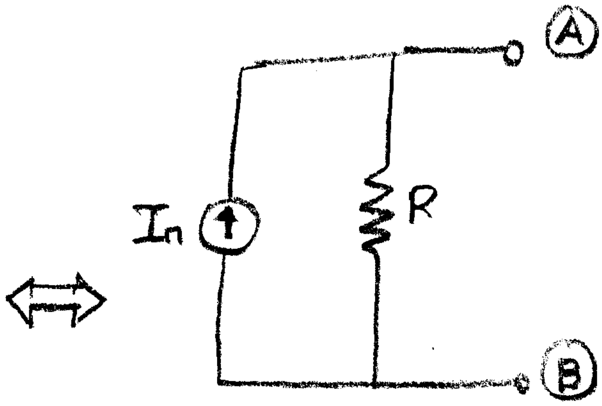
όπου
$$E=\frac{12\cdot\frac{1}{20}-4\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{8}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} \quad (\text{γιατί;})$$

ή
$$E=\frac{-\frac{1}{15}}{\frac{41}{120}} \Rightarrow E=-\frac{8}{41}=-0{,}1951\ V$$

άρα $\underline{V_{AB}=E=-0.1951\ V}$

Πραγματικές πηγές ρεύματος συνδεδεμένες εν σειρά





Αφήνεται για άσκηση να αποδειχθεί ότι:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_k$$

και

$$I_n = \frac{I_{n_1} R_1 + I_{n_2} R_2 + \dots + I_{n_k} R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_k}$$

Ο "μηχανισμός" της απόδειξης είναι ακριβώς ο ίδιος όπως και στην προηγούμενη περίπτωση