ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Η ημιτονοειδής συνάρτηση

9.1) Γενικά για την ημιτονοειδή συνάρτηση

Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται πολύ στην Ηλεκτρολογία αλλά και σε άλλες Τεχνικές Επιστήμες. Οι λόγοι είναι οι ακόλουθοι:

α) Με την ημιτονοειδή συνάρτηση περιγράφονται πολλά φυσικά φαινόμενα και τούτο γιατί οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις μαζί με τις εκθετικές συναρτήσεις, αλλά και συνδυασμοί αυτών των δύο, αποτελούν τις γενικές λύσεις των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Με τις εξισώσεις αυτές περιγράφεται πληθώρα φυσικών φαινομένων (π.χ. οι ταλαντώσεις).

β) Από μαθηματική άποψη είναι μια πολύ «ομαλή» συνάρτηση. Η παράγωγός της είναι επίσης μια ημιτονοειδής συνάρτηση με κάποια διαφορά φάσεως.

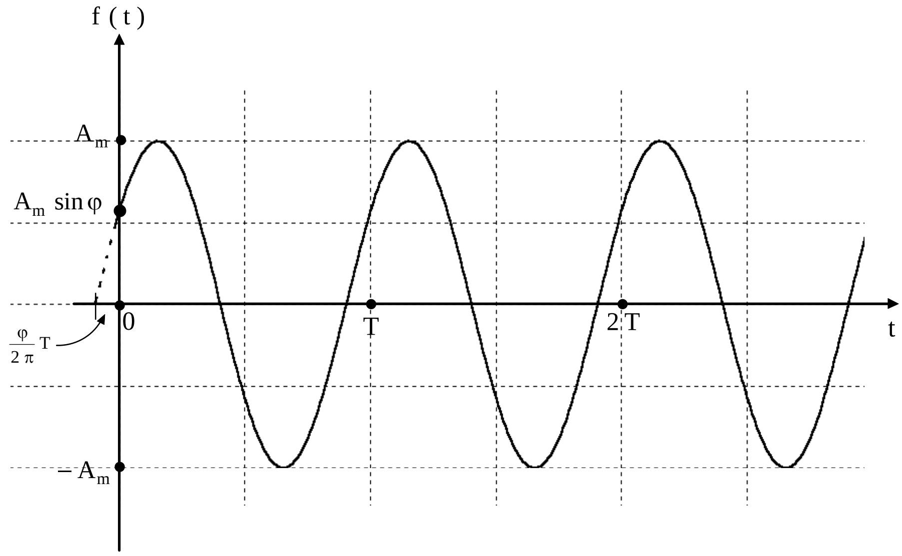
γ) Με την ημιτονοειδή συνάρτηση μπορούν να περιγραφούν και να μελετηθούν συνθετότερα σήματα (περιοδικά ή όχι) μέσω της ανάλυσης Fourier (όπως θα δούμε στα επόμενα)

Μια ημιτονοειδής συνάρτηση $f(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$ χαρακτηρίζεται πλήρως από 3 μεγέθη:

- Το πλάτος A_m (με μονάδα ανάλογη του φυσικού μεγέθους που περιγράφεται)
- Την κυκλική συχνότητα ω (rad /sec)
- Την αρχική φάση φ (rad ή μοίρες)

Το μέγεθος $\omega t + \varphi$ (rad), δηλ. το όρισμα, λέγεται φάση της ημιτονοειδούς συνάρτησης Επίσης το μέγεθος $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (sec) λέγεται περίοδος της ημιτονοειδούς συνάρτησης και το αντίστροφο της περιόδου $f = \dfrac{1}{T}$ (Hz = sec^{-1}) λέγεται συχνότητα. Ο χρόνος μιας πλήρους περιόδου T , αντιστοιχεί προφανώς σε 2π rad (ακτίνια)

Παρακάτω δίνεται μια τυπική γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης $f(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$



Παρατηρείστε ότι για $t = 0$ η τιμή είναι $f(0) = A_m \sin\varphi$

Το χρονικό διάστημα αριστερά του μηδενός το οποίο απαιτείται για να μηδενιστεί η $f(t)$ είναι ίσο με $\frac{\varphi}{2\pi} T$.

Γενικά γωνία φ_0 (rad) αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα $\Delta t_0 = \frac{\varphi_0}{2\pi} T$ (sec)

Αντί για την ημιτονοειδή συνάρτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για την περιγραφή των ίδιων φαινομένων, και η συνημιτονοειδής συνάρτηση

$$f(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Υπενθυμίζονται από την Τριγωνομετρία οι σχέσεις:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{και} \qquad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

άρα:

$$f(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi) = A_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

και αντίστοιχα:

$$f(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi) = A_m \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Δηλαδή η περιγραφή ενός μεγέθους με ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή συνάρτηση σημαίνει απλά μια μετατόπιση στη φάση κατά + ή - π/2 rad (ή αντίστοιχα + ή - 90 μοίρες).

Στην πράξη είναι ορθότερο, κατά την μελέτη των προβλημάτων, να χρησιμοποιείται **μόνον** ή μία από τις δύο μορφές δηλαδή να εκφράζουμε **όλα** τα μεγέθη με ημιτονοειδείς ή **όλα** με συνημιτονοειδείς συναρτήσεις.

Σε ολόκληρο το σύγγραμμα αυτό επιλέγεται η έκφραση με ημιτονοειδείς συναρτήσεις.

9. 2) Παράσταση ημιτονοειδών συναρτήσεων με χρήση μιγαδικών αριθμών

Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά, ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύει η παρακάτω ταυτότητα (τύπος του Euler):

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Άρα αν θεωρήσουμε τον μιγαδικό αριθμό (η ακριβέστερα την μιγαδική συνάρτηση)

$$\overline{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Ο μιγαδικός $\overline{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ έχει σταθερό μέτρο A_m και όρισμα το οποίο αυξάνει γραμμικά συναρτήσει του χρόνου t. Αυτό σημαίνει ότι ο $\overline{A}(t)$ εκτελεί, στο μιγαδικό επίπεδο, ομαλή κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω.

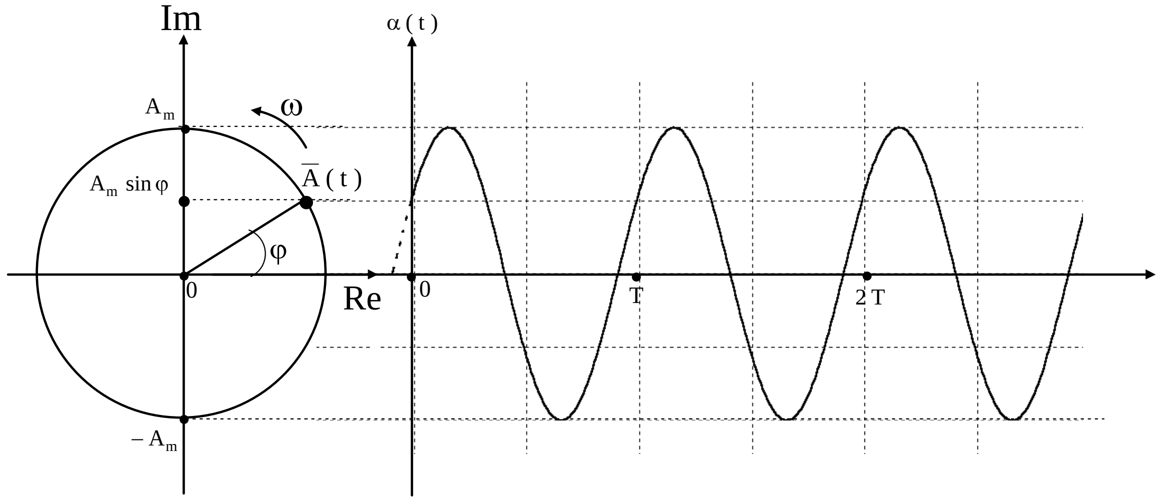
Με εφαρμογή του τύπου του Euler έχουμε:

$$\overline{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)} = A_m \cos(\omega t + \varphi) + j A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$\mathrm{Re}\left\{\overline{A}(t)\right\} = A_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{και} \quad \mathrm{Im}\left\{\overline{A}(t)\right\} = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

δηλαδή το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $\overline{A}(t)$ είναι, αντίστοιχα, μια συνημιτονοειδής και μια ημιτονοειδής συνάρτηση.



Επιλέγουμε στο σημείο αυτό την χρήση της ημιτονοειδούς συνάρτησης (*) (φανταστικό μέρος)

(*) Εξ΄ ίσου θα μπορούσαμε να επιλέξουμε την συνημιτονοειδή συνάρτηση (πραγματικό μέρος)

Άρα: $$A_m \sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\left\{A_m\, e^{\,j(\omega t + \varphi)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{A_m\, e^{\,j\varphi}\, e^{\,j\omega t}\right\}$$

Στο σημείο αυτό κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση:

Έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε ένα άθροισμα ή μία διαφορά δύο ημιτονοειδών συναρτήσεων με την **ίδια κυκλική συχνότητα ω.** Από την Τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι το αποτέλεσμα είναι επίσης μια ημιτονοειδής συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα ω. Στην περίπτωση λοιπόν που έχουμε να υπολογίσουμε ένα τέτοιο αλγεβρικό άθροισμα μπορούμε, για την περιγραφή των ημιτονοειδών συναρτήσεων, αντί του στρεφομένου μιγαδικού αριθμού:

$$\overline{A}(t) = A_m\, e^{\,j(\omega t + \varphi)} = A_m\, e^{\,j\varphi}\, e^{\,j\omega t}$$

να χρησιμοποιήσουμε τον **σταθερό** μιγαδικό:

$$\overline{A} = A_m\, e^{\,j\varphi}$$

Αυτό φαίνεται εύκολα με βάση τον παρακάτω συλλογισμό:

έστω:

$$\alpha_1(t) = A_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) = \mathrm{Im}\left\{A_{m1}\, e^{\,j(\omega t + \varphi_1)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{A_{m1}\, e^{\,j\varphi_1}\, e^{\,j\omega t}\right\} \quad \text{και}$$

$$\alpha_2(t) = A_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2) = \mathrm{Im}\left\{A_{m2}\, e^{\,j(\omega t + \varphi_2)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{A_{m2}\, e^{\,j\varphi_2}\, e^{\,j\omega t}\right\}$$

τότε

$$\alpha_1(t) \pm \alpha_2(t) = \mathrm{Im}\left\{A_{m1}\, e^{\,j\varphi_1}\, e^{\,j\omega t}\right\} \pm \mathrm{Im}\left\{A_{m2}\, e^{\,j\varphi_2}\, e^{\,j\omega t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Im}\left\{A_{m1}\, e^{\,j\varphi_1}\, e^{\,j\omega t} \pm A_{m2}\, e^{\,j\varphi_2}\, e^{\,j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{e^{\,j\omega t}\left(A_{m1}\, e^{\,j\varphi_1} \pm A_{m2}\, e^{\,j\varphi_2}\right)\right\} =$$

$$= \mathrm{Im}\left\{e^{\,j\omega t}\, A_{m0}\, e^{\,j\varphi_0}\right\} = \mathrm{Im}\left\{A_{m0}\, e^{\,j(\omega t + \varphi_0)}\right\}$$

όπου: $A_{m0}\, e^{\,j\varphi_0} = A_{m1}\, e^{\,j\varphi_1} \pm A_{m2}\, e^{\,j\varphi_2}$

άρα: $\alpha_1(t) \pm \alpha_2(t) = \mathrm{Im}\left\{A_{m0}\, e^{\,j(\omega t + \varphi_0)}\right\} = A_{m0} \sin(\omega t + \varphi_0)$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό, με χρήση στρεφομένων μιγαδικών αριθμών, της παράστασης

$$A_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) \pm A_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2) = A_{m0} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

ο όρος $e^{\,j\omega t}$ δεν υπεισέρχεται στους υπολογισμούς του πλάτους A_{m0} και της γωνίας φ_0 και κατά συνέπεια μπορεί (προσωρινά) να απαλειφθεί.

Είναι προφανές ότι αντί για αλγεβρικό άθροισμα μόνον δύο ημιτονοειδών όρων, μπορούμε να έχουμε αλγεβρικό άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού ημιτονοειδών όρων, με την προϋπόθεση να έχουν όλοι την **ίδια κυκλική συχνότητα ω.**

Συνοψίζουμε εδώ την μεθοδολογία:

Η ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$\alpha(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

μπορεί να παρασταθεί από τον στρεφόμενο μιγαδικό αριθμό:

$$\overline{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

ο οποίος αποκαλείται και στροφέας ή phasor

Πρακτικά όμως χρησιμοποιείται ο σταθερός μιγαδικός αριθμός:

$$\overline{A} = A_m e^{j\varphi}$$

Αντίστροφα αν είναι γνωστός ο $\overline{A} = A_m e^{j\varphi}$ και η κυκλική συχνότητα ω , τότε η ημιτονοειδής συνάρτηση α (t) προκύπτει από τη σχέση:

$$\alpha(t) = \operatorname{Im}\left\{\overline{A} e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Im}\left\{A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right\} = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Με την χρήση των μιγαδικών αριθμών οι πράξεις μεταξύ ημιτονοειδών συναρτήσεων ανάγονται σε πράξεις μιγαδικών αριθμών. Έτσι αποφεύγονται πολύπλοκες τριγωνομετρικές εκφράσεις και αντικαθίστανται από απλή μιγαδική άλγεβρα.

Ας δούμε παρακάτω δύο απλές εφαρμογές:

9. 3) Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 1)</u> Η έκφραση $f(t) = \alpha_1 \sin \omega t + \alpha_2 \cos \omega t$ όπου τα α_1 και α_2 πραγματικοί αριθμοί (θετικοί ή αρνητικοί) μπορεί να γραφεί και ως:

$$f(t) = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi)$$

τα μεγέθη α_m και φ υπολογίζονται ως εξής:

- ο όρος $\alpha_1 \sin \omega t$ αν $\alpha_1 > 0$ παριστάνεται με στροφέα $\overline{A}_1 = \alpha_1$

-ο όρος $\alpha_2 \cos \omega t = \alpha_2 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ αν $\alpha_2 > 0$ παριστάνεται με στροφέα $\overline{A}_2 = \alpha_2 e^{j\frac{\pi}{2}}$

Προσθέτοντας τους στροφείς $\overline{A}_1$ και $\overline{A}_2$ θα πάρουμε:

$$\overline{F} = \alpha_1 + \alpha_2 e^{j\frac{\pi}{2}} = \alpha_1 + j\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}$$

άρα: $$f(t) = \operatorname{Im}\left\{\overline{F} e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, \sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right)$$

συνεπώς $\alpha_m = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ και $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$

Προσοχή όμως χρειάζεται στον σωστό υπολογισμό της γωνίας $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ **ανάλογα με τα πρόσημα των α_1 και α_2 !**

Δίνουμε παρακάτω δύο αριθμητικά παραδείγματα της εφαρμογής αυτής

Παράδειγμα 2)

Η έκφραση f (t) = 5 sin (10 t) + 7 cos (10 t) γράφεται:

5 sin (10 t) $\rightarrow$ στροφέας $\overline{A}_1 = 5$

7 cos (10 t) = 7 sin (10 t + π/2) $\rightarrow$ στροφέας $\overline{A}_2 = 7\,e^{j\frac{\pi}{2}} = j\,7$

άρα: $\overline{F} = \overline{A} + \overline{A}_2 = 5 + j\,7 = \sqrt{5^2 + 7^2}\;e^{j\tan^{-1}\left(\frac{7}{5}\right)} = 8.602\,e^{j\,0.95}$

και f (t) = 8.602 sin (10 t + 0.95)

ή σε μοίρες f (t) = 8.602 sin (10 t + 54.46^o)

Παράδειγμα 3)

Η έκφραση f (t) = 3 sin (20 t) - 2 cos (20 t) γράφεται:

3 sin (20 t) $\rightarrow$ στροφέας $\overline{A}_1 = 3$

- 2 cos (20 t) = -2 sin (20 t + π/2) = 2 sin (20 t + π/2 – π) $\rightarrow$ στροφέας $\overline{A}_2 = 2\,e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\,2$

άρα: $\overline{F} = \overline{A} + \overline{A}_2 = 3 - j\,2 = \sqrt{3^2 + 2^2}\;e^{j\tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)} = 3.606\,e^{-j\,0.59}$

και f (t) = 3.606 sin (20 t - 0.59)

ή σε μοίρες f (t) = 3.606 sin (20 t - 33.7^o)

<u>Παράδειγμα 4)</u>

Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$f(t) = 6\sin(100t - 0.23) + 5\sin(100t + 0.78) - 3\sin(100t + 1.23) + 2\sin(100t - 0.56)$

(οι γωνίες σε rad)

οι αντίστοιχοι στροφείς θα είναι:

$6\sin(100t - 0.23) \rightarrow \overline{\alpha}_1 = 6e^{-j0.23} = 5.842 - j1.368$

$5\sin(100t + 0.78) \rightarrow \overline{\alpha}_2 = 5e^{j0.78} = 3.554 + j3.516$

$-3\sin(100t + 1.23) = 3\sin(100t + 1.23 - \pi) = 3\sin(100t - 1.91) \rightarrow \overline{\alpha}_3 = 3e^{-j1.91} =$

$= -0.998 - j2.829$

$2\sin(100t - 0.56) \rightarrow \overline{\alpha}_4 = 2e^{-j0.56} = 1.694 - j1.062$

άρα: $\overline{f} = \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 + \overline{\alpha}_3 + \overline{\alpha}_4 = 10.092 - j1.743 = 10.241e^{-j0.17}$

συνεπώς: $f(t) = \mathrm{Im}\left\{ \overline{f}\, e^{j100t} \right\} = 10.241\sin(100t - 0.17)$

ή σε μοίρες $f(t) = 10.241\sin(100t - 9.7^{o})$