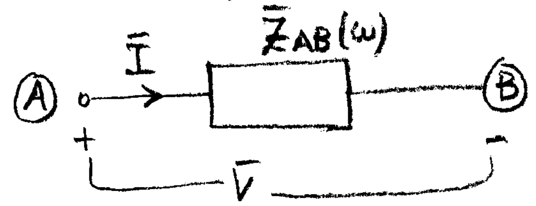
10.6) Γραφική παράσταση της $\bar{Z}(\omega)$

Γενικά θα έχουμε



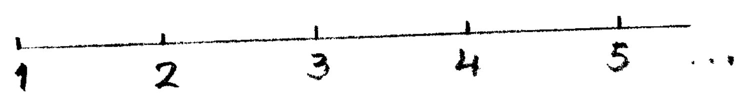
$$\bar{Z}_{AB}(\omega) = \underbrace{R_{AB}(\omega) + j\,X_{AB}(\omega)}_{\text{καρτεσιανή μορφή}} = \underbrace{|\bar{Z}_{AB}(\omega)|\, e^{j\varphi_{Z_{AB}}(\omega)}}_{\text{πολική - εκθετική μορφή}}$$

Παριστάνουμε το μέτρο και την φάση της $\bar{Z}(\omega)$ σε 2 διαγράμματα (ξεχωριστά)

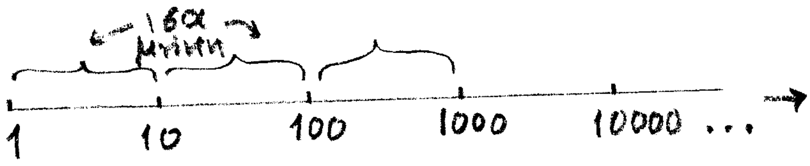
Στον οριζόντιο άξονα έχουμε συνήθως <u>λογαριθμική κλίμακα</u> (*)

Ακολουθούν παραδείγματα γραφικών παραστάσεων $|\bar{Z}_{AB}(\omega)|$, $\varphi_{Z_{AB}}(\omega)$

(*) τι σημαίνει λογαριθμική κλίμακα?



→ γραμμική κλίμακα



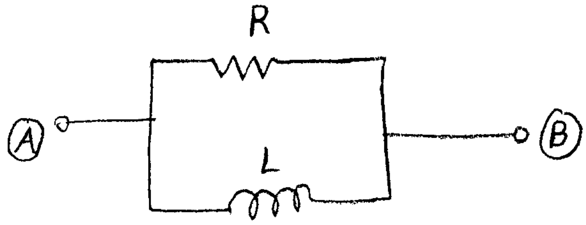
→ λογαριθμική κλίμακα (μεγαλύτερο εύρος τιμών)

<u>Δεν χάνω λεπτομέρειες!</u>

(στη λογαριθμική κλίμακα ΔΕΝ υπάρχει 0)

Παράδειγμα 1

- Να μελετηθεί η $\bar{Z}_{AB}$ στην παρακάτω συνδεσμολογία



$$\bar{Z}_{AB}(\omega) = R \,//\, j\omega L = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R \cdot j\omega L (R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)}$$

$$\Rightarrow \bar{Z}_{AB}(\omega) = \frac{j\omega R^2 L + \omega^2 R L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

άρα $\bar{Z}_{AB}(\omega) = R_{AB}(\omega) + j\, X_{AB}(\omega) \Rightarrow$

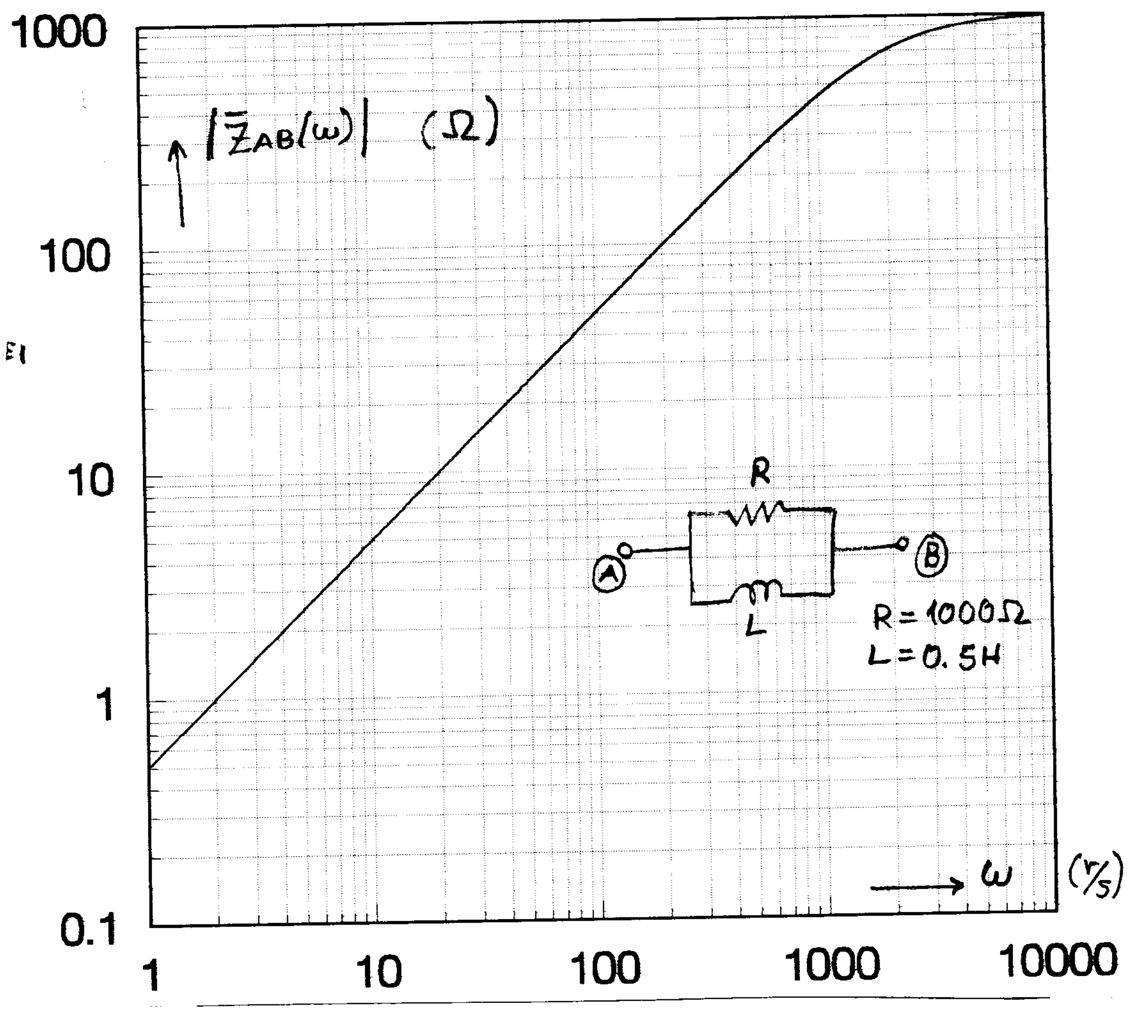
$$\boxed{\bar{Z}_{AB}(\omega) = \frac{\omega^2 R L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

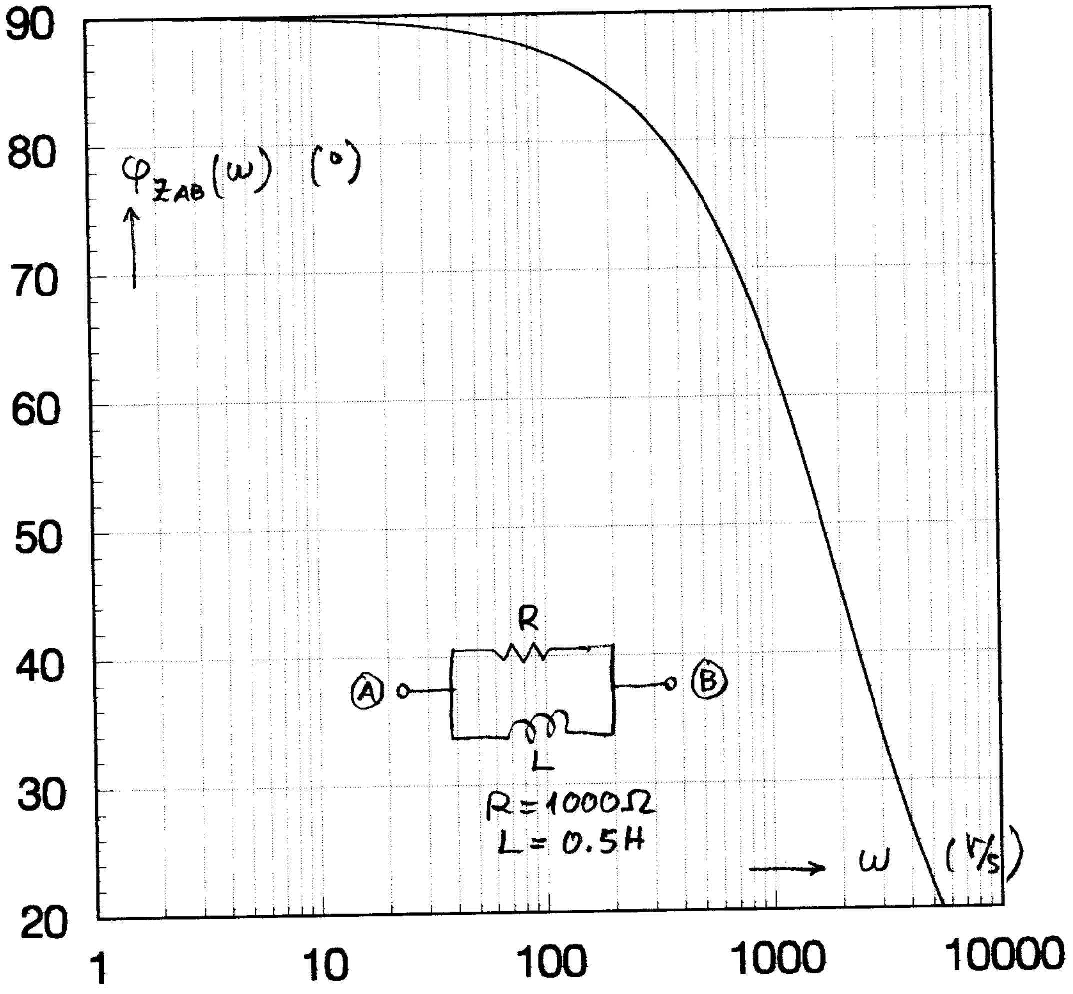
Παρατηρείστε ότι: - για $\omega = 0$, $\bar{Z}_{AB} = 0 + j0$ (λόγω του πηνίου παρ/λα)
- για $\omega \to \infty$ $\bar{Z}_{AB} \to R$ (γιατί ?)

Στο δίπλανο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του μέτρου $|\bar{Z}_{AB}(\omega)|$ συναρτήσει του ω

Έχουν επιλεγεί οι τιμές $R = 1000\Omega$, $L = 0.5H$

Και οι δύο άξονες έχουν λογαριθμική κλίμακα





Εδώ έχουμε την γραφική παράσταση της φάσης $\varphi_{Z_{AB}}(\omega)$ συναρτήσει του ω

έχουμε $\varphi_{Z_{AB}}(\omega) = \tan^{-1}\left(\dfrac{X_{AB}(\omega)}{R_{AB}(\omega)}\right)$

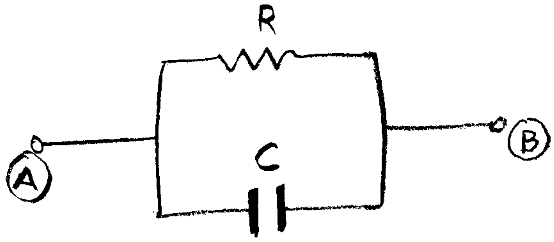
ή $\varphi_{Z_{AB}}(\omega) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega R^2 L}{\omega^2 R L^2}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{R}{\omega L}\right)$

Παρατηρείστε ότι

- για $\omega \to 0$ $\quad \varphi_{Z_{AB}}(\omega) \to 90^\circ$ (υπερισχύει το πηνίο)
- για $\omega \to \infty$ $\quad \varphi_{Z_{AB}}(\omega) \to 0^\circ$ (υπερισχύει η αντίσταση)

Παράδειγμα 2

Να μελετηθεί η $\bar{Z}_{AB}$ στην παρακάτω συνδεσμολογία



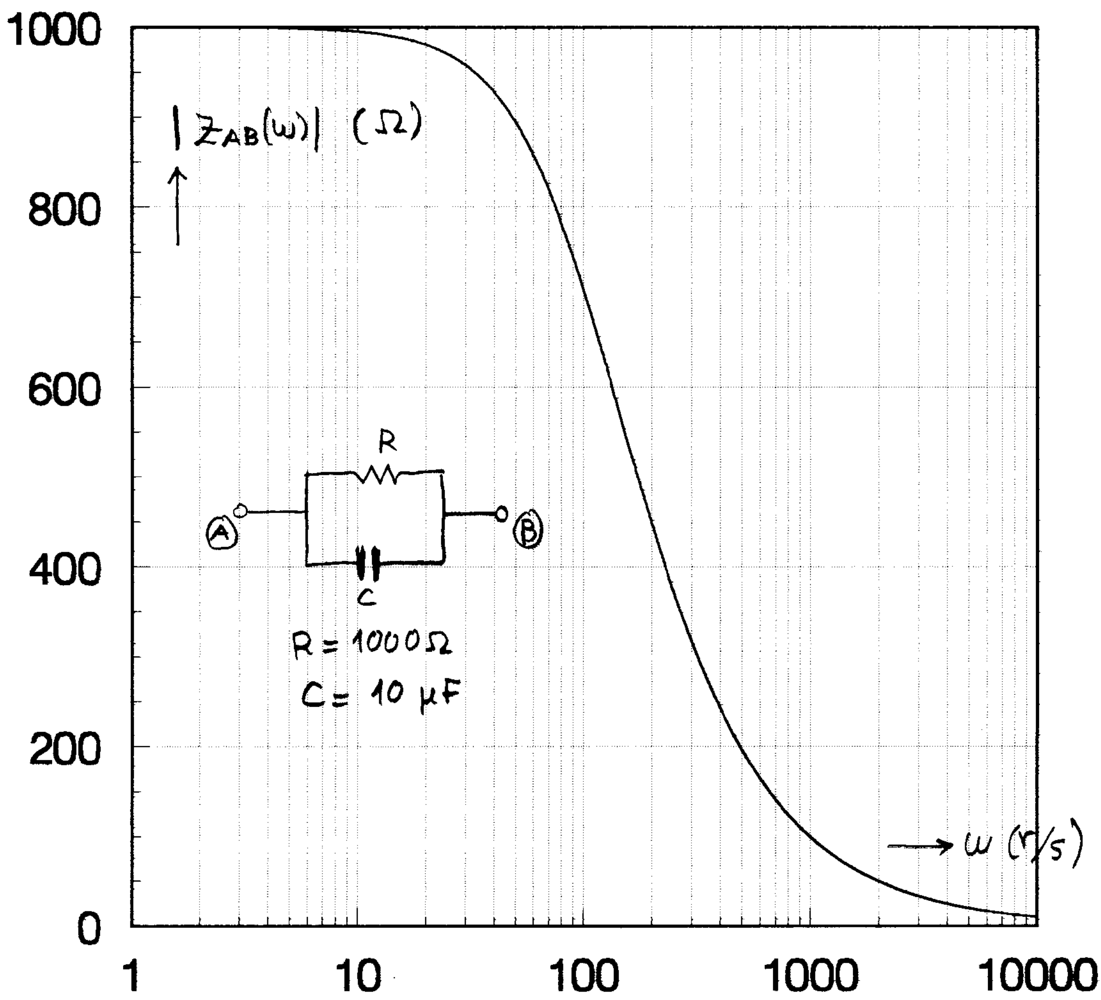
$$\bar{Z}_{AB}(\omega) = R \,//\, \frac{1}{j\omega C} = \frac{R\cdot\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{\frac{j\omega RC+1}{j\omega C}} = \frac{R}{1+j\omega RC}$$

ή $$\bar{Z}_{AB}(\omega) = \frac{R(1-j\omega RC)}{(1+j\omega RC)(1-j\omega RC)} = \frac{R - j\omega R^2 C}{1+\omega^2 R^2 C^2}$$

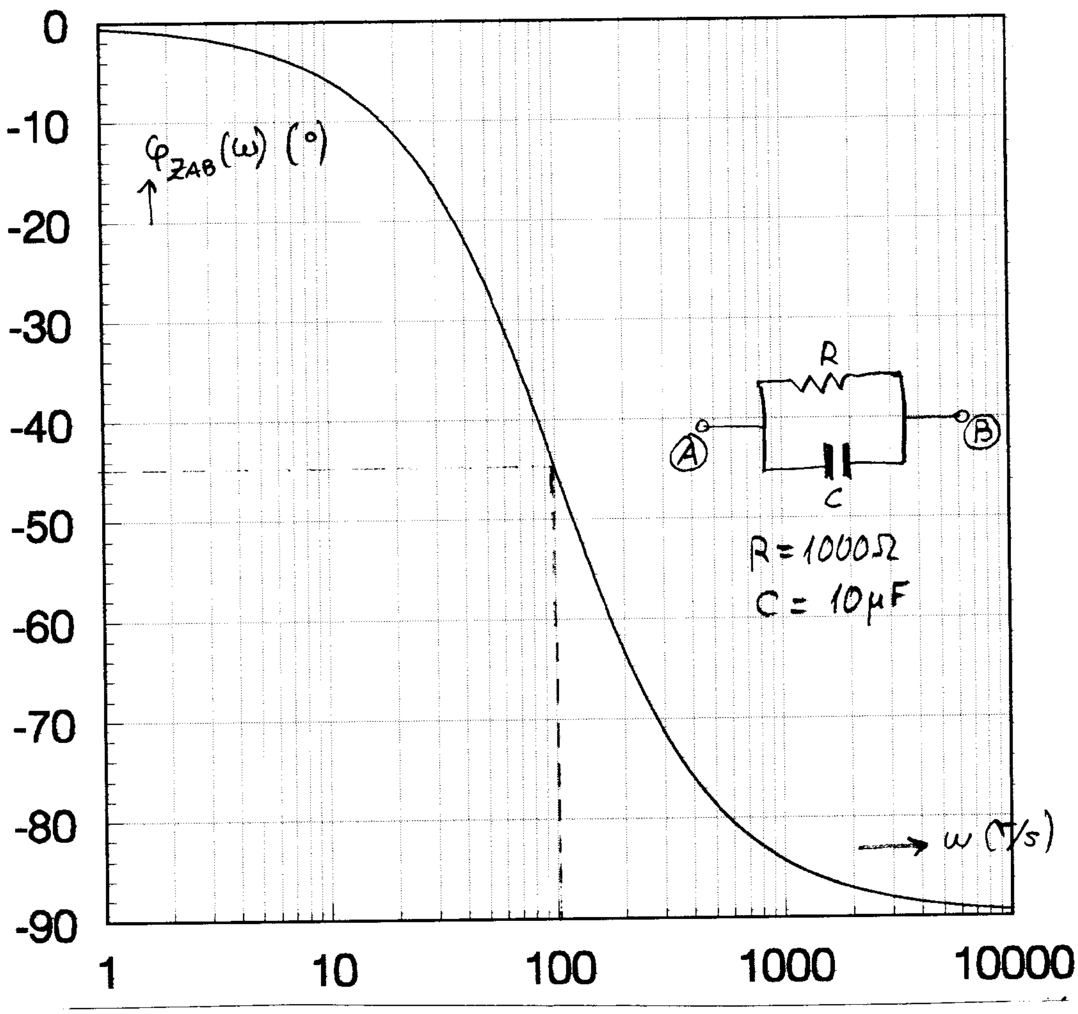
άρα $$\boxed{\bar{Z}_{AB}(\omega) = R_{AB}(\omega) + jX_{AB}(\omega) = \frac{R}{1+\omega^2R^2C^2} - j\,\frac{\omega R^2 C}{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

για $\omega = 0$ $\bar{Z}_{AB} = R$ (γιατί;)

για $\omega \to \infty$ $\bar{Z}_{AB} \to 0 + j0$



Γραφική παράσταση του μέτρου $|\bar{Z}_{AB}(\omega)|$ συναρτήσει του ω



$$\varphi_{Z_{AB}}(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{X_{AB}(\omega)}{R_{AB}(\omega)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{Z_{AB}}(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega R^2 C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(-\omega R C\right)$$

για $\omega = 0$ $\quad \varphi_{Z_{AB}}(\omega) = 0^\circ$ (καθαρή αντίσταση)

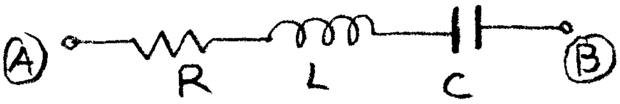
για $\omega \to \infty$ $\quad \varphi_{Z_{AB}}(\omega) \to -90^\circ$ (πυκνωτής)

για $\omega = 100$ r/s $\quad \varphi_{Z_{AB}}(\omega) = \tan^{-1}\left(-100 \cdot 1000 \cdot 10\times10^{-6}\right)$

$$= \tan^{-1}(-1) = -45^\circ$$

Παράδειγμα 3

Να μελετηθεί η $\bar{Z}_{AB}(\omega)$ στην συνδεσμολογία R-L-C σειράς



$$\bar{Z}_{AB}(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$$

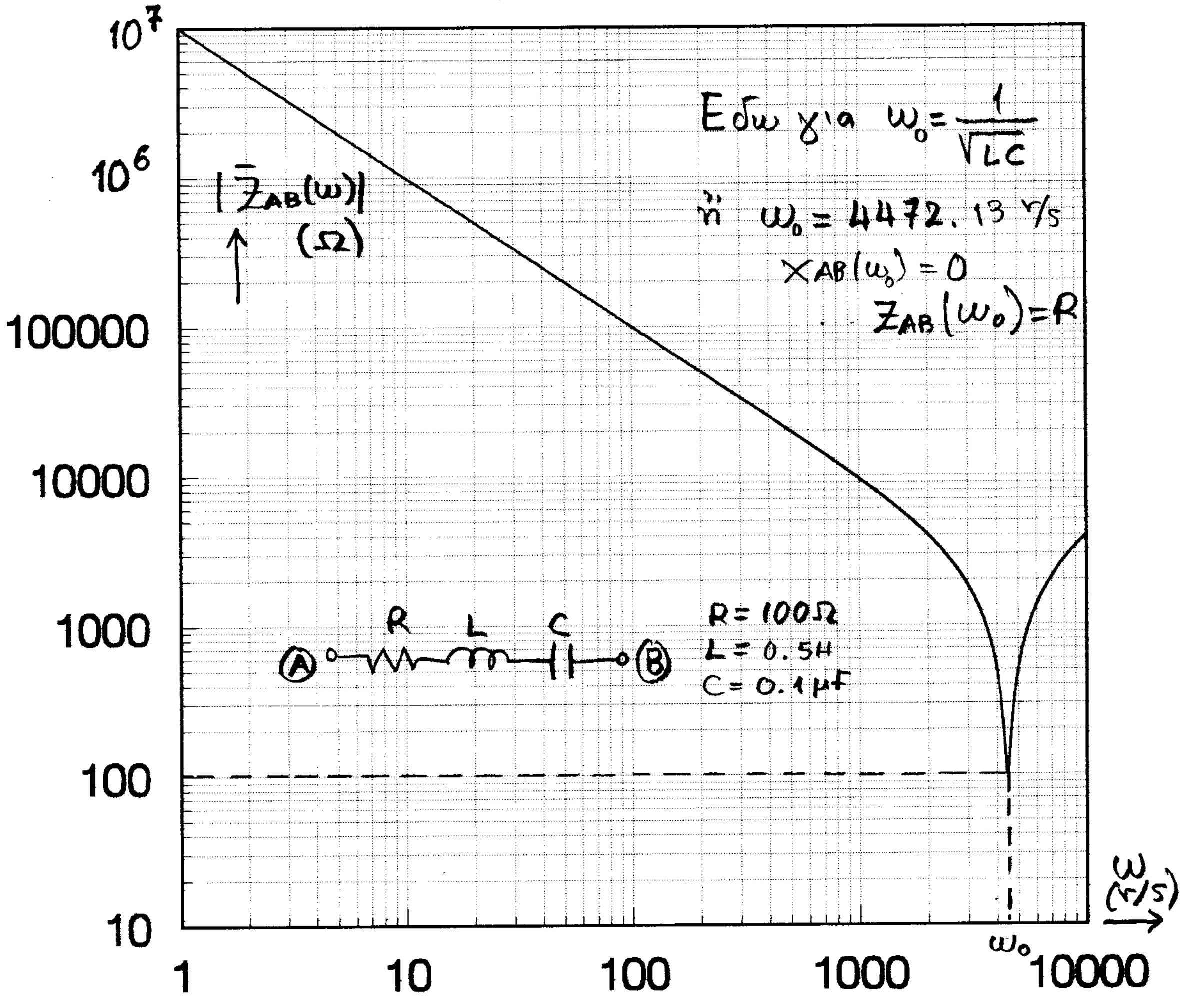
$$\Rightarrow \bar{Z}_{AB}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

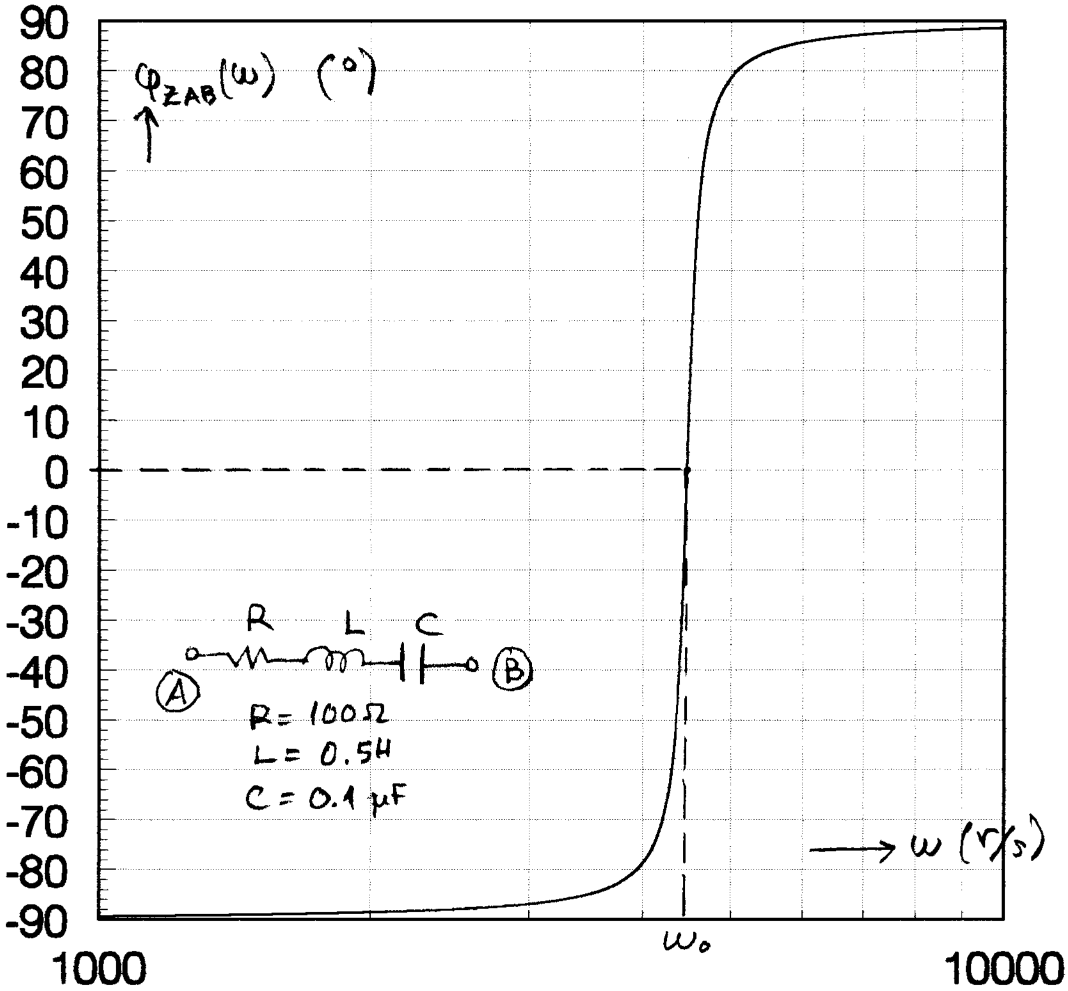
ή $$\boxed{\bar{Z}_{AB}(\omega) = R_{AB}(\omega) + jX_{AB}(\omega) = R + j\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}}$$

για $\omega \to 0$ $\quad \bar{Z}_{AB} \to R - j\infty = -j\infty$ (πυκνωτής)

για $\omega \to \infty$ $\quad \bar{Z}_{AB} \to R + j\infty = j\infty$ (πηνίο)

Παρατηρούμε ότι όταν $\omega^2 LC - 1 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ τότε $X_{AB}(\omega) = 0$ (καθαρά ωμική συμπεριφορά)





$$\varphi_{Z_{AB}}(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{X_{AB}(\omega)}{R_{AB}(\omega)}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_{Z_{AB}}(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega^2 LC-1}{\omega C}}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)$$

για $\omega \to 0$ $\quad \varphi_{Z_{AB}}(\omega) \to \tan^{-1}(-\infty) = -90^\circ$ (πυκνωτης)

για $\omega \to \infty$ $\quad \varphi_{Z_{AB}}(\omega) \to \tan^{-1}(+\infty) = +90^\circ$ (πηνίο)

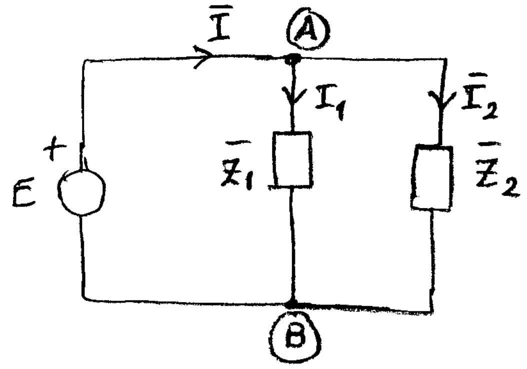
όταν $\omega = \omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ τότε $\varphi_{Z_{AB}}(\omega) = \tan^{-1}(0) = 0^\circ$

(καθαρά ωμική συμπεριφορά)

10.7) Εφαρμογές σε κυκλώματα Ε.Ρ. – Χρήση μιγαδικών

Εφ 1

Δίδεται το κύκλωμα



όπου $\bar{E} = 230\, e^{j60^\circ}$ V

$\bar{Z}_1 = 10 - j10\ \Omega$

$\bar{Z}_2 = 10 + j20\ \Omega$

$(\omega = 2\pi \cdot 50\ r/s)$

Ζητείται

α) Να γραφούν οι $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$ σε εκθετική μορφή

β) Να υπολογιστούν τα $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ και $\bar{I}$ και να γίνει το διανυσματικό διάγραμμά τους (επαλήθευση Ν.Ρ.Κ – – διανυσματικά)

α) $\bar{Z}_1 = 10 - j10 = 14.142\, e^{-j45^\circ}\ \Omega$

$\bar{Z}_2 = 10 + j20 = 22.360\, e^{j63.4^\circ}\ \Omega$

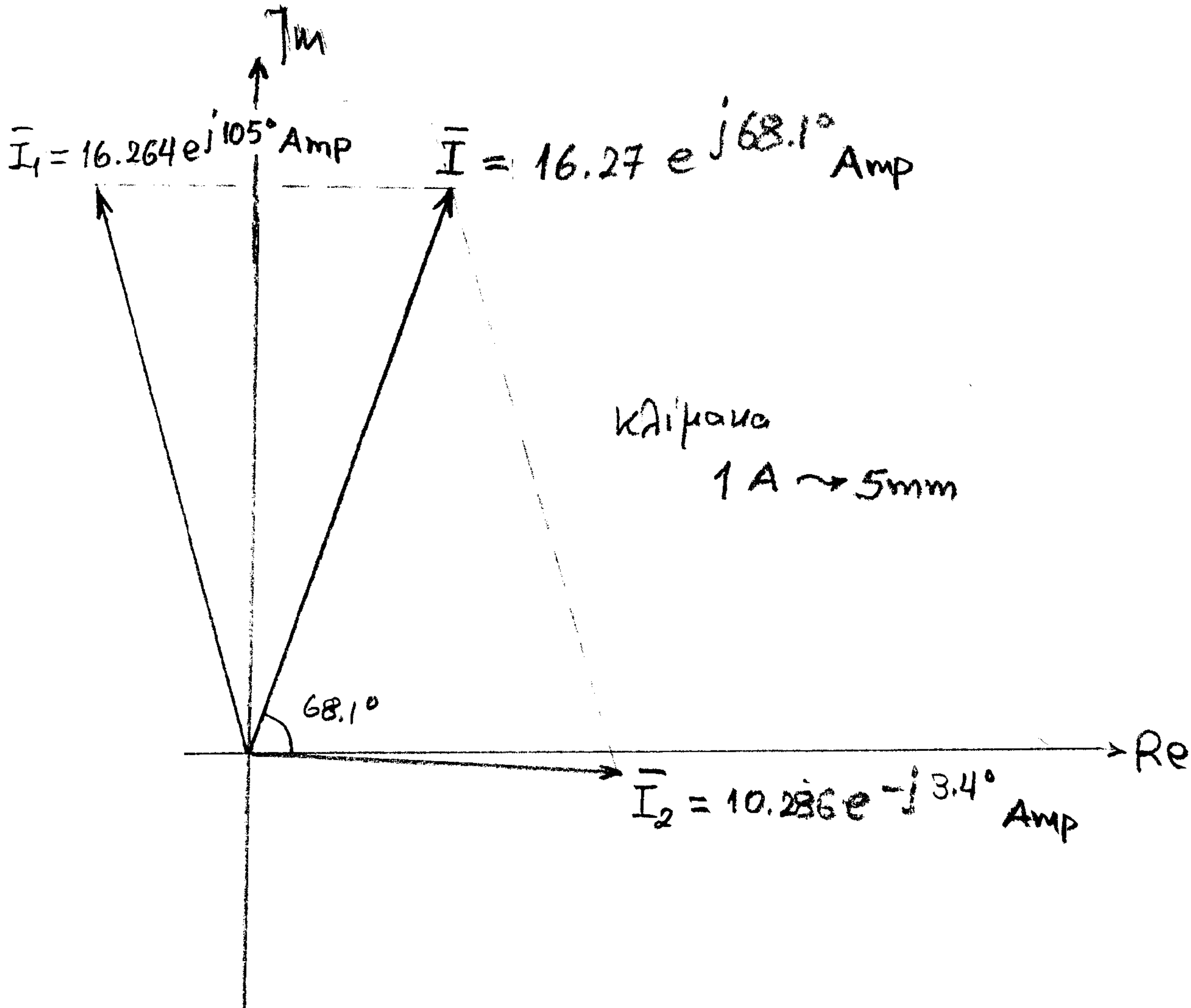
β) $$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_1} = \frac{230\, e^{j60^\circ}}{14.142\, e^{-j45^\circ}} = 16.264\, e^{j105^\circ} \text{ Amp}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_2} = \frac{230\, e^{j60^\circ}}{22.360\, e^{j63.4^\circ}} = 10.286\, e^{-j3.4^\circ} \text{ Amp}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 16.264\, e^{j105^\circ} + 10.286\, e^{-j3.4^\circ} =$$

$$= -4.209 + j15.709 + (10.268 - j0.610) =$$

$$= 6.059 + j15.099 = 16.27\, e^{j68.1^\circ} \text{ Amp}$$



Προφανώς στο πεδίο του χρόνου θα έχουμε

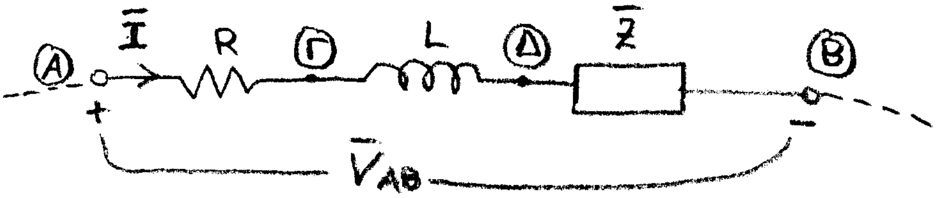
$$i_1(t) = 16.264 \sin(2\pi 50 t + 105°) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 10.286 \sin(2\pi 50 t - 3.4°) \text{ A}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 16.27 \sin(2\pi \cdot 50 t + 68.1°) \text{ A}$$

$\boxed{\text{Εφ. 2}}$

Δίδεται η συνδεσμολογία



και τα δεδομένα $f = 50\,Hz$ $(\omega = 2\pi \cdot 50\ r/sec)$

$R = 5\Omega$, $L = 10\,mH$,

$\bar{I} = 4 + j3\,A$ (phasor), $\bar{V}_{AB} = 25 + j35\ V$ (phasor)

Ζητείται να βρεθούν

1) οι τάσεις $\bar{V}_{A\Gamma}$, $\bar{V}_{\Gamma\Delta}$, $\bar{V}_{\Delta B}$

2) Η τιμή της $\bar{Z}$

Απ/ αρχικά υπολογίζω $\boxed{\bar{I} = 4+j3 = 5e^{j36.9^\circ} A}$, $\boxed{\bar{V} = 25+j35 = 43.01\,e^{j54.5^\circ} V}$

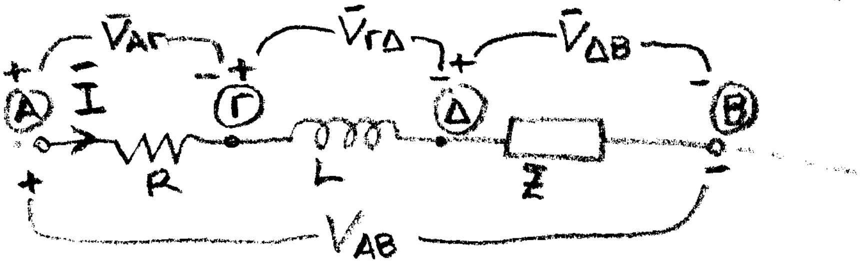
1) $\bar{V}_{A\Gamma} = R\bar{I} = 5 \cdot (4+j3) = 20 + j15 = 25e^{j36.9^\circ}\ V$

$$\bar{V}_{\Gamma\Delta} = j\omega L \cdot \bar{I} = j\,2\pi \cdot 50 \cdot 0.01 \cdot (4+j3) = j3.14159\,(4+j3)$$

$$= -9.425 + j\,12.566 = 15.707\,e^{j126.9^\circ}\ V$$

Προφανώς

$$\bar{V}_{AB} = \bar{V}_{A\Gamma} + \bar{V}_{\Gamma\Delta} + \bar{V}_{\Delta B} \quad \text{άρα} \quad \bar{V}_{\Delta B} = \bar{V}_{AB} - \bar{V}_{A\Gamma} - \bar{V}_{\Gamma\Delta}$$



άρα

$$\bar{V}_{AB} = 25 + j35 - (20 + j15) - (-9.425 + j12.566)\ V$$

$$\Rightarrow \bar{V}_{AB} = 14.425 + j7.434$$

$$\Rightarrow \bar{V}_{AB} = 16.228\, e^{j27.3^\circ}\ V$$

2) $$\bar{Z} = \frac{\bar{V}_{AB}}{\bar{I}} = \frac{16.228\, e^{j27.3^\circ}}{4 + j3}$$

$$= \frac{16.228\, e^{j27.3^\circ}}{5\, e^{j36.9^\circ}}$$

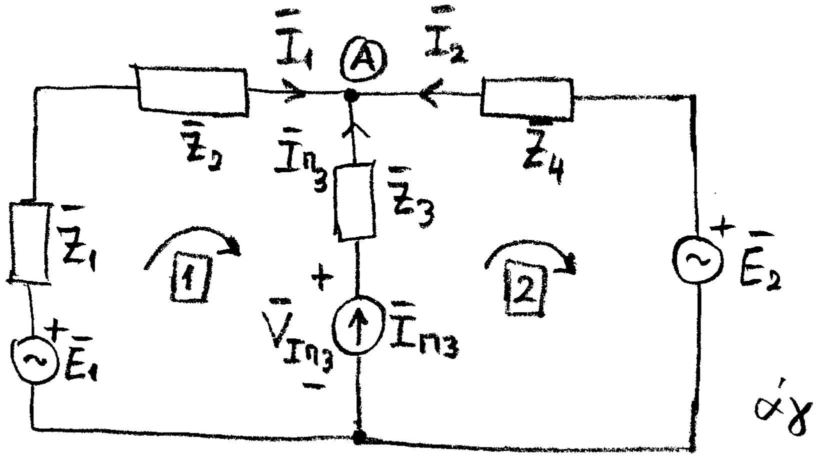
$$Z = 3.2456\, e^{-j9.6}$$

$$\boxed{\Rightarrow Z = 3.200 - j0.541\ \Omega}$$

Εφ 3.

Κατάστρωση εξισώσεων με Νόμους Kirchhoff

Δίδεται το δίκτυο:



γνωστά $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{Z}_4$

$\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{I}_{n_3}$

άγνωστοι: $\{\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{V}_{In_3}\}$

εξισώσεις Kirchhoff

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{NPK } (A) & \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_{n_3} = 0 \\
\text{N.T.K. } \boxed{1} & -\bar{E}_1 + \bar{I}_1(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) - \bar{I}_{n_3}\bar{Z}_3 + \bar{V}_{In_3} = 0 \\
\text{N.T.K. } \boxed{2} & -\bar{V}_{In_3} + \bar{I}_{n_3}\bar{Z}_3 - \bar{I}_2\bar{Z}_4 + \bar{E}_2 = 0
\end{array}\right\}$$

σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \bar{Z}_1+\bar{Z}_2 & 0 & 1 \\ 0 & -\bar{Z}_4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{V}_{In_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{I}_{n_3} \\ \bar{E}_1 - \bar{I}_{n_3}\bar{Z}_3 \\ -\bar{E}_2 - \bar{I}_{n_3}\bar{Z}_3 \end{bmatrix}$$