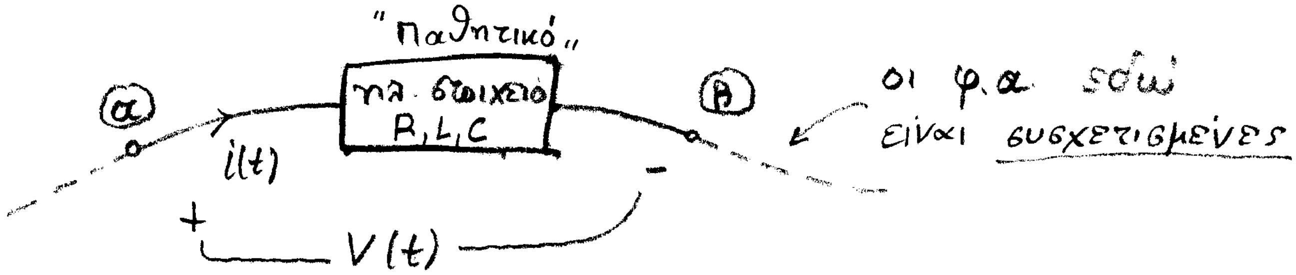
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

## Ισχύς στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση

### 11.1) Γενικά

- Έστω ένα ηλεκτρικό στοιχείο αποτελούμενο από τα βασικά στοιχεία R, L, C σε κάποια συνδεσμολογία




Σε πρώτη φάση θεωρούμε, όπως προαναφέραμε, ότι το ηλ. στοιχείο που μας ενδιαφέρει είναι παθητικό.

Εξετάζουμε τι γίνεται με την ισχύ που απορροφά το στοιχείο αυτό.

Επειδή βρισκόμαστε στην Η.Μ.Κ. θα έχουμε:

$$V(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_V) \quad \text{Volts}$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I) \quad \text{Amps}$$

η στιγμιαία ισχύς προφανώς θα είναι

$$p(t) = V(t) \cdot i(t)$$

άρα $p(t) = V_m I_m \sin(\omega t + \varphi_V) \sin(\omega t + \varphi_I)$ Watts

κάνουμε χρήση της Τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

και η p(t) γράφεται:

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I) - \frac{1}{2}\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)}$$

Παρατηρούμε ότι:

1) Η στιγμιαία ισχύς αποτελείται

- από ένα σταθερό όρο: $\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I)$
- ένα χρονικά μεταβαλλόμενο όρο:

$$-\frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$$

και ο όρος αυτός έχει διπλάσια συχνότητα από αυτήν της τάσεως και του ρεύματος

2) Η παράσταση

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I) - \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \left(\cos(\varphi_V - \varphi_I) - \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)\right)$$

είναι δυνατόν να πάρει και αρνητικές τιμές.

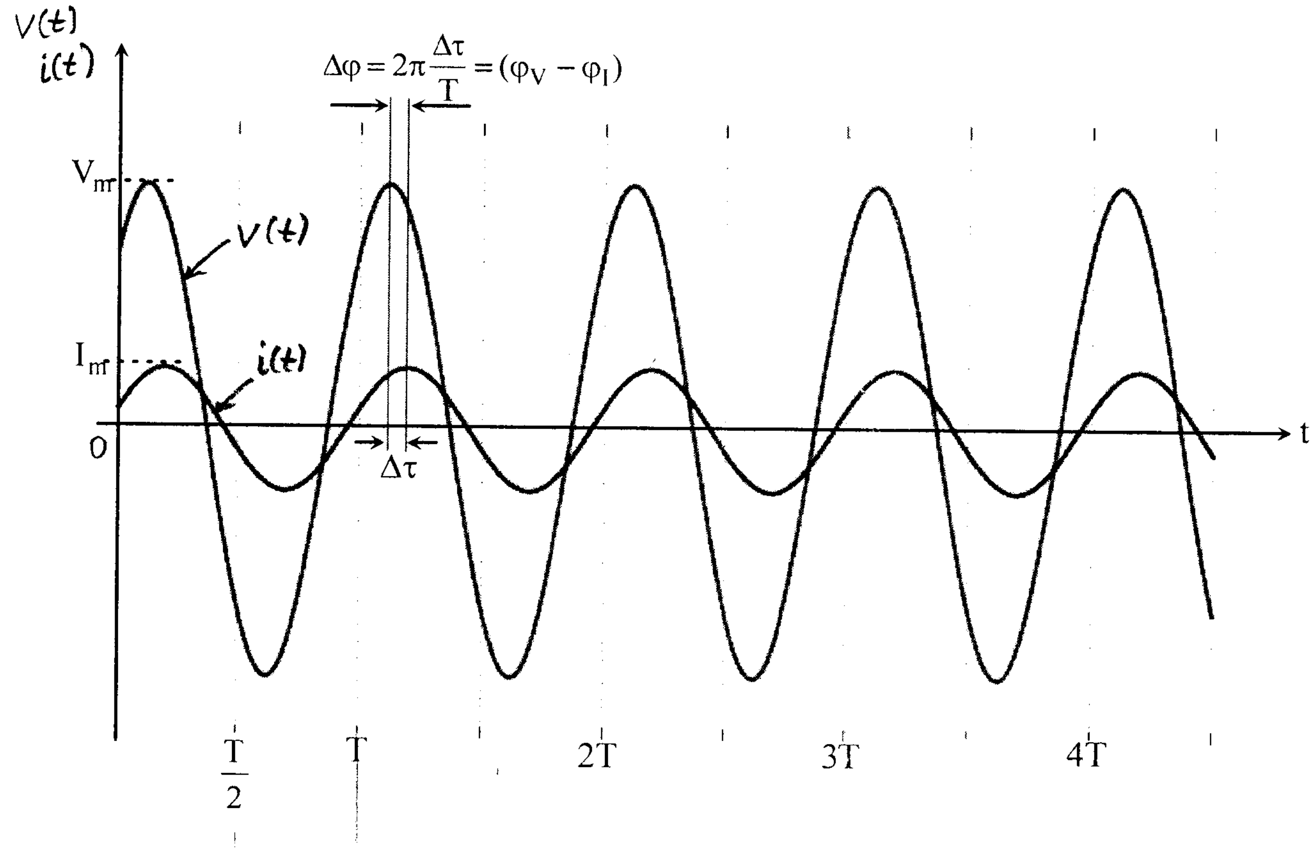
Αυτό γίνεται όταν $\cos(\varphi_V - \varphi_I) < 1$ δηλ όταν

$$|\varphi_V - \varphi_I| > 0^\circ$$

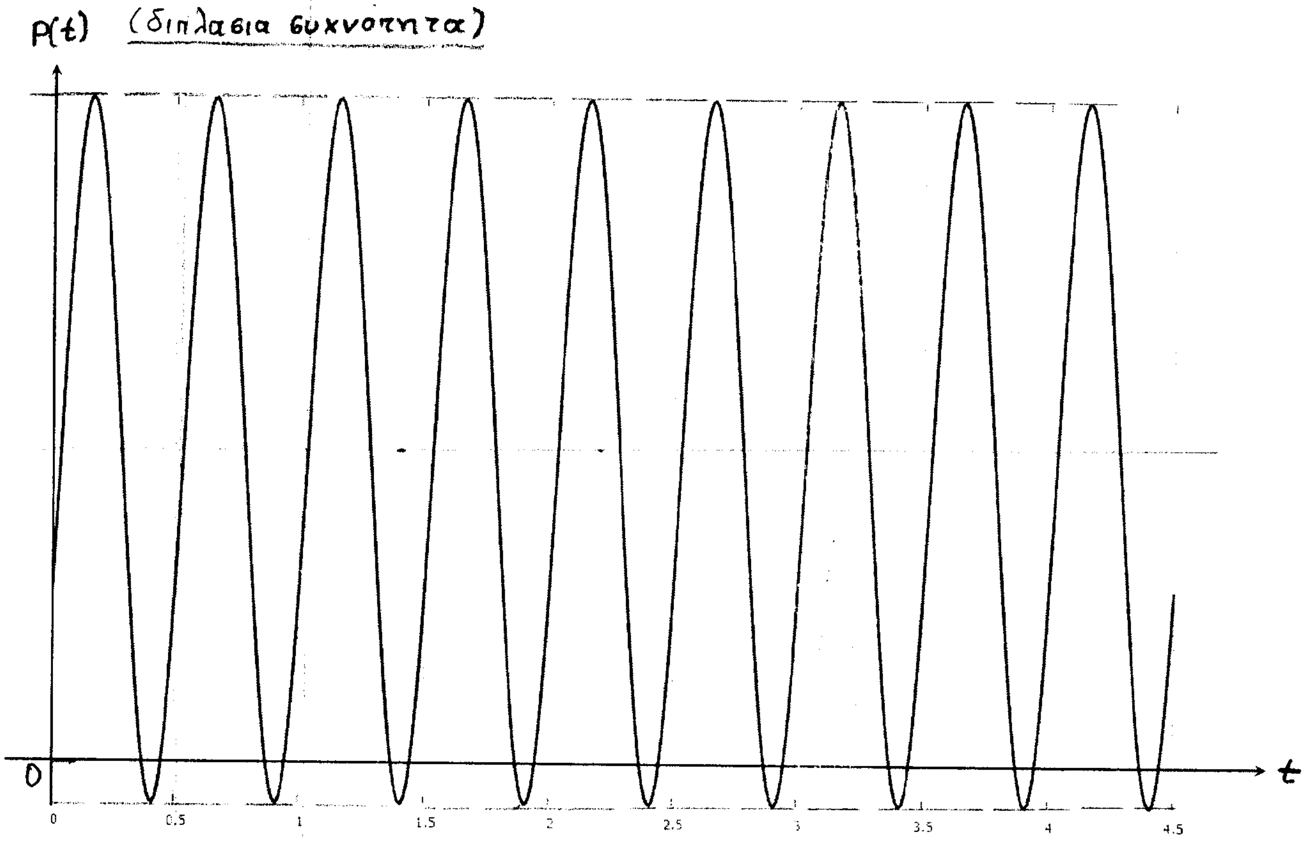
Στην περίπτωση αυτή το ηλ. στοιχείο (παθητικό) προσφέρει (στιγμιαία) ηλεκτρική ισχύ στον "έξω κόσμο"

Εξήγηση: Η ισχύς που προσφέρεται στον έξω κόσμο, προέρχεται από την αποθηκευμένη ενέργεια στα στοιχεία L, C που περιέχονται στο ηλεκτρικό στοιχείο που εξετάζουμε, δηλ είναι κατά κάποιο τρόπο ένα είδος "επιστροφής" ενέργειας (ή ισχύος) η οποία αρχικά ελήφθη από τον "έξω κόσμο"

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τυπικές γραφικές παραστάσεις των $V(t)$, $I(t)$, $P(t)$




$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I) - \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$$



## 11.2) Μέση ισχύς

η έκφραση $p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I) -$

$$- \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$$

δεν έχει πρακτική αξία γιατί είναι χρονικά μεταβαλλό-μενο μέγεθος και δεν είναι δυνατόν να λέμε την τάδε χρονική στιγμή η ισχύς είναι τόση, την άλλη χρονική στιγμή η ισχύς είναι τόση κ.λ.π. Προφανώς χρειαζόμαστε ένα σταθερό αριθμό με τον οποίο θα περιγράφεται η ισχύς. Ο αριθμός αυτός θα είναι η μέση τιμή της $p(t)$ και ονομάζεται

Μέση ισχύς $P_\mu$.

Άρα $$P_\mu = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\,dt \qquad \left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

επομένως

$$P_\mu = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I)\,dt -$$

$$- \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)\,dt$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα προφανώς ισχύει:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I)\,dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I) \cdot \frac{1}{T} \int_0^T dt =$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I)$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θα έχουμε

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)\, dt = 0$$

(ολοκληρώνω το $\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$ σε ακέραιο αριθμό περιόδων)

Άρα τελικά:

$$\boxed{P_\mu = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I)}$$

Στο σημείο αυτό κάνουμε τις εξής σκέψεις:

- Όπως προαναφέραμε το στοιχείο είναι παθητικό αποτελούμενο από R, L, C σε οποιαδήποτε συνδεσμολογία. Άρα:

η γωνία $\varphi_V - \varphi_I$ (διαφορά φάσεως τάσεως-ρεύματος) θα βρίσκεται μεταξύ των ορίων

$$-90^\circ \leq (\varphi_V - \varphi_I) \leq +90^\circ$$

όπου: $\varphi_V - \varphi_I = -90^\circ \Rightarrow \varphi_I = \varphi_V + 90^\circ$ (καθαρός πυκνωτής)

$\varphi_V - \varphi_I = 90^\circ \Rightarrow \varphi_V = \varphi_I + 90^\circ$ (καθαρό πηνίο)

$-90^\circ < (\varphi_V - \varphi_I) < 90^\circ$ (συνδυασμός πυκνωτή, πηνίου και ωμικής αντίστασης)

$\varphi_V - \varphi_I = 0^\circ$ (καθαρή ωμική αντίσταση)

Συνοψίζουμε λοιπόν:

– Μέση ισχύς $P_\mu = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_V - \varphi_I)$

ισχύει πάντα $P_\mu \geqslant 0$ διότι.

$-90^\circ \leqslant (\varphi_V - \varphi_I) \leqslant 90^\circ$ άρα $\cos(\varphi_V - \varphi_I) \geqslant 0$

Η μέση ισχύς είναι πάντα απορροφούμενη (ή έστω μηδενική) διότι αναφερόμαστε σε παθητικό ηλεκτρικό στοιχείο

Η γωνία $\varphi_V - \varphi_I$ συμβολίζεται με το απλό $\varphi$

όπη $\boxed{\varphi = \varphi_V - \varphi_I}$ (γωνία ισχύος)

άρα $\boxed{P_\mu = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi}$ Μέση ισχύς

το $\cos\varphi = \cos(\varphi_V - \varphi_I)$ λέγεται
Συντελεστής Ισχύος (Σ.Ι.)
(power factor)

εδώ ΠΡΟΣΟΧΗ!

η γωνία $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$ και όχι $\varphi = \varphi_I - \varphi_V$

παρ' όλο που $\cos(\varphi_V - \varphi_I) = \cos(\varphi_I - \varphi_V)$

η μέση ισχύς $P_\mu = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi$ λέγεται επίσης και ενεργός ισχύς $P_{\varepsilon\nu}$ ή πραγματική ισχύς

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιείται ο όρος ενεργός ισχύς $P_{\varepsilon\nu} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi$

Προφανώς η ενεργός ισχύς είναι εκείνη που μας δίνει ωφέλιμο έργο π.χ μηχανική κίνηση, θερμότητα κ.λ.π.

Αν αντί των πλατών (μέγιστες τιμές) $V_m$, $I_m$ χρησιμοποιηθούν οι ενεργές τιμές της τάσεως και του ρεύματος

$$V_{\varepsilon\nu} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} , \quad I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

θα παίρουμε την έκφραση :

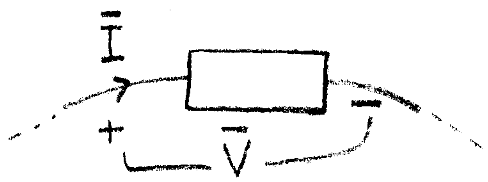
$$P_{\varepsilon\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{2}\, V_{\varepsilon\nu} \sqrt{2}\, I_{\varepsilon\nu} \cos\varphi$$

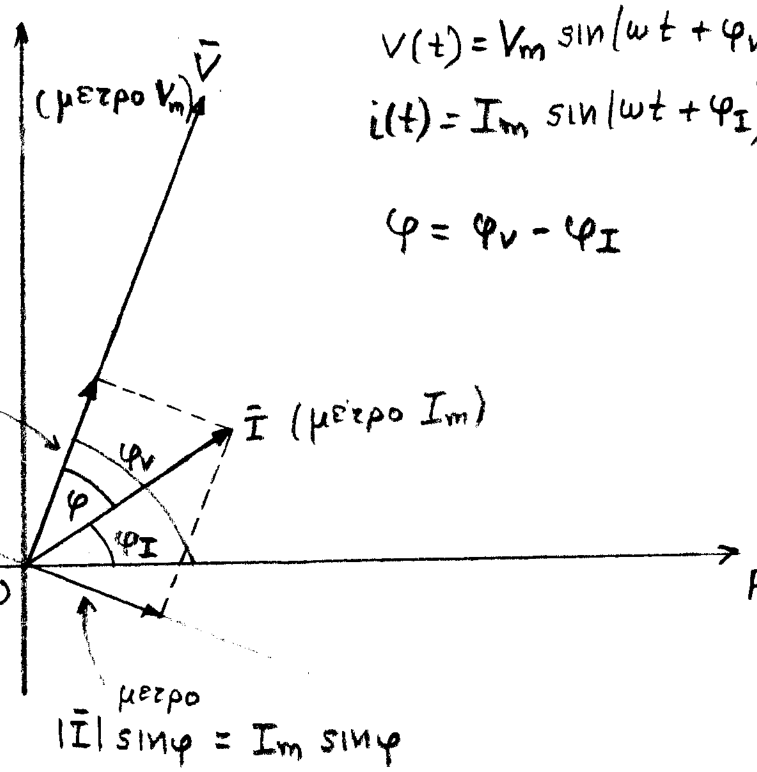
άρα $\boxed{P_{\varepsilon\nu} = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \cos\varphi}$ ενεργός ισχύς (active power) (W)

## 11.3) Η ισχύς στο μιγαδικό επίπεδο

Επειδή η μελέτη ενός ηλεκτρικού δικτύου στην Η.Μ.Κ. γίνεται πρώτιστα με χρήση phasors (στρεφόμενοι μιγαδικοί - στρεφόμενα διανύσματα), θα πρέπει να εξετάσουμε τι γίνεται με την ισχύ στο μιγαδικό επίπεδο

Έχουμε το διανυσματικό διάγραμμα: (έστω $\varphi_V > \varphi_I$)




$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_V) \rightarrow \bar{V} = V_m e^{j\varphi_V}$

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I) \rightarrow \bar{I} = I_m e^{j\varphi_I}$

$\varphi = \varphi_V - \varphi_I$

Το διάνυσμα $\bar{I}$ μπορεί να αναλυθεί σε 2 συνιστώσες

- Μία <u>συγγραμμική</u> με το διάνυσμα $\bar{V}$. Η συνιστώσα αυτή θα έχει μέτρο $|\bar{I}|\cos\varphi = I_m \cos\varphi$

- Μία <u>κάθετη</u> στο διάνυσμα $\bar{V}$. Η συνιστώσα αυτή θα έχει μέτρο $|\bar{I}|\sin\varphi = I_m \sin\varphi$

Παρατηρούμε αμέσως ότι:

<u>Ενεργός ισχύς:</u> $P_{εν} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi \Rightarrow$

$P_{εν} = \frac{1}{2} \times$ (μέτρο $\bar{V}$) $\times$ (μέτρο προβολής του $\bar{I}$ στην διεύθυνση του $\bar{V}$)

Άρα:

- Τα διανύσματα $\bar{V}$ και $\bar{I}\cos\varphi$ είναι συγγραμμικά (δεν έχουν διαφορά φάσεως) και το γινόμενο των μέτρων τους επί το $\frac{1}{2}$ μας δίνει την πραγματική ή ενεργό (ωφέλιμη) ισχύ που απορροφά το στοιχείο

Ας δούμε την άλλη συνιστώσα του $\bar{I}$ που είναι κάθετη στο $\bar{V}$.

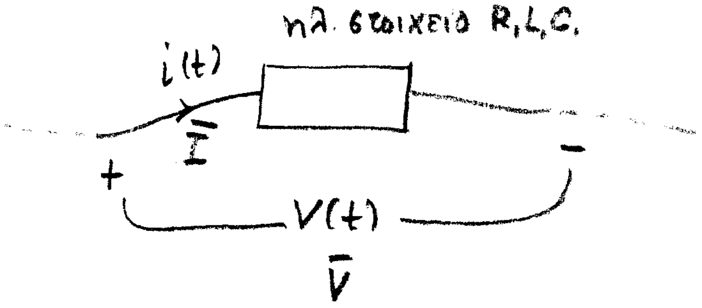
- Τα διανύσματα $\bar{V}$ και $\bar{I}\sin\varphi$ είναι κάθετα μεταξύ τους (έχουν διαφορά φάσεως 90°)
Εξετάζουμε το γινόμενο των μέτρων τους επί το $\frac{1}{2}$ δηλαδή τον όρο $\frac{1}{2}V_m I_m \sin\varphi$

Ο όρος αυτός αποκαλείται Άεργος ισχύς $P_\alpha$ και έχει την ακόλουθη φυσική σημασία:

- Η άεργος ισχύς δεν προσφέρει ωφέλιμο έργο αλλά "πηγαινοέρχεται" μεταξύ ηλεκτρικού στοιχείου και "έξω κόσμου".
- Πως γίνεται αυτό το "πήγαινε - έλα";
Απάντηση: Γίνεται μέσω των διαδοχικών φορτίσεων - εκφορτίσεων των πυκνωτών, και μαγνητίσεων - απομαγνητίσεων των πηνίων που υπάρχουν μέσα στο ηλεκτρικό στοιχείο (Μην ξεχνάτε ότι ο πυκνωτής και το πηνίο (ιδανικά στοιχεία) αποθηκεύουν ενέργεια την οποία επιστρέφουν ακέραιη όταν ζητηθεί)

- Δηλαδή αν μέσα στο στοιχείο ΔΕΝ υπάρχουν πυκνωτές ούτε πηνία δεν έχουμε άεργο ισχύ;
Απάντηση: Προφανώς δεν έχουμε άεργο ισχύ!

Συνοψίζουμε μέχρι εδώ:




$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_v) \rightarrow \bar{V} = V_m e^{j\varphi_v}$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I) \rightarrow \bar{I} = I_m e^{j\varphi_I}$$

Ενεργός ισχύς: (active power)

$$P_{εν} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_v - \varphi_I) =$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi \quad (W)$$

Αεργος ισχύς: (Reactive power)

$$P_α = \frac{1}{2} V_m I_m \sin\varphi \quad (VAR)$$

Η μονάδα της αέργου ισχύος είναι φυσικά το Watt. Παρ' όλα αυτά στην επιστήμη της Ηλεκτρολογίας όταν αναφερόμαστε σε άεργο ισχύ γράφουμε σαν μονάδα το "VAR" → Volt-Ampere-Reactive

Αναφέρουμε εδώ το εξής σημαντικό θέμα:

- Η άεργος ισχύς, όπως είπαμε, "πηγαίνει" και "έρχεται" μεταξύ "στοιχείου" και "εξωτερικού κόσμου" και αυτό έχει σαν συνέπεια να "φορτώνει" τους αγωγούς συνδέσεως με "άεργα ρεύματα", πράγμα πολύ ανεπιθύμητο όπως θα δούμε στα επόμενα...

## Φαινομένη Ισχύς (Apparent power)

Ορίζουμε την φαινομένη ισχύ ως εξής:

$$P_\varphi = \frac{1}{2} V_m I_m = \sqrt{P_{εν}^2 + P_α^2}$$

και σαν μονάδα της θεωρούμε (συμβολικά) το Volt-Ampere (VA). (Στην ουσία πρόκειται για Watt, απλώς γράφεται σαν VA.)

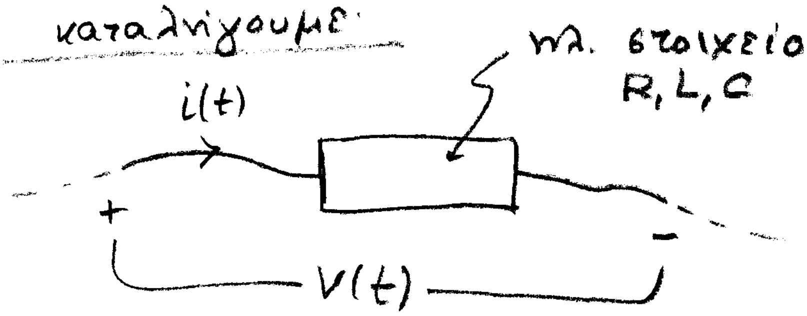
- Τι εκφράζει η φαινομένη ισχύς;

Απάντηση:

Εκφράζει τη μέγιστη δυνατή τιμή της ισχύος που μπορεί να απορροφηθεί από το ηλ στοιχείο. Αυτό συμβαίνει όταν $\varphi = 0°$, $\cos\varphi = 1$ άρα $P_{εν} = P_\varphi = \frac{1}{2} V_m I_m$, $P_α = 0$

Η $P_\varphi$ έχει μεγάλη σημασία στις πρακτικές εφαρμογές

Άρα καταλήγουμε:




$$V(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_V)$$
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I) \qquad (\varphi = \varphi_V - \varphi_I)$$

Ενεργός Ισχύς (active power)

$$P_{εν} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi \qquad (W)$$

Άεργος Ισχύς (reactive power)

$$P_α = \frac{1}{2} V_m I_m \sin\varphi \qquad (VAR)$$

Φαινομένη Ισχύς (apparent power)

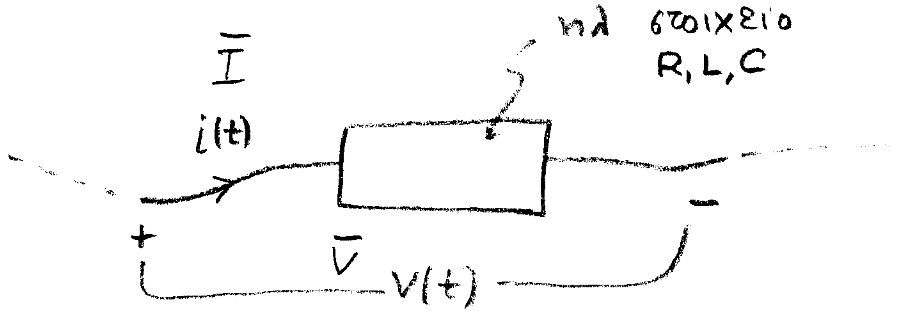
$$P_\varphi = \frac{1}{2} V_m I_m \qquad (VA)$$

## 11.4) Η ισχύς με χρήση phasors

Έως τώρα έχουμε ολοκληρώσει το θέμα της ισχύος στην Η.Μ.Κ. και έχουμε ορίσει τα 3 "είδη" των ισχύων που συναντάμε στην Η.Μ.Κ έχοντας αναφέρει την φυσική σημασία του κάθε είδους.

Παρακάτω θα συνδέσουμε όλα όσα προαναφέραμε με τους παραστατικούς μιγαδικούς (phasors) των μεγεθών $v(t)$ και $i(t)$ σε ένα ηλεκτρικό στοιχείο.

Επαναλαμβάνουμε για μια ακόμη φορά τα δεδομένα:




$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_V) \rightarrow \bar{V} = V_m e^{j\varphi_V}$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I) \rightarrow \bar{I} = I_m e^{j\varphi_I}$$

Σχηματίζω το γινόμενο:

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2}V_m e^{j\varphi_V} \cdot I_m e^{-j\varphi_I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{S} = \frac{1}{2}V_m I_m e^{j(\varphi_V - \varphi_I)}$$

$$\text{ή} \quad \boxed{\bar{S} = \frac{1}{2}V_m I_m e^{j\varphi}} \quad (\varphi = \varphi_V - \varphi_I)$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι:

$$\bar{S} = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\varphi + j\frac{1}{2}V_m I_m \sin\varphi$$

με $\bar{S} = \frac{1}{2} V_m I_m e^{j\varphi}$

$$Re\{\bar{S}\} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi = P_{εν} \quad (W)$$

$$Im\{\bar{S}\} = \frac{1}{2} V_m I_m \sin\varphi = P_{α} \quad (VAR)$$

$$|\bar{S}| = \frac{1}{2} V_m I_m = P_{φ} \quad (VA)$$

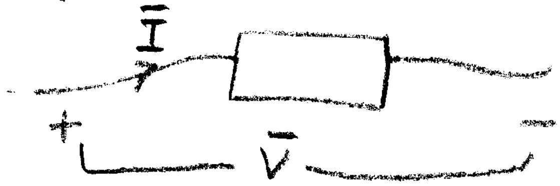
το μέγεθος $\boxed{\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^* = P_{εν} + j P_{α}}$

ορίζεται ως η "Μιγαδική ισχύς" στο ηλεκτρικό στοιχείο και:

- Το πραγματικό μέρος του $\bar{S}$ είναι η ενεργός ισχύς (W)
- Το φανταστικό μέρος του $\bar{S}$ είναι η άεργος ισχύς (VAR)
- Το μέτρο του $\bar{S}$ είναι η φαινομένη ισχύς (VA)

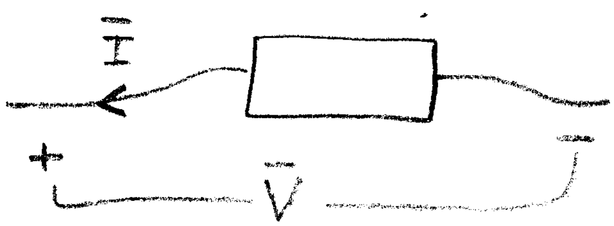
<u>Προσοχή!</u>

τα παραπάνω ισχύουν όταν οι φ.α. στο ηλ. στοιχείο είναι συσχετισμένες




$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^*$

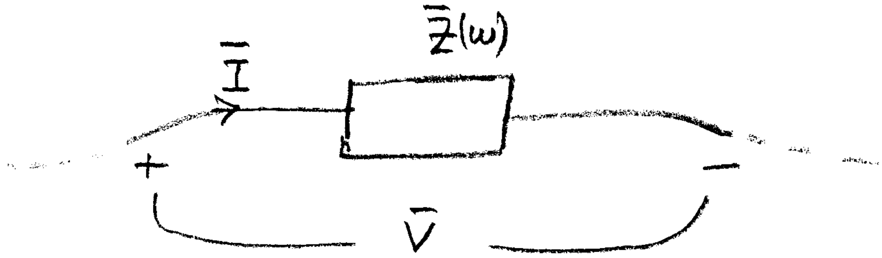
Εάν <u>ΔΕΝ</u> είναι συσχετισμένες.




τότε $\bar{S} = -\frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^*$

## 11.5) Ισχύς και σύνθετη αντίσταση $\bar{Z}(\omega)$

Επανερχόμαστε στο ηλ. στοιχείο




Η σύνθετη αντίσταση του ηλ. στοιχείου θα είναι:

$$\bar{Z}(\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V_m e^{j\varphi_V}}{I_m e^{j\varphi_I}} = R(\omega) + jX(\omega)$$

άρα $$\bar{Z}(\omega) = \frac{V_m}{I_m} e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = |\bar{Z}(\omega)| e^{j\varphi_Z} = R(\omega) + jX(\omega)$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι:

$$\boxed{\varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I = \varphi}$$

(πολύ χρήσιμη σχέση !!!)

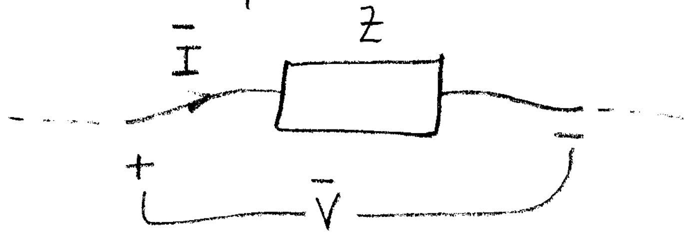
όπως $\cos\varphi = \cos\varphi_Z$ (Συντελεστής ισχύος)

<u>Δηλαδή:</u>

- Γνωρίζω την $\bar{Z}(\omega) \rightarrow$ γνωρίζω τον συντελεστή ισχύος

$$\boxed{\cos\varphi = \cos\varphi_Z}$$

Επίσης θα έχουμε




$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R + jX$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{S} &= \tfrac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* \\ \bar{V} &= \bar{Z}\cdot\bar{I} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{S} = \frac{1}{2}\bar{Z}\cdot\bar{I}\cdot\bar{I}^* = \frac{1}{2}\bar{Z}\,|\bar{I}|^2$$

ή $\bar{S} = \frac{1}{2}(R+jX)\,|\bar{I}|^2 \Rightarrow \bar{S} = \frac{1}{2}R\,|\bar{I}|^2 + j\frac{1}{2}X\,|\bar{I}|^2$

$$\bar{S} = P_{\varepsilon\nu} + jP_{\alpha}$$

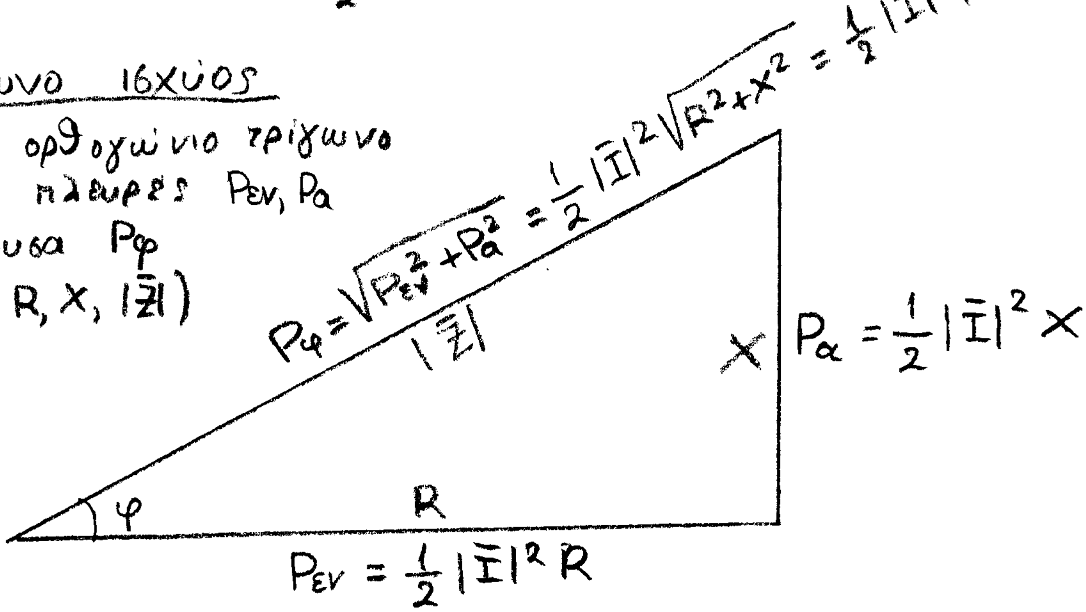
άρα $P_{\varepsilon\nu} = \frac{1}{2}|\bar{I}|^2 R \quad (W)$

$P_{\alpha} = \frac{1}{2}|\bar{I}|^2 X \quad (VAR)$

$P_{\varphi} = \sqrt{P_{\varepsilon\nu}^2 + P_{\alpha}^2} = \frac{1}{2}|\bar{I}|^2\sqrt{R^2+X^2} \quad (VA) = \frac{1}{2}|\bar{I}|^2|\bar{Z}|$

<u>Τρίγωνο ισχύος</u>

Είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $P_{\varepsilon\nu}$, $P_\alpha$ και υποτείνουσα $P_\varphi$ (αντίστοιχα $R, X, |\bar{Z}|$)




$$\cos\varphi = \frac{R}{|\bar{Z}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}} = \frac{P_{\varepsilon\nu}}{P_\varphi}$$

ο συντελεστής ισχύος (Σ.Ι) = $\cos\varphi$ απαιτεί 2 πληροφορίες

- την τιμή του $\cos\varphi$
- την γωνία $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$ δηλαδή:

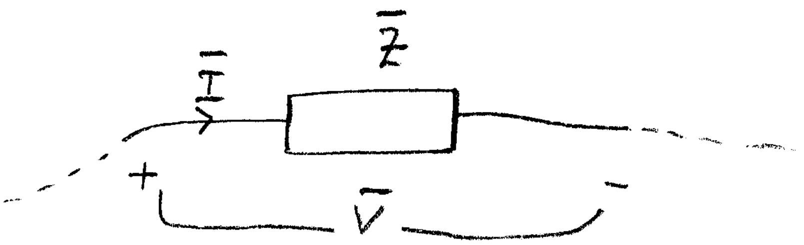
αν $\varphi > 0 \Rightarrow \varphi_V > \varphi_I \rightarrow$ επαγωγικός Σ.Ι

αν $\varphi < 0 \Rightarrow \varphi_I > \varphi_V \rightarrow$ χωρητικός Σ.Ι.

(διότι $\cos(\varphi_V - \varphi_I) = \cos(\varphi_I - \varphi_V)$)

## Σχετικά με την άεργο ισχύ

Αναφερόμαστε πάντα σε παθητικό στοιχείο R, L, C




εδώ $P_{εν} \geq 0$ (απορροφά ενεργό ισχύ)

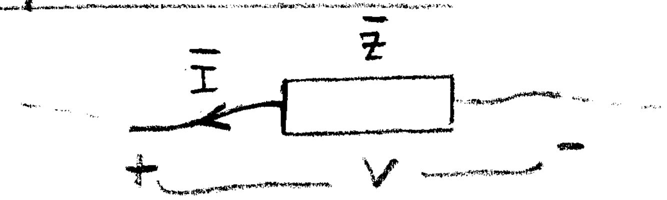
φ.α συσχετισμένες

$$\bar{S} = \frac{1}{2} V \bar{I}^* = P_{εν} + j P_α$$

αν $P_α > 0$ απορροφά άεργο επαγωγική ισχύ
ή παράγει άεργο χωρητική ισχύ

$P_α < 0$ απορροφά άεργο χωρητική ισχύ
ή παράγει άεργο επαγωγική ισχύ

## φ.α μη συσχετισμένες




Επίσης $P_{εν} \geq 0$ (απορροφά ενεργό ισχύ)

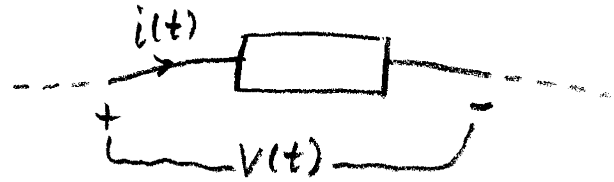
εδώ $\bar{S} = -\frac{1}{2} V \bar{I}^* = P_{εν} + j P_α$

ισχύουν τα ίδια, όπως πριν

## 11.6) Εφαρμογες σχετικα με την ισχυ στην Η.Μ.Κ.

### Εφαρμ 1)

Στο ηλ. στοιχειο του σχηματος διδεται οτι·




$$v(t) = 120 \sin(\omega t + 12^\circ)\ V \quad , \quad i(t) = 4 \sin(\omega t - 40^\circ)\ A$$

υπολογισετε $P_{εν}$, $P_{α}$, $P_{φ}$ και σχεδιαστε το τριγωνο ισχυος:

Απ/ έχουμε $\varphi_V = 12^\circ$ , $\varphi_I = -40^\circ$

αρα $\varphi = \varphi_V - \varphi_I = 12^\circ - (-40^\circ) = 52^\circ$

συνεπως $P_{εν} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \cos(52^\circ) \Rightarrow$

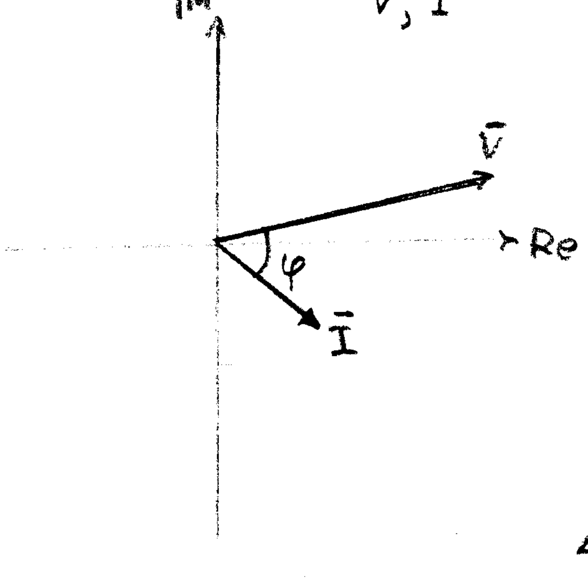
$\Rightarrow P_{εν} = 147.76\ W$

ομοια $P_{α} = \frac{1}{2} V_m I_m \sin\varphi = 189.12\ VAR$

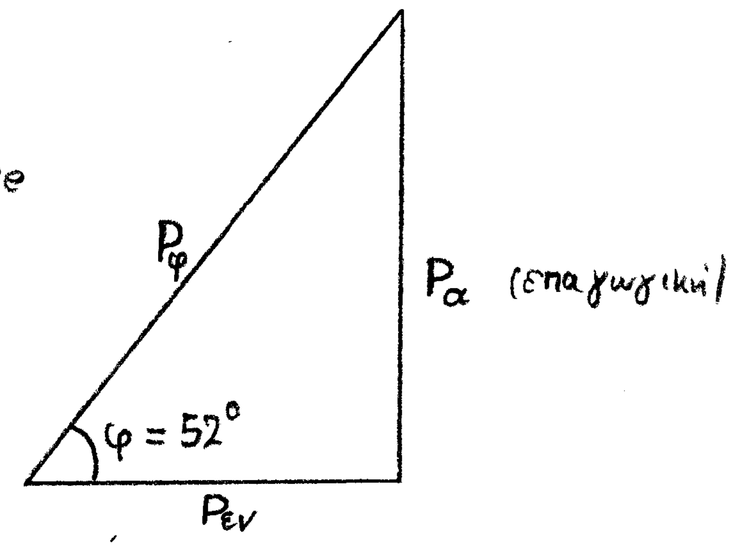
$P_{φ} = \frac{1}{2} V_m I_m = 240\ VA$

ο συντελεστης ισχυος $Σ.Ι = \cos(52^\circ) = 0.616$ επαγωγικος
(διοτι $\varphi_V > \varphi_I$)

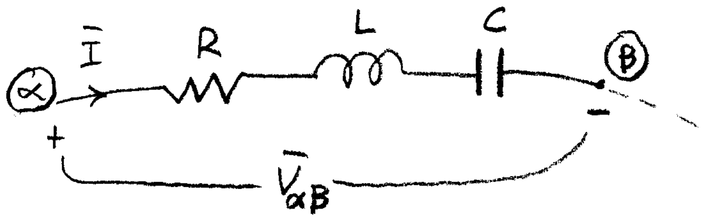
Διανυσματικο διαγραμμα $\bar{V}, \bar{I}$




Τριγωνο ισχυος



Εφαρμ. 2)




Στην ανωτέρω συνδεσμολογία δίδονται:

$$R = 50\Omega \ , \ L = 0.2H \ , \ C = 100\mu F$$

και $\bar{I} = 2e^{j30°}$ $\quad \omega = 2\pi \cdot 50 \ r/s$

Υπολογίστε:

α) την τάση $\bar{V}_{\alpha B}$

β) Τις τιμές των $\cos\varphi$, $P_{εν}$, $P_{α}$, $P_{φ}$ της συνδεσμο-λογίας

Απ/α) υπολογίζω πρώτα την $\bar{Z}_{\alpha B}(\omega)$

$$\bar{Z}_{\alpha\beta}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad \text{για } \omega = 2\pi \cdot 50 \ r/s$$

άρα $$\bar{Z}_{\alpha B} = 50 + j\left(2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}2 - \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 100 \times 10^{-6}}\right) \Omega$$

$$\bar{Z}_{\alpha\beta} = 50 + j(62.83 - 31.83)\ \Omega$$

$$\bar{Z}_{\alpha B} = 50 + j31\Omega = 58.83\angle 31.8° \ \Omega$$

άρα $$\bar{V}_{\alpha\beta} = \bar{I} \cdot \bar{Z}_{\alpha\beta} = 2\angle 30° \cdot 58.83\angle 31.8° = 117.66\angle 61.8° \ V$$

β) Έχω $\bar{V}_{\alpha\beta} = 117.66\angle 61.8° \ V$ , $\bar{I} = 2\angle 30° \ A$

άρα η μιγαδική ισχύς $\bar{S}$ θα είναι:

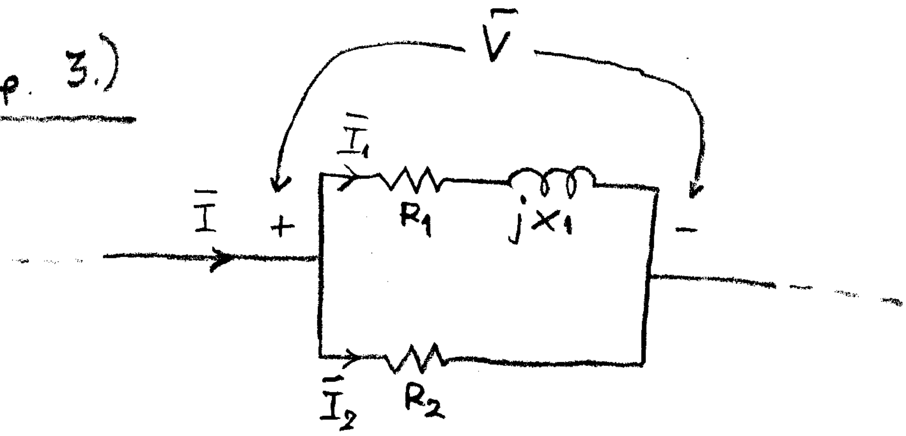
$$\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2} \times 117.66\angle 61.8° \times 2\angle -30° = 117.66\angle 31.8°$$

και $\bar{S} = P_{εν} + jP_{α} = 117.66\cos(31.8°) W + j\,117.66 \sin(31.8°)$ VAR

$P_{εν} = 100 \ W$ , $P_{α} = 62 \ VAR$ , $P_{φ} = 117.66 \ VA$

Σ.Ι $= \cos\varphi = \cos(31.8°) = 0.85$ επαγωγικός

Εφ. 3.)




Στη συνδεσμολογία του σχήματος δίνεται ότι:

$$R_1 = 3\,\Omega \quad , \quad R_2 = 10\,\Omega \quad , \quad jX_1 = j4\,\Omega$$

και η $P_{εν}$ που απορροφάται είναι $P_{εν} = 1100\ W$

Ζητείται να υπολογίσετε τα μεγέθη

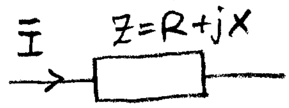
$$P_{εν,R_1} \quad , \quad P_{εν,R_2} \quad .$$

Απ/ Εστω $\bar{V}$ η τάση στα άκρα. Θα έχουμε:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{R_1 + jX_1} = \frac{\bar{V}}{3 + j4} \quad \text{και} \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{R_2} = \frac{\bar{V}}{10}$$

άρα $$\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{\frac{\bar{V}}{3+j4}}{\frac{\bar{V}}{10}} = \frac{10}{3+j4} \quad \text{και} \quad \left|\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\right| = \frac{|\bar{I}_1|}{|\bar{I}_2|} = \frac{10}{\sqrt{9+16}} = 2$$

ξέρουμε ότι γενικά ισχύει



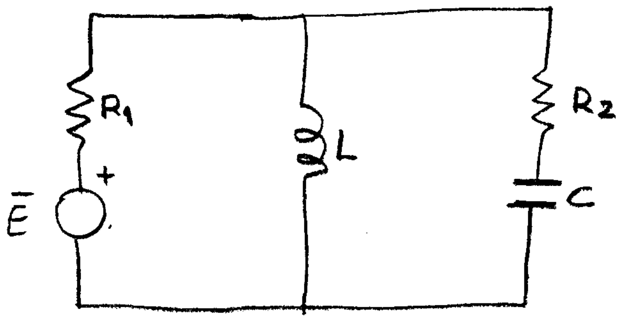

$$P_{εν} = \frac{1}{2}|\bar{I}|^2 R$$

άρα $$\frac{P_{εν,R_1}}{P_{εν,R_2}} = \frac{\frac{1}{2}|\bar{I}_1|^2 R_1}{\frac{1}{2}|\bar{I}_2|^2 R_2} = (2)^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{10}$$

άρα $$\left.\begin{aligned} P_{εν,R_1} + P_{εν,R_2} &= 1100 \\ 10 P_{εν,R_1} &= 12 P_{εν,R_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} P_{εν,R_1} &= 600\,W \\ P_{εν,R_2} &= 500\,W \end{aligned}$$

**Εφαρμ. 4)**

Δίδεται το ηλ. δίκτυο:




τιμές στοιχείων

$R_1 = 5\Omega$ , $R_2 = 10\Omega$

$L = 0.8H$ , $C = 0.0025 F$

$E = 110\angle 50^\circ V$   $\omega = 20$ r/s

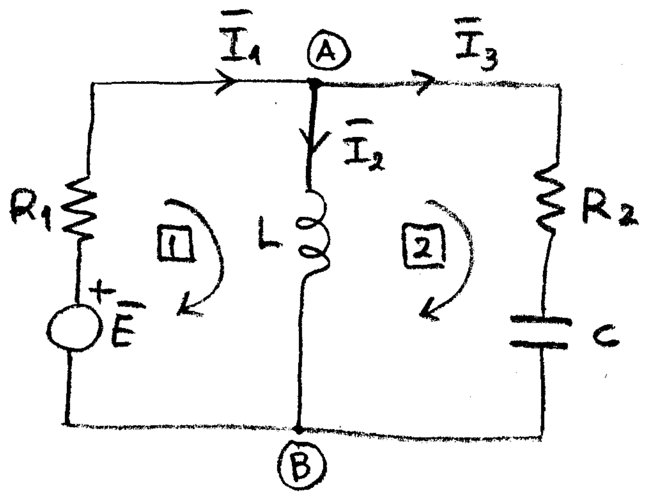
Ζητούνται:

1) - Να καταστρωθούν οι εξ. Kirchhoff του δικτύου

2) - Να γίνει το ισοζύγιο ισχύος του δικτύου για την ενεργό ισχύ

Απ/

1) Θέτουμε ρεύματα κλάδων $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ με αυθαίρετες φ.α. και γράφουμε τις εξισώσεις Kirchhoff




Θέτω τα ρεύματα $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ με τις εικονιζόμενες φ.α.

Εξ. Kirchhoff

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Ν.Ρ.Κ.} & (A) & \bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0 \\ \text{Ν.Τ.Κ.} & \boxed{1} & -\bar{E} + R_1\bar{I}_1 + j\omega L\,\bar{I}_2 = 0 \\ \text{Ν.Τ.Κ.} & \boxed{2} & -j\omega L\,\bar{I}_2 + \bar{I}_3\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C}\right) = 0 \end{array}\right\}$$

υπολογίζω:

$$j\omega L = j \times 20 \times 0.8 = j16$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{20 \times 0.0025} = -j20$$

άρα το σύστημα, με ανακατάταξη γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0 \\ 5\bar{I}_1 + j16\bar{I}_2 = \bar{E} = 110\angle 50^\circ \\ -j16\bar{I}_2 + (10 - j20)\bar{I}_3 = 0 \end{array}\right\}$$

η λύση του συστήματος είναι:

$$\bar{I}_1 = 2.97 + j0.39 = 3\angle 7.5^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = 5.15 - j3.49 = 6.22\angle -34.1^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = -2.18 + j3.88 = 4.45\angle 119.3^\circ \text{ A}$$

2) Ισοζύγιο ισχύος (για την $P_{εν}$)

-Μιγαδική ισχύς πηγής $\bar{E}$

$$\bar{S}_E = -\frac{1}{2}\bar{E}\cdot\bar{I}_1^* \quad \text{(διότι φ.α. μη συσχετισμένες)}$$

άρα

$$\bar{S}_E = -\frac{1}{2}\,110\angle 50^\circ \cdot 3\angle -7.5^\circ = -165\angle 42.5^\circ$$

ή $\bar{S}_E = -121.65 - j\,111.47$

άρα $P_{εν,E} = -121.65\ W$ (παράγει ενεργό ισχύ)

Ενεργό ισχύ μπορούν να απορροφήσουν ΜΟΝΟΝ οι $R_1, R_2$ (όχι οι $L, C$)

$$P_{εν,R_1} = \frac{1}{2}|\bar{I}_1|^2 R_1 = \frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot 5 = 22.5\ W \quad \text{(απορρ.)}$$

$$P_{εν,R_2} = \frac{1}{2}|\bar{I}_3|^2 R_2 = \frac{1}{2}\cdot(4.45)^2\cdot 10 = 99.01\ W \quad \text{(απορρ.)}$$

άρα

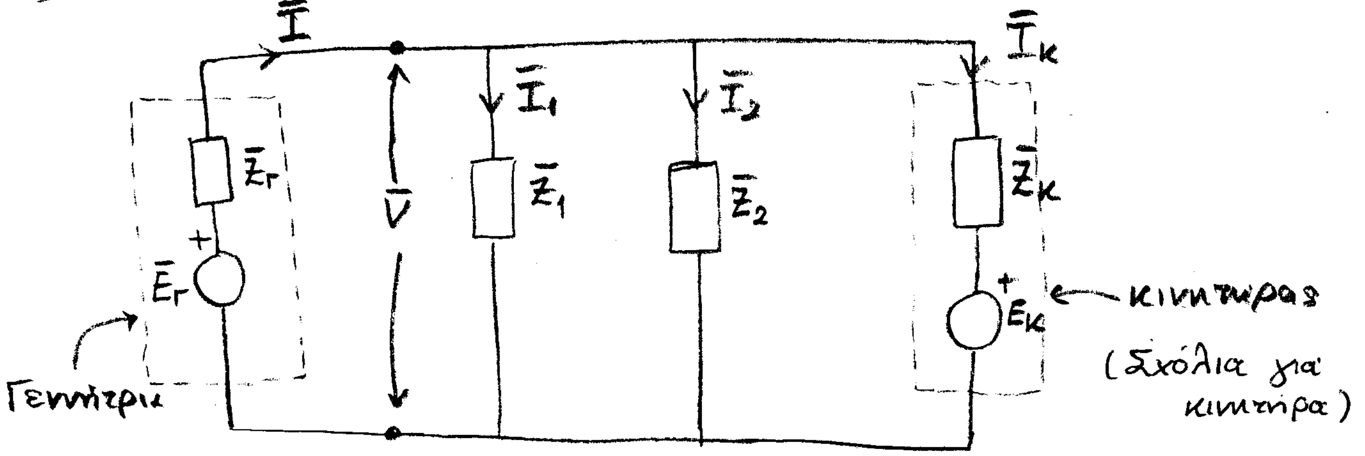
$$P_{εν,\,παραγόμενη} = P_{εν,E} = 121.65\ W$$

$$P_{εν,\,απορροφ} = P_{εν,R_1} + P_{εν,R_2} = 22.5 + 99.01 = 121.51\ W$$

(η διαφορά οφείλεται σε αριθμητικές προσεγγίσεις)

# Εφαρμογή 5)

Δίδεται το ακόλουθο ηλεκτρικό δίκτυο




Η γεννήτρια με ΗΕΔ $\bar{E}_\Gamma = 440\angle 95^\circ$ V και εσωτ αντίσταση $\bar{Z}_\Gamma = 0.5 + j7\ \Omega$ τροφοδοτεί:

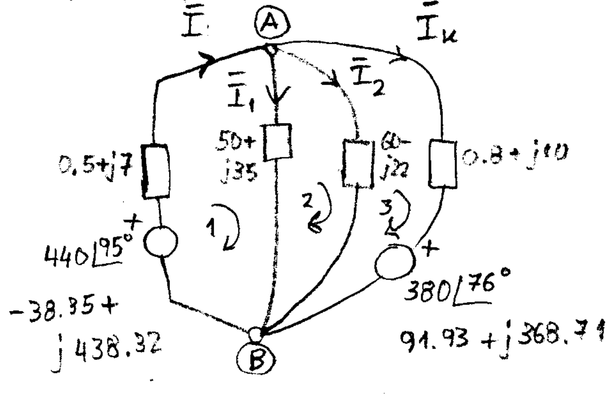
- Επαγωγικό καταναλωτή $\bar{Z}_1 = 50 + j35\ \Omega$
- χωρητικό καταναλωτή $\bar{Z}_2 = 60 - j22\ \Omega$
- Ηλεκτρικό κινητήρα με αντι-ΗΕΔ $\bar{E}_K = 380\angle 76^\circ$ V και εσωτ αντίσταση $\bar{Z}_K = 0.8 + j10\ \Omega$

## Ζητούνται:

1) - Η τάση τροφοδοσίας $\bar{V}$ των καταναλωτών
2) - Τα ρεύματα $\bar{I}$, $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_K$
3) - Το ισοζύγιο ισχύος για την ενεργό και άεργο ισχύ
4) - Ο. Σ.Ι. με τον οποίο εργάζεται ο κινητήρας

---

Λύση με Kirchhoff




$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0.5+j7 & 50+j35 & 0 & 0 \\ 0 & -50-j35 & 60-j22 & 0 \\ 0 & 0 & -60+j22 & 0.8+j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I} \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -38.35+j438.32 \\ 0 \\ -91.93-j368.71 \end{bmatrix}$$

$\bar{I} = 5.413 + j14.290$

$\bar{I}_1 = 4.487 + j4.725$

$\bar{I}_2 = -1.252 + j6.095$

$\bar{I}_K = 2.179 + j3.470$

Απ/

1) Η τάση $\bar{V}$ υπολογίζεται με χρήση του Θεωρ. Millman:

$$\bar{V} = \frac{\bar{E}_r \frac{1}{\bar{Z}_r} + \bar{E}_\kappa \frac{1}{\bar{Z}_\kappa}}{\frac{1}{\bar{Z}_r} + \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_\kappa}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{V} = \frac{440\angle 95^\circ \cdot \frac{1}{0.5+j7} + 380\angle 76^\circ \frac{1}{0.8+j10}}{\frac{1}{0.5+j7} + \frac{1}{50+j35} + \frac{1}{60-j22} + \frac{1}{0.8+j10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{99.3 + j3.7}{0.0462 - j0.2455} = 58.96 + j393.38 = 397.8\angle 81.5^\circ \ V$$

2) υπολογισμός ρευμάτων

$$\bar{V} = -\bar{I}\bar{Z}_r + \bar{E}_r \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{E}_r - \bar{V}}{\bar{Z}_r} = 15.29\angle 69.3^\circ \ A = 5.40 + j14.30$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_1} = 6.52\angle 46.5^\circ \ A = 4.49 + j4.73$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_2} = 6.22\angle 101.6^\circ \ A = -1.25 + j6.09$$

$$\bar{I}_\kappa = \frac{\bar{V} - \bar{E}_\kappa}{\bar{Z}_\kappa} = 4.09\angle 57.8^\circ \ A = 2.18 + j3.46$$

(προκύπτει $\bar{I} - \bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_\kappa = 0 + j0$)

3) Ισοζύγιο ισχύος

$$\bar{S}_{E_r} = -\frac{1}{2}\bar{E}_r \cdot \bar{I}^* = \underbrace{-3031,0}_{\substack{\text{παράγει} \\ P_{εν}\,(W)}} \underbrace{-j\,1458.7}_{\substack{\text{απορροφά} \\ \text{άεργο χωρητική (VAR)}}}$$

$$\bar{S}_{E_\kappa} = \frac{1}{2}\bar{E}_\kappa \cdot \bar{I}_\kappa^* = \underbrace{738.2}_{\substack{\text{απορροφά} \\ P_{εν}\,(W)}} \underbrace{+ j\,242.7}_{\substack{\text{απορροφά} \\ \text{άεργο επαγωγική (VAR)}}}$$

$$\bar{S}_{Z_r} = \frac{1}{2}|\bar{I}|^2 \bar{Z}_r = \underbrace{58.4}_{\substack{\text{απορρ} \\ P_{εν}(W)}} + \underbrace{j\,818.2}_{\substack{\text{απορρ} \\ \text{άεργο επαγωγική (VAR)}}}$$

$$\bar{S}_{Z_1} = \frac{1}{2}|\bar{I}_1|^2 \bar{Z}_1 = \underbrace{1062.8}_{\substack{\text{απορρ} \\ P_{εν}(W)}} + \underbrace{j\,743.9}_{\substack{\text{απορρ} \\ \text{άεργο επαγωγ (VAR)}}}$$

$$\bar{S}_{Z_2} = \frac{1}{2}|\bar{I}_2|^2 \bar{Z}_2 = \underbrace{1160.7}_{\substack{\text{απορρ} \\ P_{εν}(W)}} \underbrace{-j\,425.6}_{\substack{\text{απορρ} \\ \text{άεργο} \\ \text{χωρητική (VAR)}}}$$

$$\bar{S}_{Z_\kappa} = \frac{1}{2}|\bar{I}_\kappa|^2 \bar{Z}_\kappa = \underbrace{6.7}_{\substack{\text{απορρ} \\ P_{εν}(W)}} + \underbrace{j\,83.6}_{\substack{\text{απορρ} \\ \text{άεργο} \\ \text{επαγωγική (VAR)}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{εν,\,παραγ} = 3031,0 \ W \\ P_{εν,\,απορρ} = 3026.8\,W \end{array}\right\} \text{σφάλμα } (0.13\%)$$

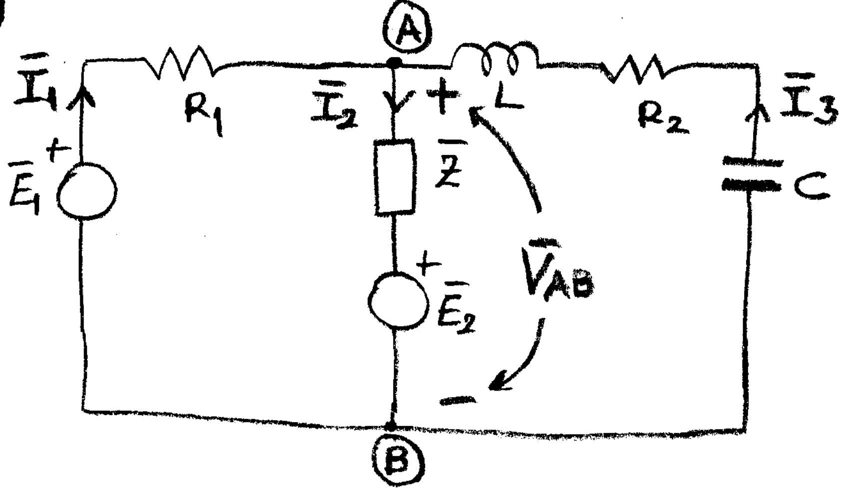
$$P_{αεργος} = -1458,7 + 242,7 + 818.2 + 743.9 - 425.6 + 83.6 \simeq 0$$

4) Σ.Ι. κινητήρα $\bar{V} = 397.8\,\angle 81.5^\circ\ V$ $\quad \varphi = \varphi_V - \varphi_I = 23.7^\circ$

$\bar{I}_\kappa = 4.09\,\angle 57.8^\circ\ A$ $\quad \cos\varphi = 0.916$ επαγωγ.

## 11.7) Ασκήσεις για λύση

**ΑΣΚ 1**




Δίδονται :

$\bar{E}_1 = 200\angle 45^\circ$ V

$\bar{E}_2 = 100\angle 60^\circ$ V

$R_1 = 50\,\Omega$

$R_2 = 20\,\Omega$

$L = 1\,H$, $C = 4000\,\mu F$

$\bar{Z} = 40 + j20\,\Omega$

$\omega = 10$ r/sec

Ζητούνται :

1) – Η τάση $V_{AB}$

2) – Τα ρεύματα $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$

3) Ισοζύγιο ισχύος για την $P_{εν}$

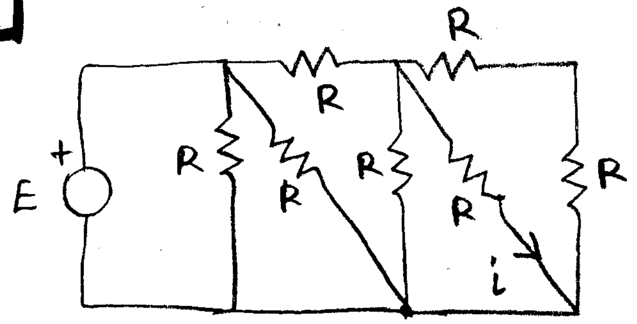
Απ/ 1) $\bar{V}_{AB} = 84.62\angle 29.9^\circ$ V

2) $\bar{I}_1 = 2.40\angle 55.6^\circ$ A, $\bar{I}_2 = 1.12\angle -88.8^\circ$ A

$\bar{I}_3 = 3.38\angle -113.3^\circ$ A

3) $P_{εν,\,παραγ} = P_{εν,\,απορρ} = 283.8$ W

ΑΣΚ 2




Δίδονται

$E = 10$ V (συνεχής τάση)

$R = 2\,\Omega$

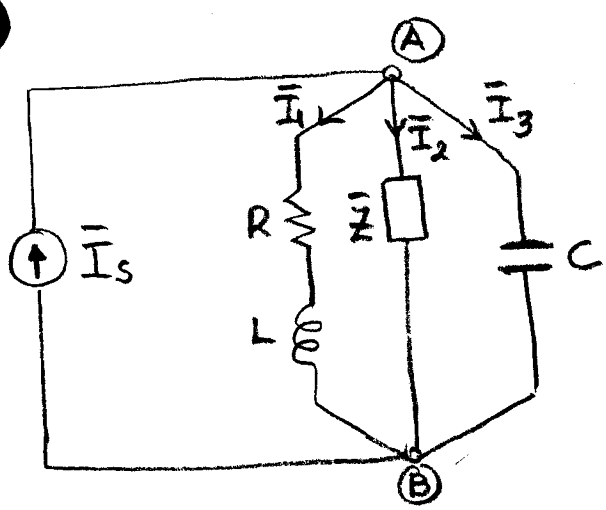
Ζητούνται:

1) Το ρεύμα $i$
2) Η ισχύς της πηγής $E$

Απ/ $i = 1,4285$ A

$P_E = 135,68$ W παράγει

ΑΣΚ 3




Δίδονται

$\bar{I}_S = 10\angle 60^\circ$ A

$R = 40\,\Omega$, $L = 0.5$ H, $C = 250\,\mu$F

$\bar{Z} = 25 - j32\,\Omega$

$\omega = 100$ r/s

Ζητούνται:

1) Τα ρεύματα $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$
2) Η ισχύς της πηγής $\bar{I}_S$ (ενεργός, άεργος)

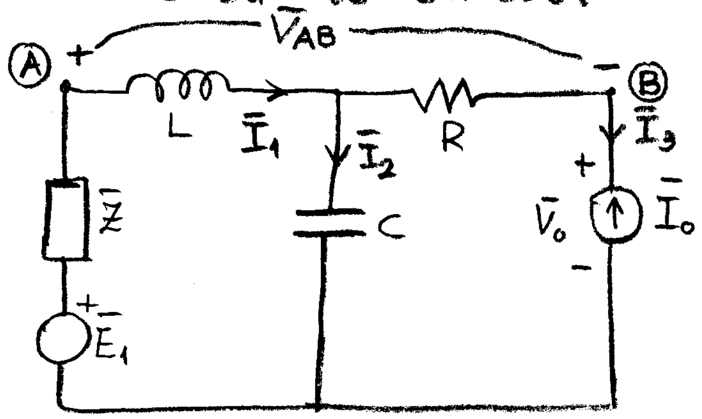
Απ/ $\bar{I}_1 = 3.835\angle -43.6^\circ$ A , $\bar{I}_2 = 6.047\angle 59.7^\circ$ A

$\bar{I}_3 = 6.139\angle 97.7^\circ$ A

$\bar{S}_{I_S} = -751,0$ W $+ j\,971,6$ VAR

**ΑΣΚ 4**

Δίδεται το δίκτυο:




δίδεται η τάση:
$\bar{V}_{AB} = -342.43 + j\,523.10\ V \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{V}_{AB} = 625.21\angle 123.2^\circ\ V$

Δίδονται επίσης

$\bar{E}_1 = 150\angle 60^\circ\ V$

$\bar{I}_0 = 1.2\angle -35^\circ\ A$

$\bar{Z} = 140 + j85\ \Omega$

$R = 250\ \Omega$, $L = 4\ H$

$C = 125\ \mu F$

$\omega = 50\ r/sec$

Ζητούνται:

1) Τα ρεύματα $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$

2) Η τάση $\bar{V}_0$

3) Η ενεργός ισχύς των πηγών $\bar{E}_1$ και $\bar{I}_0$

Απ/

1) $\bar{I}_1 = 1.82\angle 15.4^\circ\ A$, $\bar{I}_2 = 2.74\angle -4.3^\circ\ A$

$\bar{I}_3 = 1.2\angle 145^\circ\ A \quad (= -\bar{I}_0)$

2) $\bar{V}_0 = 646.2\angle -70.8^\circ\ V$

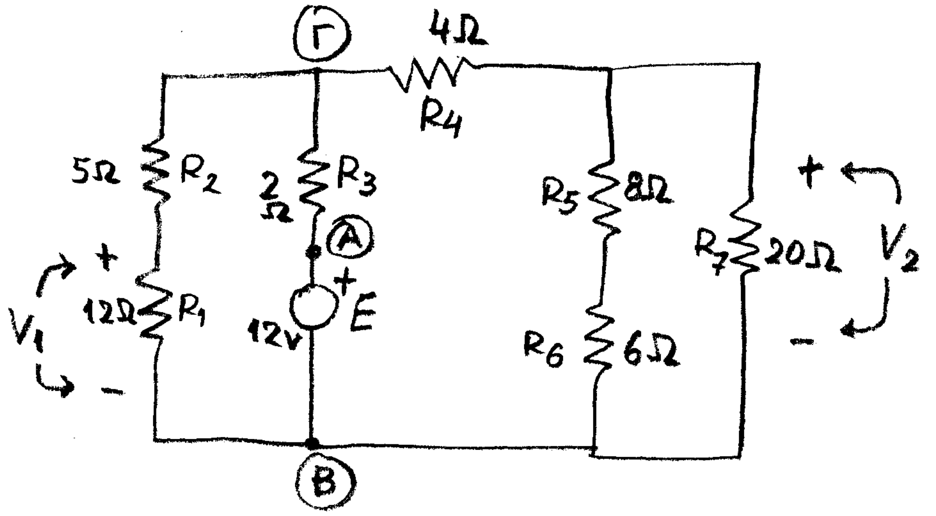
3) $P_{εν, E_1} = 97.2\ W$ παράγει

$P_{εν, I_0} = 314.45\ W$ παράγει

ΑΣΚ 5



Δίδεται το δίκτυο (λειτουργεί στο Σ.Ρ.)




Δίδονται οι τιμές $R_1, R_2, \ldots, R_7$ και $E = 12V$ (DC)

Ζητούνται:

1) Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{AB}$ που είναι συνδεδεμένη στα άκρα της πηγής

2) Οι τάσεις $V_1$ και $V_2$

3) Η ισχύς $P_E$ της πηγής $E$

Απ/

1) $R_{AB} = 9.115\,\Omega$

2) $V_1 = 6.61\,V$ , $V_2 = 6.30\,V$

3) $P_E = 15.8\,W$ <u>παράγει</u>