Ασκήσεις Μιγαδικών αριθμών

1. Αν $z=\alpha+\beta i$ να αποδειχθεί ότι

- $\alpha=\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ και $\beta=\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
- $|z|=|\bar{z}|=|-z|=|-\bar{z}|$
- $|z|^2=z\bar{z}$

2. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $|z|=|\mathrm{Im}(z)|$.

3. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x,ψ, για τους οποίους ισχύει

$$\frac{x-2+(\psi-3)i}{\psi+i}=1-3i.$$

4. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=2+3i, w=x(1+i)+\psi(1-i)$.
Να βρεθούν οι $x,\psi\in\mathbb{R}$, ώστε $z=w$.

5. Δίνεται ο μιγαδικός $K=\dfrac{i(4+x+ix)}{1+i\cdot(4+x)}$. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$\mathrm{Im}(K)=0$.

6. Να βρείτε τους $x,\psi\in\mathbb{R}$, ώστε οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1=\frac{2x-\psi i}{1+i}\quad\text{και}\quad z_2=\frac{x^2+\psi i}{1-3i}+xi$$

να είναι συζυγείς.

7. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot i$. Να δείξετε ότι

α) Ο αριθμός $u=z^4+(\bar{z})^4$ είναι πραγματικός.

β) Ο αριθμός $w=z^4-(\bar{z})^4$ είναι φανταστικός.

8. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών

$$z_1=\frac{\alpha-\beta i}{\alpha+\beta i}\ \text{όπου}\ \alpha,\beta\in R^*\ \text{και}\ z_2=\frac{(i-\sqrt{2})^2}{(1+i\sqrt{3})^2 i}.$$

9. Δίνονται οι μιγαδικοί z και w με $z \neq -2+0i$, $z \neq i$ και $w = \dfrac{z+2}{z-i}$.
Να δείξετε ότι

α) Ο w είναι πραγματικός αριθμός, αν και μόνο αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(z) είναι μια ευθεία, από την οποία έχει εξαιρεθεί το σημείο A(-2,0).

β) Ο w είναι φανταστικός αριθμός, αν και μόνο αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(z) είναι ένας κύκλος με κέντρο K(-1 , $\frac{1}{2}$) και ακτίνα ρ= $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

γ) Να δείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος και η ευθεία τέμνονται στα σημεία A (που εξαιρείται) και B (που δεν εξαιρείται) και να βρείτε τις συντεταγμένες του B.

10. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(z) του μιγαδικού αριθμού z, για τον οποίο ισχύει $\text{Re}(z+5+7i) = \text{Im}(z-2-6i)$.

11. Αν $w = \dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $z \neq \alpha i$, τότε να αποδείξετε ότι

(α) Ο αριθμός w είναι φανταστικός, αν και μόνο αν, ο αριθμός z είναι φανταστικός αριθμός.

(β) Ισχύει $|w| = 1$, αν και μόνο αν, ο w είναι πραγματικός αριθμός.

12. α) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - \sqrt{2}(1-i)z - 2i = 0$.

β) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε ότι η ευθεία που ορίζουν οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο να διέρχεται από την εικόνα του μιγαδικού $w = \alpha - 1 + \beta i$.

13. Αν $z = -\sqrt{3} + i$, να βρεθεί το z^{2024}.

14. Να βρεθεί η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών $z_1 = -\sqrt{3} + i$ και $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Στη συνέχεια να υπολογισθούν το γινόμενο και το πηλίκο των δύο αριθμών z_1 και z_2.

15. Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

16. Να λυθεί η εξίσωση $z^5 = -32i$.