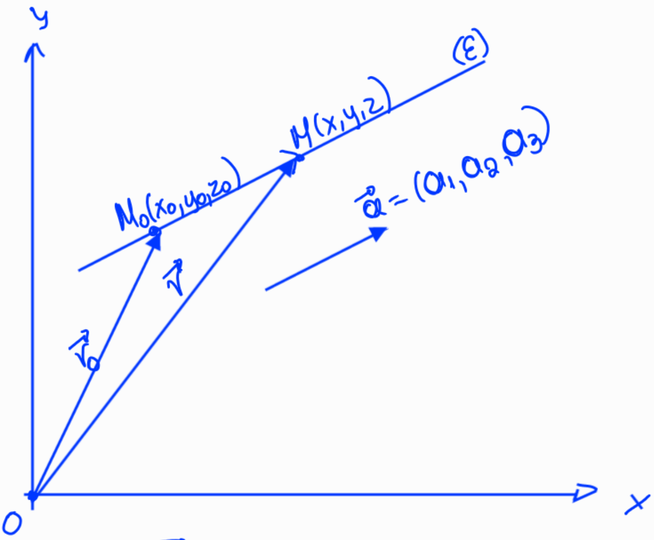
Εξίσωση ευθείας στο χώρο



$\vec{r_0}=\vec{OM_0}=(x_0,y_0,z_0)$

$\vec{r}=\vec{OM}=(x,y,z)$

$\vec{M_0M} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{OM}-\vec{OM_0}=t\vec{a}$

$\vec{r}-\vec{r_0}=t\vec{a}$

$\boxed{\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{a}}$ διανυσματική εξίσωση ευθείας

ε: $\vec{M_0M} \parallel \vec{a}$

$(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=t(a_1,a_2,a_3)$

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=ta_1\\ y-y_0&=ta_2\\ z-z_0&=ta_3\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} x&=x_0+ta_1\\ y&=y_0+ta_2\\ z&=z_0+ta_3\end{aligned}}$$

παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

Αν από την παραμετρική εξίσωση λύσουμε ως προς t, έχουμε

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}}$$

αναλυτική ή καρτεσιανή εξίσωση ευθεία

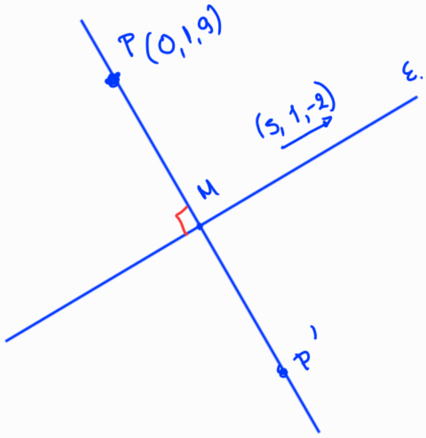
Ασκήσεις

1. Δίνεται το σημείο $P(0,1,9)$ και η ευθεία ε: $\frac{x-3}{5}=y-6=\frac{4-z}{2}$. Να βρεθεί

i) η ορθή προβολή του P στην ευθεία (ε)

ii) η αναλυτική εξίσωση της ευθείας (δ) που διέρχεται από το P και τέμνει κάθετα την ε.

iii) Το συμμετρικό του P ως προς την ευθεία ε.



i) Έστω M η ορθή προβολή

$M \in \varepsilon \Rightarrow M(3+5t,\ 6+t,\ 4-2t)$

$\vec{PM} \perp (5, 1, -2)$

$(3+5t,\ 5+t,\ -5-2t)\cdot(5, 1, -2) = 0$

$5(3+5t) + (5+t) - 2(-5-2t) = 0$

$15 + 25t + 5 + t + 10 + 4t = 0$

$30t = -30 \Rightarrow \boxed{t = -1}$

Η προβολή είναι $M(-2, 5, 6)$

ii) $\delta \parallel \vec{PM} \Rightarrow \delta \parallel (-2,\ 4,\ -3)$

Άρα $(\delta): \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-9}{-3}$

iii) P' συμμετρικό του P στην (ε) άρα M μέσο του PP'

$P'(x, y, z)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+0}{2} = -2 \Rightarrow x = -4 \\ \dfrac{y+1}{2} = 5 \Rightarrow y = 9 \\ \dfrac{z+9}{2} = 6 \Rightarrow z = 3 \end{array}\right\} P'(-4, 9, 3)$$

2. Έστω οι ευθείες

$\varepsilon_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ και $\varepsilon_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = z$

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι ασύμβατες και να βρεθεί η εξίσωση της κοινής καθέτου.

Λύση • $\varepsilon_1 \parallel (2,3,4)$, $\varepsilon_2 \parallel (2,2,1)$

Επειδή $(2,3,4) \not\parallel (2,2,1) \Rightarrow \varepsilon_1 \not\parallel \varepsilon_2$

Θα εξετάσουμε αν τέμνονται : $\varepsilon_1: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 3+4t \end{cases}$ $\varepsilon_2: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

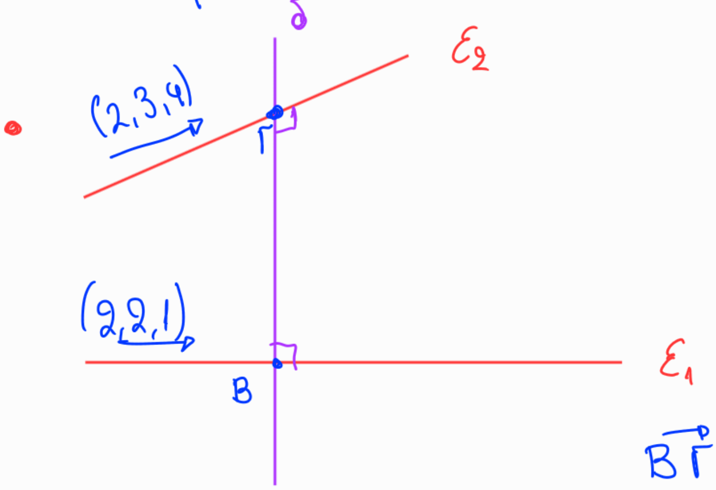
$$\Rightarrow \begin{cases} 1+2t = 2\lambda \\ 2+3t = 1+2\lambda \\ 3+4t = \lambda \end{cases} \Rightarrow 2+3t = 1+2(3+4t) \Rightarrow -5t=5$$

$\boxed{t=-1}$, $\boxed{\lambda=-1}$

$$\Rightarrow 1+2(-1) = 2(-1)$$

$\cancel{-1=-2}$ οι ευθείες δεν τέμνονται

Επομένως, οι ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες.

• 

δ: κοινή κάθετο

$B \in \varepsilon_1 \Rightarrow B(1+2t, 2+3t, 3+4t)$

$\Gamma \in \varepsilon_2 \Rightarrow \Gamma(2\lambda, 1+2\lambda, \lambda)$

$$\vec{B\Gamma} = (-1+2\lambda-2t, -1+2\lambda-3t, -3+\lambda-4t)$$

$$\vec{B\Gamma} \perp \varepsilon_1 \Rightarrow (-1+2\lambda-2t, -1+2\lambda-3t, -3+\lambda-4t)(2,3,4)=0$$

$$2(-1+2\lambda-2t)+3(-1+2\lambda-3t)+4(-3+\lambda-4t)=0$$

$$-2+4\lambda-4t-3+6\lambda-9t-12+4\lambda-16t=0$$

$$14\lambda-29t=17 \quad (1)$$

$$\vec{B\Gamma} \perp \varepsilon_2 \Rightarrow (-1+2\lambda-2t, -1+2\lambda-3t, -3+\lambda-4t)(2,2,1)=0$$

$$\Rightarrow 2(-1+2\lambda-2t)+2(-1+2\lambda-3t)+(-3+\lambda-4t)=0$$

$$-2+4\lambda-4t-2+4\lambda-6t-3+\lambda-4t=0$$

$$9\lambda-14t=7 \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} 14\lambda-29t&=17 \\ 9\lambda-14t&=7 \Rightarrow \lambda=\frac{7+14t}{9} \end{aligned} \Bigg\} \quad \frac{14(7+14t)}{9}-29t=17$$

$$\Rightarrow 98+196t-261t=153$$

$$65t=55 \Rightarrow \boxed{t=\frac{13}{11}}\ , \quad \boxed{\lambda=\frac{259}{99}}$$

Άρα $\vec{B\Gamma}=\left(\frac{185}{99},\ \frac{68}{99},\ \frac{-506}{99}\right)$, $B\left(\frac{37}{11}, \frac{61}{11}, \frac{85}{11}\right)$

Άρα η κοινή κάθετο είναι

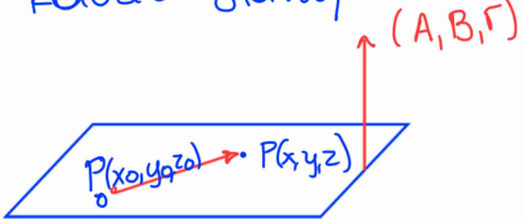
$$x=\frac{37}{11}+\frac{187}{99}t$$

$$y=\frac{61}{11}+\frac{68}{99}t$$

$$z=\frac{85}{11}-\frac{506}{99}t$$

Εξίσωση επιπέδου

1) Εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από το $P_0(x_0,y_0,z_0)$ και έχει κάθετο διάνυσμα (A,B,Γ)



$$\vec{P_0P}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\perp(A,B,\Gamma)$$

$$\vec{P_0P}\cdot(A,B,\Gamma)=0$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+\Gamma(z-z_0)=0$$

$$Ax+By+\Gamma z+(-Ax_0-By_0-\Gamma z_0)=0$$

Αν $\Delta=-Ax_0-By_0-\Gamma y_0$

$$\Rightarrow \boxed{Ax+By+\Gamma z+\Delta=0}$$ καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου

2) Εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλο στα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{R} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{Q} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\pi: \boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + t x_1 + \lambda x_2 \\ y = y_0 + t y_1 + \lambda y_2 \\ z = z_0 + t z_1 + \lambda z_2 \end{array}}$$

παραμετρική εξίσωση επιπέδου

$$\pi: \boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0}$$

καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου

Ασκήσεις

1. Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, -1, 3)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο $3x + y + z = a$, $a \in \mathbb{R}$

Λύση: $3x + y + z = a \perp (3, 1, 1)$

Άρα το επίπεδο θα έχει εξίσωση

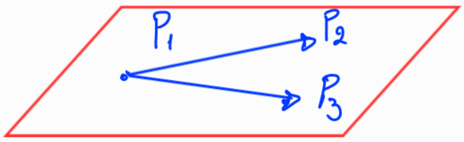
$\pi: \ 3x + y + z + \Delta = 0$

$(1, -1, 3) \in \pi \Rightarrow 3 \cdot 1 - 1 + 3 + \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = -5$

Άρα $\pi: \ 3x + y + z - 5 = 0$

2) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $P_1(2,3,5)$, $P_2(1,5,6)$ $P_3(-1,5,8)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,2,1)$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (-3,2,3)$$



$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 4(x-2) - 4(z-5) = 0 \Rightarrow 4x - 4z - 28 = 0$$

3) Η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στο επίπεδο $2x-y-z=4$. Βρείτε το σημείο στο οποίο η (ε) τέμνει το επίπεδο $x+y-2z=2$

Λύση

$(0,0,0) \in \varepsilon$ και $\varepsilon \perp \Pi \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel (2,-1,-1)$

Άρα (ε): $\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= -t \\ z &= -t \end{aligned}$

Για να βρούμε το σημείο τομής της (ε) με το $x+y-2z=2$ έχουμε

$$2t+(-t)-2(-t)=2 \Rightarrow 3t=2 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

Αρα το σημείο είναι $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

3) Βρείτε την ευθεία που είναι τομή των επιπέδων $\Pi_1: x+y+z=1$ και $\Pi_2: x+y=3$

- $\Pi_1 \perp \vec{v}_1 = (1,1,1)$

  $\Pi_2 \perp \vec{v}_2 = (1,1,0)$

$$\varepsilon \parallel \vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

- Βρίσκουμε ένα σημείο τομής των Π_1, Π_2

  για $x=0$ έχουμε $\Pi_1: \left.\begin{array}{l} y+z=1 \\ y=3 \end{array}\right\} z=-2$

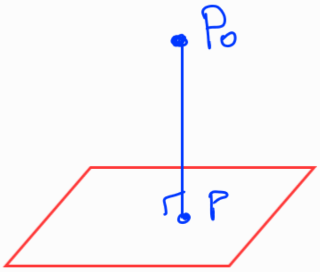
Αρα, $(0,3,-2)$ σημείο τομής των Π_1, Π_2

Επομένως, $\varepsilon:$ $\boxed{\begin{array}{l} x=-t \\ y=3+t \\ z=-2 \end{array}}$ παραμετρική εξίσωση

$\boxed{\frac{x}{-1} = \frac{y-3}{1},\ z=-2}$ καρτεσιανή εξίσωση

Απόσταση σημείου $P_0(x_0, y_0, z_0)$ από επίπεδο

$\Pi: Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$



$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

4) Να βρείτε την απόσταση των επιπέδων
$\pi_1: 3x - 6y + 3z = 3$ και $\pi_2: x - 2y + z = 3$

Λύση Βρίσκουμε ένα σημείο του π_1

π.χ $A(0, 0, 1) \in \pi_1$

και $$d(\pi_1, \pi_2) = d(A, \pi_2) = \frac{|0 - 2\cdot 0 + 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

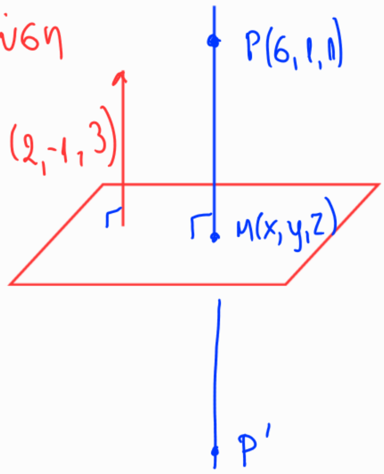
5) Δίνεται το σημείο $P(6, 1, 1)$ και το επίπεδο $\pi: 2x - y + 3z = 16$. Να βρείτε

i) την προβολή του P στο επίπεδο

ii) την εξίσωση της ευθείας της προβολής

iii) το συμμετρικό του P ως προς το π.

Λύση



i) το M προβολή του P στο π.

$$\vec{PM} = t\,(2, -1, 3)$$

$$(x-6,\ y-1,\ z-1) = t(2, -1, 3)$$

$x = 6 + 2t$

$y = 1 - t$

$z = 1 + 3t$

$M \in \Pi \Rightarrow 2(6+2t)-(1-t)+3(1+3t)=16$

$12+4t-1+t+3+9t=16$

$14t=2 \Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{7}}$

Άρα, $M\left(\frac{44}{7}, \frac{6}{7}, \frac{10}{7}\right)$

ii) Η εξίσωση της ευθείας είναι

$$\varepsilon: \begin{array}{l} x = 6+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+3t \end{array}$$

iii) Έστω $P'(x,y,z)$ το M είναι μέσο του PP' άρα

$\frac{x+6}{2}=\frac{44}{7} \Rightarrow 7x+42=88 \Rightarrow x=\frac{46}{7}$

$\frac{y+1}{2}=\frac{6}{7} \Rightarrow 7y+7=12 \Rightarrow y=\frac{5}{7}$

$\frac{z+1}{2}=\frac{10}{7} \Rightarrow 7z+7=20 \Rightarrow z=\frac{13}{7}$

Επομένως, $P'\left(\frac{46}{7}, \frac{5}{7}, \frac{13}{7}\right)$