Γραμμικά συστήματα: Μέθοδος της απαλοιφής

Γ. Κατσουλέας

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

gkatsouleas@hna.gr

14 Οκτωβρίου 2023

Περιεχόμενα

Γραμμικά συστήματα: Βασικές έννοιες

- Γενική μορφή $m \times n$ συστήματος:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- Άγνωστοι: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Συντελεστές: $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(\forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$.
- Λύση του συστήματος καλείται κάθε πλειάδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του συστήματος.
- Γενική ή πλήρης Λύση του συστήματος είναι το σύνολο όλων των λύσεών του.
- Συμβιβαστό καλελιται ένα σύστημα που έχει τουλάχιστον μία λύση. Διαφορετικά, καλείται αδύνατο/μη συμβιβαστό.
- Επίλυση του συστήματος ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης της γενικής λύσης ενός συστήματος.

Γραμμικά συστήματα: Γραφή με χρήση πινάκων (ένα παράδειγμα χαμηλής διάστασης)

Γενική μορφή 2×2 συστήματος:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Θέτουμε τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$$

και τα διανύσματα των αγνώστων και των σταεθερών όρων αντίστοιχα:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \equiv M_{2\times 1}(K).$$

Παρατηρούμε ότι

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Γραμμικά συστήματα: Γραφή με χρήση πινάκων

Το $m \times n$ σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

γράφεται σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(K), \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Γραμμικά συστήματα: Βασικές έννοιες

- Αν $\mathbf{b} = 0$, το σύστημα καλείται ομογενές. Διαφορετικά, καλείται μη ομογενές.
- Παρατηρούμε ότι ένα ομογενές σύστημα είναι πάντα συμβιβαστό, γιατί έχει ως λύση τη μηδενική (η οποία λέγεται και τετριμμένη λύση).
- Ο πίνακας
$$[A \quad \mathbf{b}] \in M_{m\times(n+1)}(K)$$
που προκύπτει με προσθήκη μίας ακόμης στήλης (τη στήλη $\mathbf{b}$) δεξιά του A λέγεται επαυξημένος πίνακας του συστήματος και, όπως θα δούμε, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση των γραμμικών συστημάτων.

Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Μέθοδος απαλοιφής Gauss: Βασικές γραμμοπράξεις

- Σκοπός της μεθόδου είναι από το δεδομένο σύστημα να κατασκευαστεί κάποιο άλλο απλούστερο, που έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό, αλλά λύνεται ευκολότερα.
- Δύο συστήματα με το ίδιο σύνολο λύσεων καλούνται ισοδύναμα.

Πρόταση

Εφαρμογή των παρακάτω στοιχειωδών πράξεων στις εξισώσεις ενόα συστήματος, προκύπτει πάντα σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό:

- Εναλλαγή δύο εξισώσεων του συστήματος.
- Αντικατάσταση μίας εξίσωσης με κάποιο μη μηδενικό πολλαπλάσιό της. Δηλαδή, αντικατάσταση της (ϵ) από την $(c \cdot \epsilon)$ για κάποιο $c \neq 0$.
- Πρόσθεση στα μέλη μίας εξίσωσης (ϵ) τα αντίστοιχα μέλη κάποιας άλλης $(\epsilon^{'})$ πολλαπλασιασμένης επί κάποιο μη μηδενικό αριθμό. Δηλαδή, αντικατάσταση της (ϵ) από την $(\epsilon + c \cdot \epsilon^{'})$ για κάποιο $c \neq 0$.

Βασικές γραμμοπράξεις

- Παρατηρούμε ότι κάθε μία από τις στοιχειώδεις αυτές γραμμοπράξεις στις εξισώσεις του συστήματος αντιστοιχεί σε κάποια αντίστοιχη πράξη στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του συστήματος. Οι αντίστοιχες πράξεις στις γραμμές του πίνακα καλούνται γραμμοπράξεις.
- Έτσι, η αντικατάσταση της δεύτερης εξίσωσης με την εξίσωση που προκύπτει αν σε αυτήν προσθεσουμε την πρώτη εξίσωση πολλαπλασιασμένη επί (-1) αντιστοιχεί στην γραμμμοπράξη

$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 + (-1)\Gamma_1 = \Gamma_2 - \Gamma_1.$$

- Πίνακες που συνδέονται μεταξύ τους με γραμμοπράξεις καλούνται γραμμοϊσοδύναμοι.
- Ισοδύναμα συστήματα αντιστοιχούν σε γραμμοϊσοδύναμους πίνακες, ώστε για την επίλυση γραμμικών συστήμαων στην πράξη εργαζόμαστε μόνο με τον επαυξημένο πίνακα.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα (row echelon form)

Ορισμός

Ένας πίνακας $m \times n$ καλείται κλιμακωτός, όταν:

1. Οι μη μηδενικές γραμμές προηγούνται τυχόν μηδενικών γραμμών του.
2. Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής (που καλείται ηγετικό στοιχείο – *pivot* της γραμμής) βρίσκεται σε θέση δεξιότερη από το αντίστοιχο μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής.

Ορισμός

Ένας πίνακας $m \times n$ καλείται ανηγμένος κλιμακωτός, όταν είναι σε κλιμακωτή μορφή και επιπλέον:

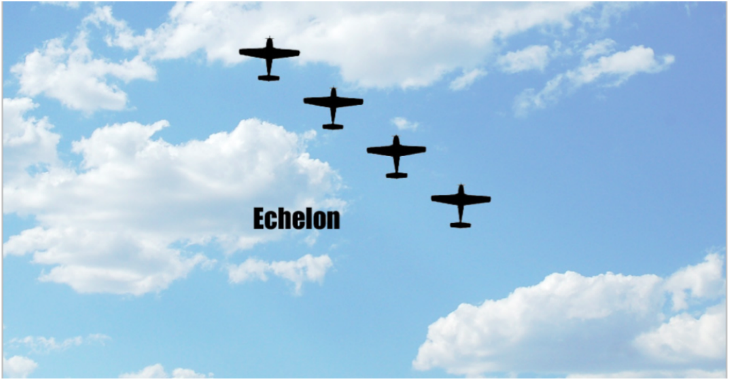
1. Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1.
2. Κάθε στήλη που περιέχει το ηγετικό στοιχείο 1 μίας γραμμής έχει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία μηδενικά.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα (2)

- $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η επίλυση ενός συστήματος που αντιστοιχεί σε έναν κλιμακωτό (και ειδικότερα σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα) είναι σχεδόν άμεση.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα (3)



- Η μέθοδος απαλοιφής Gauss προτείνει την χρησιμοποίηση κατάλληλων γραμμοπράξεων για την τροπή του αρχικού επαυξημένου πίνακα σε γραμμοϊσοδύναμο επαυξημένο κλιμακωτής μορφής (echelon form).
- Ακολούθως, ο Jordan πρότεινε την περαιτέρω αναγωγή στην ακόμα απλούστερη ανηγμένη κλιμακωτή μορφή αυτού (row reduced echelon form).
- Η συνολική μέθοδος αναφέρεται πλέον ως Gauss–Jordan και (με ορισμένες τροποποιήσεις) αποτελεί τη βέλτιστη μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων οποιασδήποτε διάστασης (όχι απαραιτήτως τετραγωνικών) και αποτελεί κοινό τόπο σε κάθε επιστημονικό υπολογισμό.

Αλγόριθμος (Gauss)

Θεώρημα

Κάθε πίνακας μετατρέπεται σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα με την εκτέλεση ενός πεπερασμένου πλήθους γραμμοπράξεων.

Αλγόριθμος:

1. Βρίσκουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.
2. Μεταφέρουμε στον πίνακα πρώτη τη γραμμή που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο της στήλης.
3. Κανούμε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης μονάδα.
4. Κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης κάτω από τη μονάδα μηδενικά.
5. Αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα 1-4 για τις επόμενες γραμμές του πίνακα. (Αν οι γραμμές που απέμειναν είναι μηδενικές, πηγαίνουμε στο 6ο βήμα.)
6. Από γραμμή σε γραμμή, χρησιμοποιώντας το ηγετικό στοιχείο κάθε γραμμής, μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία της στήλης στην οποία ανήκει.

Συμπεράσματα, αναλόγως της κλιμακωτής μορφής του επαυξημένου πίνακα

Ας υποθέσουμε ότι μετά την εφαρμογή της μεθόδου, έχουμε καταλήξει στον επαυξημένο

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1r} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\
0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2r} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{rr} & \cdots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_m
\end{array}\right]$$

με $\tilde{a}_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots r$.

Συμπεράσματα, αναλόγως της κλιμακωτής μορφής του επαυξημένου πίνακα (2)

A Αν $r < m$ και τουλάχιστον ένα από τα $\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_m$ είναι μη μηδενικό, τότε το σύστημα είναι μη συμβιβαστό.

B Αν $r < m$ και $\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_m = 0$ ή $r = m$, το σύστημα είναι συμβιβαστό και μάλιστα:

   i Αν $r = n$,το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση (Σύστημα Cramer).

   ii Αν $r < n$, τότε $n - r$ από τις μεταβλητές ορίζονται αυθαίρετα και οι υπόλοιπες (r σε πλήθος) προσδιορίζονται πλήρως από τις πρώτες. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι έχουμε μια $n - r$ παραμετρική απειρία λύσεων.

Ένα τυπικό παράδειγμα 3×3: Εφαρμογή της μεθόδου Gauss

Παράδειγμα: Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$(A \mid \mathrm{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ελέγχουμε κατά πόσον υπάρχει οδηγό στοιχείο (pivot) στη θέση (1,1) και το χρησιμοποιούμε για να μηδενίσουμε τα στοιχειά από κάτω του στην 1η στήλη (εφόσον είναι μη μηδενικά) με κατάλληλη γραμμοπράξη.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 - 3 \cdot 1 & 8 - 3 \cdot 2 & 1 - 3 \cdot 1 & 12 - 3 \cdot 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Έχοντας "καθαρίσει" την 1η στήλη κάτω από το στοιχείο (1,1), συνεχίζουμε ελέγχοντας κατά πόσον υπάρχει pivot στη θέση (2,2) και το χρησιμοποιούμε για να μηδενίσουμε τα στοιχεία κάτω από αυτό στη 2η στήλη:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\Gamma_3 \longrightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 - 2 \cdot 2 & 1 - 2 \cdot (-2) & 2 - 2 \cdot 6 \end{array}\right) \underset{\sim}{=^{\Gamma_3 \longrightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

Ένα τυπικό παράδειγμα 3×3: Εφαρμογή της μεθόδου Gauss (συνέχεια)

Παράδειγμα: Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$

Με γραμμοπράξεις έχουμε καταλήξει στο γραμμοϊσοδύναμο (εν προκειμένω, άνω τριγωνικό) σύστημα σε κλιμακωτή μορφή:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right) = \left(U \mid \hat{\mathrm{b}}\right).$$

Επιστρέφοντας από τον επαυξημένο στο αντίστοιχο σύστημα, παρατηρούμε ότι λύνεται άμεσα με ανάδρομη (προς τα πίσω) αντικατάσταση:

$$U\mathrm{x} = \hat{\mathrm{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + \ \ z = 2 \\ \quad\ \ 2y - 2z = 6 \\ \qquad\quad\ 5z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y - z = 2, \\ y = \frac{6}{2} + \frac{2}{2} \cdot (-2) = 3 - 2 = 1, \\ z = -2. \end{cases}$$

Δηλαδή, το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Η απλοποίηση της διαδικασίας κατά Jordan

Παράδειγμα: Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$

Με γραμμοπράξεις έχουμε καταλήξει στο γραμμοϊσοδύναμο (εν προκειμένω, άνω τριγωνικό) σύστημα σε κλιμακωτή μορφή:

$$(U \mid \hat{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right).$$

Αντί να επιλύσουμε άμεσα το τριγωνικό σύστημα $Ux = \hat{b}$, συνεχίζουμε με γραμμοπράξεις, προκειμένου να τρέψουμε τον τελευταίο κλιμακωτό επαυξημένο πίνακα $(U \mid \hat{b})$ σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Ξεκινώντας από το τελευταίο pivot στη θέση (3,3), το καθιστούμε μοναδιαίο:

$$(U \mid \hat{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \longrightarrow \frac{1}{5}\Gamma_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \cdot 5 & \frac{1}{5} \cdot (-10) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Στη συνέχεια, "καθαρίζουμε" με κατάλληλες γραμμοπράξεις τα στοιχεία που υπέρκεινται του στοιχείου (3,3) στην 3η στήλη, προκείμενου να το καταστήσουμε το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο την εν λόγω στήλης:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_2 + 2\Gamma_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 + 2 \cdot 1 & 6 + 2 \cdot (-2) \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3}{\sim}$$

$$\overset{\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 - 1 \cdot 1 & 2 - 1 \cdot (-2) \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Η απλοποίηση της διαδικασίας κατά Jordan (συνέχεια)

Παράδειγμα: Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$

Με γραμμοπράξεις έχουμε καταλήξει στο γραμμοϊσοδύναμο σύστημα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το αμέσως προηγούμενο pivot στην θέση (2,2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\Gamma_2 \longrightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 - 2 \cdot 1 & 0 & 4 - 2 \cdot 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(R \mid \tilde{\mathrm{b}}\right).$$

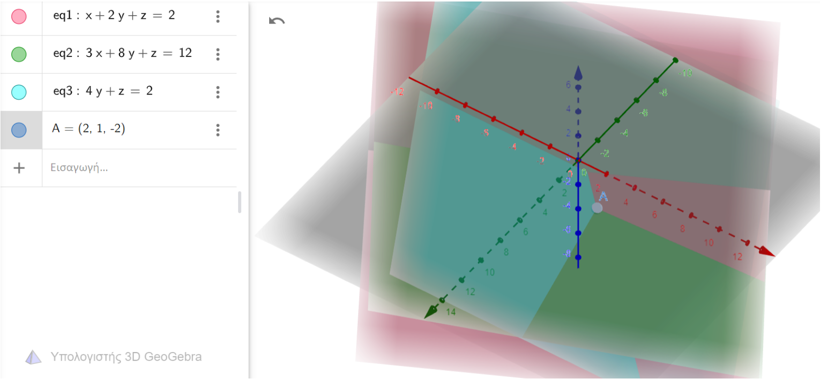
Επιστρέφοντας από τον επαυξημένο στο αντίστοιχο σύστημα $R\mathrm{x} = \tilde{\mathrm{b}}$, παρατηρούμε ότι δεν απαιτείται καν επίλυση, αλλά η λύση "διαβάζεται" από την στήλη των σταθερών όρων του τελευταίου επαυξημένου (!):

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad = 2 \\ \quad\; y \quad\quad = 1 \\ \quad\quad\quad z = -2 \end{cases}.$$

Δηλαδή, το αρχικό σύστημα $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ (αλλά και τα ισοδύναμα με αυτό $U\mathrm{x} = \hat{\mathrm{b}}$ και $R\mathrm{x} = \tilde{\mathrm{b}}$) έχουν μοναδική λύση την

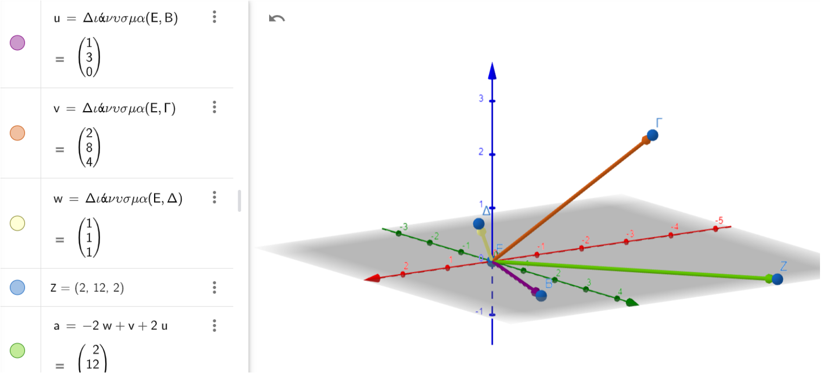
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Η θεώρηση του προβλήματος μέσω των γραμμών του συστήματος



- Κάθε εξίσωση του συστήματος είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.
- Λύση του συστήματος είναι το μοναδικό κοινό σημείο (τομής) A των 3 επιπέδων.

Η θεώρηση του προβλήματος μέσω των στηλών του συστήματος



- Οι 3 στήλες του πίνακα του συστήματος (u, v, w) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (μη συνεπίπεδες) και μπορούν να κατασκευάσουν (με κατάλληλους συντελεστές) οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$.
- Η (μοναδική) έκφραση της δεξιάς πλευράς a του συστήματος ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών (u, v, w) προκύπτει με συντελεστές τα στοιχεία του διανύσματος-λύσης του συστήματος.

Ένα τυπικό παράδειγμα 3×3 και οι παραλλαγές του: 1η Παραλλαγή

1η Παραλλαγή: Εφαρμογή της ολοκληρωμένης μεθόδου Gauss–Jordan στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 6y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$(A \mid \mathrm{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ελέγχουμε κατά πόσον υπάρχει οδηγό στοιχείο (pivot) στη θέση (1,1) και το χρησιμοποιούμε για να μηδενίσουμε τα στοιχειά από κάτω του στην 1η στήλη (εφόσον είναι μη μηδενικά) με κατάλληλη γραμμοπράξη.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{r_2 \longrightarrow r_2 - 3r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 - 3 \cdot 1 & 6 - 3 \cdot 2 & 1 - 3 \cdot 1 & 12 - 3 \cdot 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Έχοντας "καθαρίσει" την 1η στήλη κάτω από το στοιχείο (1,1), συνεχίσουμε ελέγχουμε κατά πόσον υπάρχει pivot στη θέση (2,2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ένα τυπικό παράδειγμα 3×3 και οι παραλλαγές του: 1η Παραλλαγή (συνέχεια)

1η Παραλλαγή: Εφαρμογή της ολοκληρωμένης μεθόδου Gauss–Jordan στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 6y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο $(2, 2)$ είναι μηδενικό, αλλά η κατάσταση "σώζεται", καθώς το ακριβώς από κάτω του στοιχείο $(3, 2)$ είναι μη μηδενικό:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right).$$

Πλέον υπάρχει οδηγό στοιχείο (pivot) στη θέση (2,2) και θα το χρησιμοποιούσαμε για να μηδενίσουμε τυχόν μη μηδενικά στοιχεία από κάτω του στην 2η στήλη (εφόσον υπήρχαν επιπλέον γραμμές). Συνεχίζουμε, ελέγχοντας αν υπάρχει pivot στη θέση (3,3). Όπως και πρίν, έχουμε και 3ο pivot, ώστε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right) = \left(U \mid \hat{b}\right).$$

Έχουμε μεταβεί ήδη σε γραμμοϊσοδύναμη κλιμακωτή μορφή και θα μπορούσαμε να λύσουμε το σύστημα $Ux = \hat{b}$ με ανάδρομη (προς τα πίσω) αντικατάσταση. Ωστόσο, συνεχίζουμε ολοκληρώνοντας τη διαδικασία με την εκδοχή του αλγορίθμου του Jordan.

Ένα τυπικό παράδειγμα 3×3 και οι παραλλαγές του: 1η Παραλλαγή (συνέχεια)

1η Παραλλαγή: Εφαρμογή της ολοκληρωμένης μεθόδου Gauss–Jordan στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 6y + z = 12 \\ \quad\;\; 4y + z = 2 \end{cases}$$

Ξεκινώντας από το τελευταίο pivot στη θέση (3,3), το καθιστούμε μοναδιαίο:

$$(U \mid \hat{\mathrm{b}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right) \underset{\sim}{\Gamma_3 \longrightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\cdot(-2) & -\frac{1}{2}\cdot 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Στη συνέχεια, "καθαρίζουμε" με κατάλληλες γραμμοπράξεις τα στοιχεία που υπέρκεινται του στοιχείου (3,3) στην 3η στήλη, προκειμένου να το καταστήσουμε το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο την εν λόγω στήλης:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1-1 & 2-(-3) \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3}$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1-1\cdot 1 & 2-1\cdot(-3) \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Ένα τυπικό παράδειγμα 3×3 και οι παραλλαγές του: 1η Παραλλαγή (συνέχεια)

1η Παραλλαγή: Εφαρμογή της ολοκληρωμένης μεθόδου Gauss–Jordan στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 6y + z = 12 \\ \quad\;\; 4y + z = 2 \end{cases}$$

Με γραμμοπράξεις έχουμε καταλήξει στο γραμμοϊσοδύναμο σύστημα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το αμέσως προηγούμενο pivot στην θέση (2,2):

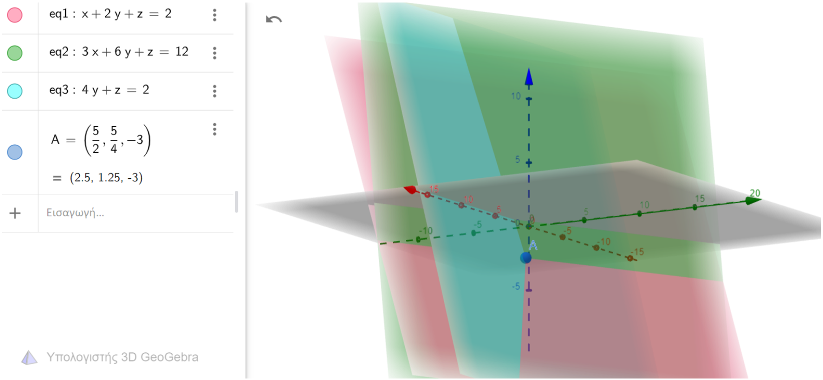
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \longrightarrow \frac{1}{4}\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 - 2 \cdot 1 & 0 & 5 - 2 \cdot \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left(R \mid \tilde{b}\right).$$

Επιστρέφοντας από τον επαυξημένο στο ισοδύναμο σύστημα $Rx = \tilde{x}$, παρατηρούμε ότι δεν απαιτείται καν επίλυση, αλλά η λύση "διαβάζεται" από τη στήλη των σταθερών όρων του τελευταίου επαυξημένου:

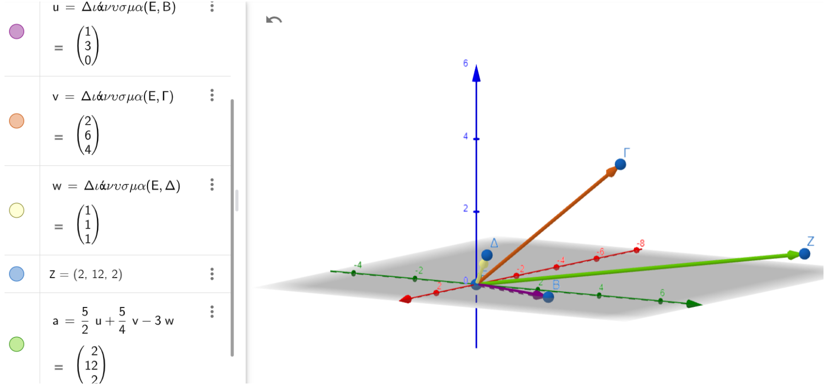
$$\begin{cases} x \qquad\qquad = \frac{5}{2} \\ \qquad y \qquad = \frac{5}{4} \\ \qquad\qquad z = -3 \end{cases} . \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Η θεώρηση του προβλήματος μέσω των γραμμών του συστήματος



- Κάθε εξίσωση του συστήματος είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.
- Λύση του συστήματος είναι το μοναδικό κοινό σημείο (τομής) A των 3 επιπέδων.

Η θεώρηση του προβλήματος μέσω των στηλών του συστήματος



- Οι 3 στήλες του πίνακα του συστήματος (u, v, w) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (μη συνεπίπεδες) και μπορούν να κατασκευάσουν (με κατάλληλους συντελεστές) οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$.
- Η (μοναδική) έκφραση της δεξιάς πλευράς a του συστήματος ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών (u, v, w) προκύπτει με συντελεστές τα στοιχεία του διανύσματος-λύσης του συστήματος.

Ένα τυπικό παράδειγμα 3×3 και οι παραλλαγές του: 2η Παραλλαγή

2η Παραλλαγή: Εφαρμογή της ολοκληρωμένης μεθόδου Gauss–Jordan στο γραμμικό σύστημα:

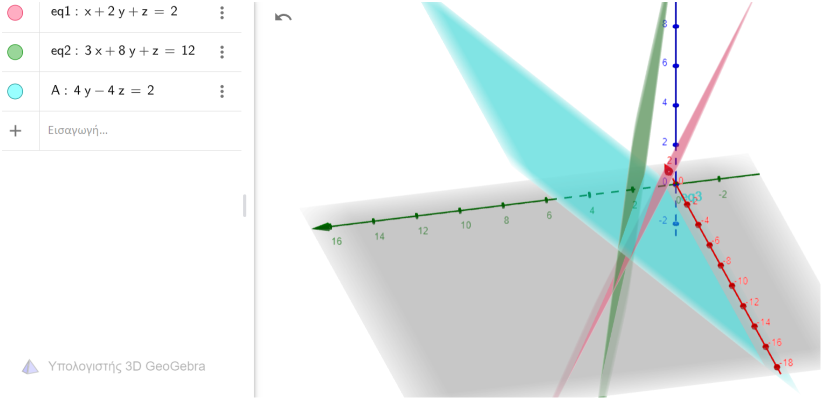
$$\begin{cases} x + \quad 2y + z = 2 \\ 3x + \quad 8y + z = 12 \\ \quad 4y - 4z \quad = 2 \end{cases}$$

$$(A \mid \mathrm{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) = (U \mid \hat{\mathrm{b}}).$$

Επιστρέφοντας από τον επαυξημένο στο ισοδύναμο σύστημα $U\mathrm{x} = \hat{\mathrm{x}}$, παρατηρούμε ότι δεν έχει λύση (αδύνατο/μη συμβιβαστό):

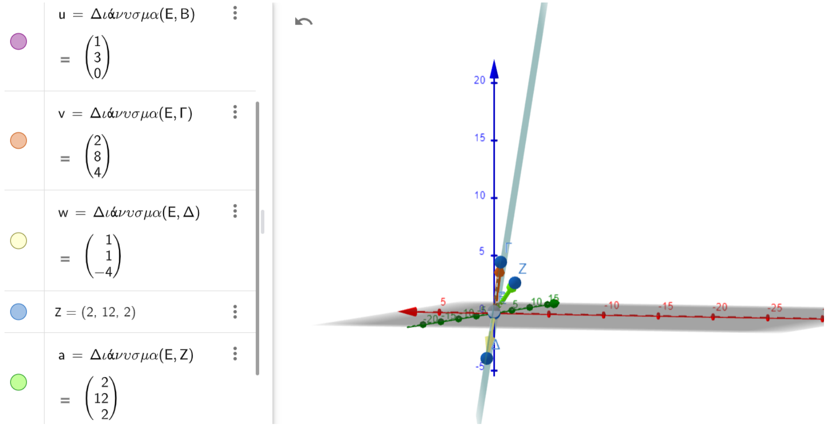
$$\begin{cases} x + 2y + \quad z \quad = 2 \\ \quad 2y - 2z \quad = 6 \\ \qquad 0 = 10. \end{cases}$$

Η θεώρηση του προβλήματος μέσω των γραμμών του συστήματος



- Κάθε εξίσωση του συστήματος είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.
- Τα 3 επίπεδα δεν έχουν κοινό σημείο τομής. Ως εκ τούτου, το συστημα δεν έχει λύση (αδύνατο).

Η θεώρηση του προβλήματος μέσω των στηλών του συστήματος



- Οι 3 στήλες του πίνακα του συστήματος (u, v, w) είναι συνεπίπεδα διανύσματα και δεν μπορούν να παραγάγουν οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$.
- Το διάνυσμα της δεξιάς πλευράς a του συστήματος (“λαχανί” διάνυσμα EZ στο σχήμα) δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών (u, v, w), καθώς βρίσκεται εκτός του επιπέδου που αυτά ορίζουν.

Ένα τυπικό παράδειγμα 3×3 και οι παραλλαγές του: 3η Παραλλαγή

3η Παραλλαγή: Εφαρμογή της ολοκληρωμένης μεθόδου Gauss–Jordan στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y + \ \ z = 2 \\ 3x + 8y + \ \ z = 12 \\ \qquad 4y - 4z = 12 \end{cases}$$

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & -4 & 12 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 12 \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \longrightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (U \mid \hat{\mathbf{b}}).$$

Περνώντας από τον επαυξημένο στο αντίστοιχο σύστημα $U\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$, παρατηρούμε ότι έχει απειρία λύσεων:

$$\begin{cases} x + 2y + \ \ z = 2 \\ \quad 2y - 2z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y - z \\ y = 3 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2(3+z) - z \\ y = 3 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - 3z \\ y = 3 + z. \end{cases}$$

Δηλαδή έχουμε μονοπαραμετρική απειρία λύσεων της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 - 3z \\ 3 + z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3z \\ z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Ένα τυπικό παράδειγμα 3×3 και οι παραλλαγές του: 3η Παραλλαγή (συνέχεια)

3η Παραλλαγή: Εφαρμογή της ολοκληρωμένης μεθόδου Gauss–Jordan στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y + \ \ z = 2 \\ 3x + 8y + \ \ z = 12 \\ \qquad 4y - 4z = 12. \end{cases}$$

Το τελικό τμήμα της διαδικασίας τυποποιείται λίγο ευκολότερα σύμφωνα με τον Jordan:
Οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες που η διαδικασία κατέληξε σε pivot (εν προκειμένω, οι x, y που αντιστοιχούν στην 1η και 2η στήλη, αντίστοιχα) καλούνται βασικές μεταβλητές (pivot variables), ενώ εκείνες που αντιστοιχούν σε στήλες όπου δεν εμφανίστηκαν pivots (εν προκειμένω, η z που αντιστοιχεί στην 3η στήλη) καλούνται ελεύθερες μεταβλητές (free variables) και ως προς αυτές εκφράζονται οι βασικές στην τελική λύση (εδώ, έχουμε μονοπαραμετρική απειρία λύσεων).
Συνεχίζουμε όπως προηγούμενως (ξεκινώντας από το τελευταίο pivot) για να καταλήξουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

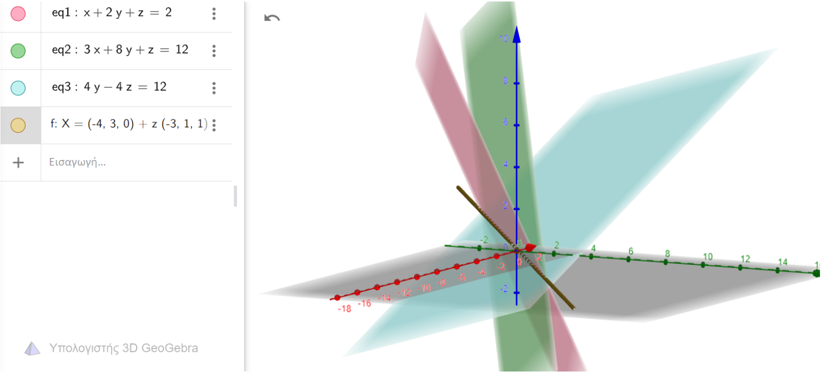
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \longrightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Από τον τελευταίο επαυξημένο, μπορούμε να εκφράσουμε κατευθείαν τη λύση του συστήματος ως εξής:

$$\begin{cases} x \qquad + 3z = -4 \\ \quad y - \ \ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} * \\ * \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R},$$

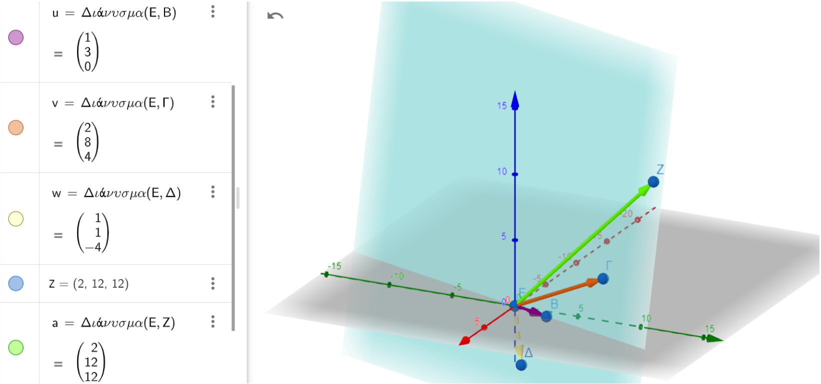
όπου στη θέση της ελεύθερης μεταβλητής (z) στο σταθερό διάνυσμα βάζουμε την τιμή 0 και στην αντίστοιχη θέση του διανύσματος που σταθμίζει η παράμετρος z την τιμή 1.
Οι υπόλοιπες θέσεις του σταθερού διανύσματος (πράσινες) συμπληρώνονται από τα αντίστοιχα στοιχεία της δεξιάς πλευράς του ανηγμένου κλιμακωτού συστήματος, ενώ εκείνες του δεύτερου διανύσματος στην έκφραση (μπλε) από τα αντίθετα εκείνων που δεν έχουν απαλειφθεί στην στήλη της ελεύθερης μεταβλητής (μεταφέρονται στο άλλο μέλος...).

Η θεώρηση του προβλήματος μέσω των γραμμών του συστήματος



- Κάθε εξίσωση του συστήματος είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.
- Τα 3 επίπεδα τέμνονται κατά μία κοινή ευθεία (αξονική δέσμη επιπέδων). Ως εκ τούτου, το συστημα έχει απειρία λύσεων (κάθε σημείο της κοινής ευθείας).

Η θεώρηση του προβλήματος μέσω των στηλών του συστήματος



- Οι 3 στήλες του πίνακα του συστήματος (u, v, w) είναι συνεπίπεδα διανύσματα και δεν μπορούν να παραγάγουν οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$.
- Ωστόσο, το διάνυσμα της δεξιάς πλευράς a του συστήματος ανήκει επίσης στο επίπεδο που αυτά ορίζουν, ώστε μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών u, v και w (με απειρία εκφράσεων).

Χώρος στηλών πίνακα

- Χώρος στηλών (column space) του πίνακα $A \in \Pi_{m \times n}$ (συμβ. $\mathscr{C}(A)$) καλείται το σύνολο:

$$\mathscr{C}(A) = \left\{Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\right\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

- Ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \Pi_{\mathbf{4} \times \mathbf{3}}.$$

Χώρος στηλών πίνακα

- Χώρος στηλών (column space) του πίνακα $A \in \Pi_{m\times n}$ (συμβ. $\mathscr{C}(A)$) καλείται το σύνολο:
$$\mathscr{C}(A) = \left\{A\mathrm{x} \in \mathbb{R}^m : \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n\right\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$
- Ας θεωρήσουμε τον πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \Pi_{\mathbf{4}\times\mathbf{3}}.$$
- Προφανώς, ο χώρος $\mathscr{C}(A)$ περιλαμβάνει τις στήλες του πίνακα A:
$$\Sigma_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Sigma_{\mathbf{3}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$
αλλά και όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς αυτών ($x_{\mathbf{1}}\Sigma_{\mathbf{1}} + x_{\mathbf{1}}\Sigma_{\mathbf{2}} + x_{\mathbf{3}}\Sigma_{\mathbf{3}}$) δηλαδή,
$$\mathscr{C}(A) = \left\{Ax \in \mathbb{R}^{\mathbf{4}} : x \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}\right\} = \{x_{\mathbf{1}}\Sigma_{\mathbf{1}} + x_{\mathbf{1}}\Sigma_{\mathbf{2}} + x_{\mathbf{3}}\Sigma_{\mathbf{3}} : x_{\mathbf{1}}, x_{\mathbf{2}}, x_{\mathbf{3}} \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$$
(θυμηθείτε την σχετική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού πίνακα $A \in \Pi_{m\times n}$ επί διάνυσμα $\mathrm{x} \in \Pi_{n\times\mathbf{1}}$).
- Ερώτημα: Έχουμε $\mathscr{C}(A) = \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ ή $\mathscr{C}(A) \subsetneq \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$;
Ισοδύναμο ερώτημα: Είναι το σύστημα $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ συμβιβαστό για κάθε διάνυσμα σταθερών όρων $\mathrm{b} \in \Pi_{\mathbf{4}\times\mathbf{1}}$;

Χώρος στηλών πίνακα

- Χώρος στηλών (column space) του πίνακα $A \in \Pi_{m \times n}$ (συμβ. $\mathscr{C}(A)$) καλείται το σύνολο:

$$\mathscr{C}(A) = \left\{Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\right\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

- Ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \Pi_{4 \times 3}.$$

- Προφανώς, ο χώρος $\mathscr{C}(A)$ περιλαμβάνει τις στήλες του πίνακα A:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

αλλά και όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς αυτών ($x_1\Sigma_1 + x_1\Sigma_2 + x_3\Sigma_3$) δηλαδή,

$$\mathscr{C}(A) = \left\{Ax \in \mathbb{R}^4 : x \in \mathbb{R}^3\right\} = \{x_1\Sigma_1 + x_1\Sigma_2 + x_3\Sigma_3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(θυμηθείτε την σχετική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού πίνακα $A \in \Pi_{m \times n}$ επί διάνυσμα $x \in \Pi_{n \times 1}$).

- Ερώτημα: Έχουμε $\mathscr{C}(A) = \mathbb{R}^4$ ή $\mathscr{C}(A) \subsetneq \mathbb{R}^4$;
  Ισοδύναμο ερώτημα: Είναι το σύστημα $Ax = b$ συμβιβαστό για κάθε διάνυσμα σταθερών όρων $b \in \Pi_{4 \times 1}$;

- Στην προκειμένη περίπτωση, έχουμε 4 εξισώσεις και 3 αγνώστους, οπότε γενικά μάλλον όχι... (Επίσης, από μίαν άλλη σκοπιά, έχουμε 3 μόνο στήλες, οπότε διαισθητικά δε θα μπορούν να "γεμίσουν" όλο το χώρο $\mathbb{R}^4$.)

Χώρος στηλών πίνακα A και ύπαρξη λύσης στο σύστημα $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$

- Ισοδύναμο ερώτημα: Για ποιά διανύσματα σταθερών όρων $\mathrm{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^4$ (σε μορφή πίνακα–στήλης 4×1) είναι συμβιβαστό το σύστημα

$$A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}?$$

- Μπορείτε να φανταστείτε κάποια κατάλληλα διανύσματα $\mathrm{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^4$;

Χώρος στηλών πίνακα A και ύπαρξη λύσης στο σύστημα $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$

- Ισοδύναμο ερώτημα: Για ποιά διανύσματα σταθερών όρων $\mathrm{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^4$ (σε μορφή πίνακα–στήλης 4×1) είναι συμβιβαστό το σύστημα

$$A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} ?$$

- Μπορείτε να φανταστείτε κάποια κατάλληλα διανύσματα $\mathrm{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^4$;

- $\mathbb{O}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ με τετριμμένη λύση $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, με λύση $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

  $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, με λύση $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, με λύση $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Παρατήρηση: Για την εύρεση επιπλέον επιλογών για το b, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε αντιστρόφως: θεωρώντας τυχαία διανύσματα x, να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα διανύσματα σταθερών όρων $\mathrm{b} = A\mathrm{x}$.

- Παρατηρούμε ότι το σύστημα $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ είναι επιλύσιμο ακριβώς όταν

$$\mathrm{b} \in \mathscr{C}(A) = \{x_1\Sigma_1 + x_1\Sigma_2 + x_3\Sigma_3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

- Σχετικός προβληματισμός: Είναι οι στήλες Σ_1, Σ_2 και Σ_3 του A στο τρέχον παράδειγμα και οι τρεις απαραίτητες για την περιγραφή του αντίστοιχου χώρου στηλών $\mathscr{C}(A)$;

Μηδενοχώρος πίνακα

- Ο μηδενοχώρος (nullspace) πίνακα $A \in \Pi_{m\times n}$ ορίζεται ως ο χώρος:

$$\mathscr{N}(A) = \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathrm{x} = \mathbb{O}_{m\times\mathbf{1}} \right\} \subset \mathbb{R}^m.$$

- Δηλαδή, ο μηδενοχώρος $\mathscr{N}(A)$ αποτελεί τον χώρο λύσεων του ομογενούς συστήματος με πίνακα συστήματος τον A.
- Με άλλα λόγια, ενώ ο χώρος των στηλών ενός $m \times n$ πίνακα A αναφέρεται στα δυνητικά διανύσματα $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^m$ στη δεξιά πλευρά ενός συμβιβαστού συστήματος $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, ο μηδενοχώρος αναφέρεται στις λύσεις x ενός τέτοιου συστήματος για $\mathrm{b} = \mathbb{O}_{m\times\mathbf{1}}$.
- Δηλαδή, για τον προηγούμενο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

έχουμε $\mathscr{N}(A) \subset \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ και $\mathscr{C}(A) \subset \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$.

Προσδιορισμός μηδενοχώρου πίνακα

- Για τον πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$
έχουμε $\mathscr{N}(A) \subset \mathbb{R}^3$ και $\mathscr{C}(A) \subset \mathbb{R}^4$.

- Για τον προσδιορισμό του αντίστοιχου $\mathscr{N}(A)$ αρκεί η επίλυση (εύρεση όλων των λύσεων) του συστήματος
$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Πριν υπολογίσουμε τον μηδενοχώρο οργανωμένα, μπορείτε να "δείτε" άμεσα τυχόν προφανείς λύσεις; Δηλαδή, κάποιους προφανείς συνδυασμούς των στηλών του A που να ικανοποιούν το τελευταίο σύστημα;

Προσδιορισμός μηδενοχώρου πίνακα

- Για τον πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$
έχουμε $\mathscr{N}(A) \subset \mathbb{R}^3$ και $\mathscr{C}(A) \subset \mathbb{R}^4$.

- Για τον προσδιορισμό του αντίστοιχου $\mathscr{N}(A)$ αρκεί η επίλυση (εύρεση όλων των λύσεων) του συστήματος
$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Πριν υπολογίσουμε τον μηδενοχώρο οργανωμένα, μπορείτε να "δείτε" άμεσα τυχόν προφανείς λύσεις; Δηλαδή, κάποιους προφανείς συνδυασμούς των στηλών του A που να ικανοποιούν το τελευταίο σύστημα;
$$\mathbb{O}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{καθώς } \Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma_3) \tag{1}$$

Προσδιορισμός μηδενοχώρου πίνακα

- Για τον πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$
έχουμε $\mathcal{N}(A) \subset \mathbb{R}^3$ και $\mathcal{C}(A) \subset \mathbb{R}^4$.

- Για τον προσδιορισμό του αντίστοιχου $\mathcal{N}(A)$ αρκεί η επίλυση (εύρεση όλων των λύσεων) του συστήματος
$$A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Πριν υπολογίσουμε τον μηδενοχώρο οργανωμένα, μπορείτε να "δείτε" άμεσα τυχόν προφανείς λύσεις; Δηλαδή, κάποιους προφανείς συνδυασμούς των στηλών του A που να ικανοποιούν το τελευταίο σύστημα;
$$\mathbb{O}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{καθώς } \Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma_3) \tag{1}$$
Αλλά και γενικότερα, διανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix} t \\ t \\ -t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ (καθώς $t\Sigma_1 + t\Sigma_2 = t\Sigma_3$). Παρατηρείστε ότι η γενική αυτή περιγραφεί περιλαμβάνει και τα δύο διανύσματα στην (1) για τις επιλογές $t = 0, 1$, αντιστοίχως.

- Μάλιστα, τυχόν αθροίσματα ή βαθμωτά πολλαπλάσια στοιχείων του μηδενοχώρου ανήκουν επίσης σε αυτόν. Πράγματι:
$$\begin{cases} A\mathrm{x} &= \mathbb{O} \\ A\mathrm{y} &= \mathbb{O} \end{cases} \Rightarrow A(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \mathbb{O} \quad \text{και} \quad A(\lambda\mathrm{x}) = \mathbb{O} \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Προσδιορισμός μηδενοχώρου πίνακα: Παράδειγμα

- Να προσδιοριστεί ο μηδενοχώρος $\mathcal{N}(A)$ του προηγύμενου πίνακα A.
- Αρκεί η επίλυση (εύρεση όλων των λύσεων) του συστήματος

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση ομογενών συστημάτων, όπως το ανωτέρω, αποφεύγουμε να γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος,

$$\left(A \mid \mathbb{O}_{m\times 1}\right).$$

αλλά είθισται να εφαρμόζουμε γραμμοϊσοδυναμίες κατευθείαν στον πίνακα του συστήματος A, δεδομένου ότι οι γραμμοπράξεις στο διάνυσμα των σταθερών όρων $b = \mathbb{O}$ δεν είναι παραγωγικές...

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1 \\ \sim \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 4\Gamma_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2 \\ \sim \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_2 \to (-1)\cdot\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}.$$

- Άρα, ο μηδενοχώρος

$$\mathscr{C}(A) = \{z\,(-1, -1, 1) : z \in \mathbb{R}\}.$$

στην παράδειγμά μας είναι μία ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων με διεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα $(-1, -1, 1)$.

- Μάλιστα, αποτελείται αποκλειστικά από τις λύσεις που εντοπίσαμε προηγουμένως "με το μάτι".

Προσδιορισμός μηδενοχώρου πίνακα: 2ο Παράδειγμα

- **Προσδιορισμός του $\mathscr{N}(A)$ για τον πίνακα:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

Προσδιορισμός μηδενοχώρου πίνακα: 2ο Παράδειγμα

- Προσδιορισμός του $\mathscr{N}(A)$ για τον πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

- Πριν ξεκινήσουμε, παρατηρούμε άμεσα ότι $\Sigma_2 = 2\Sigma_1$, καθώς και $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_3$. Θα δούμε πώς η διαδικασία της απαλοιφής θα εντοπίσει τις σχέσεις αυτές, ακόμα και αν δεν είναι τόσο οφθαλμοφανείς (ή εμείς τόσο παρατηρητικοί..).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{\underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1}{\sim}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & {\color{red}2} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{Άρα, } \Sigma_1, \Sigma_2 \text{ συγγραμμικές}} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & {\color{red}2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Άρα, } \Gamma_3 \text{ εξαρτημένη από τις } \Gamma_1, \Gamma_2}.$$

- Γενικά: Βαθμός (rank) του πίνακα A καλείται το πλήθος των pivots. Αν $A \in \Pi_{m \times n}$, τότε το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών είναι $n - rank(A)$.

- Εν προκειμένω, βασικές μεταβλητές οι x_1, x_3 (στις στήλες που παρατηρήθηκαν pivots) και ελεύθερες οι x_2, x_4 (που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες στήλες).

- Μεταφράζουμε στο ισοδύναμο ομογενές σύστημα $Ux = \mathbb{O}_{4\times 1}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2x_2 + 4x_4 - 2x_4 = -2x_2 + 2x_4, \\ x_3 = -2x_4. \end{cases}$$

- Δηλαδή, έχουμε $2 (= n - rank(A) = 4 - 2)$-παραμετρική απειρία λύσεων της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

- Στην περίπτωση αυτή, δεν υπάρχει δυνατότητα σχεδιασμού του $\mathscr{C}(A)$, καθώς $\mathscr{C}(A) \subset \mathbb{R}^4$.

Προσδιορισμός μηδενοχώρου πίνακα: 2ο Παράδειγμα (με χρήση αλγορίθμου Jordan

- Προσδιορισμός του $\mathcal{N}(A)$ για τον πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

- Συνεχίζουμε από την απλούστερη γραμμοϊσοδύναμη μορφή (κλιμακωτή) του πίνακα A στην προηγούμενη διαφάνεια, προκειμένου να μεταβούμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή αυτού:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \frac{1}{2}\cdot\Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\cdot\Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

- Όπως προηγουμένως, βασικές μεταβλητές οι x_1, x_3 (στις στήλες που παρατηρήθηκαν pivots) και ελεύθερες οι x_2, x_4 (που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες στήλες).

- Για τον σχηματισμό της γενικής λύσης κατευθείαν από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, θεωρούμε ένα διάνυσμα στον μηδενοχώρο για καθεμιά από τις ελεύθερες μεταβλητές. Στα διανύσματα αυτά, θέτουμε εκ περιτροπής μία από τις ελεύθερες μεταβλητές=1 και όλες τις υπόλοιπες=0:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} * \\ 1 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

- Τα υπόλοιπα στοιχεία των διανυσμάτων συμπληρώνονται από τα αντίθετα των στοιχείων των μη μηδενικών γραμμών στις αντίστοιχες στήλες της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Προσδιορισμός μηδενοχώρου πίνακα: 3ο Παράδειγμα (ανάστροφο του προηγουμένου)

- **Προσδιορισμός του $\mathcal{N}(A)$ για τον πίνακα A^T, όπου:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

Προσδιορισμός μηδενοχώρου πίνακα: 3ο Παράδειγμα (ανάστροφο του προηγουμένου)

- Προσδιορισμός του $\mathcal{N}(A)$ για τον πίνακα A^T, όπου: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \\ \sim \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_1 \end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{Άρα, } \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ συγγραμμικές}} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3}{\sim} \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & \color{red}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\cdot\Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

- Παρατηρούμε ότι και στην περίπτωση αυτήν, έχουμε $rank(A^T) = 2$. Γενικά: $rank(A) = rank(A^T)$.
- Αν $A \in \Pi_{m \times n}$, τότε το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών είναι $n - rank(A) \Rightarrow$ Εδώ έχουμε $3 - 2 = 1$ ελεύθερη μεταβλητή.
- Εν προκειμένω, βασικές μεταβλητές οι x_1, x_2 (στις στήλες που παρατηρήθηκαν pivots) και ελεύθερη η x_3 (που αντιστοιχεί στην τελευταία).
- Μεταφράζουμε στο ισοδύναμο ομογενές σύστημα $Ux = \mathbb{O}_{4\times 1}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \quad\;\; 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 = 2x_3 - 3x_3 = -x_3, \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

- Δηλαδή, έχουμε $1(= n - rank(A) = 3 - 2)$-παραμετρική απειρία λύσεων της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R},$$

ώστε πρόκειται περί ευθείας στον $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από την αρχή και έχει τη διεύθυνση του

Προσδιορισμός μηδενοχώρου πίνακα: 3ο Παράδειγμα (με χρήση αλγορίθμου Jordan

- Προσδιορισμός του $\mathcal{N}(A)$ για τον πίνακα A^T, όπου: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \\ \sim \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_1 \end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{Άρα, } \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ συγγραμμικές}} \underset{\sim}{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2 \cdot \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \frac{1}{2} \cdot \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

- Όπως προηγουμένως, βασικές μεταβλητές οι x_1, x_2 (στις στήλες που παρατηρήθηκαν pivots) και ελεύθερη η x_3 (που αντιστοιχεί στην τελευταία).
- Δηλαδή, έχουμε $1 (= n - rank(A) = 3 - 2)$-παραμετρική απειρία λύσεων. Η γενική λύση συμπληρώνεται άμεσα από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R, θέτοντας την μοναδική ελεύθερη μεταβλητή=1 (θυμηθείτε: εκ περιτροπής...) και τις υπόλοιπες θέσεις του διανύσματος με τα αντίθετα στοιχεία των μη μηδενικών γραμμών της στήλης που αντιστοιχεί στην ελεύθερη μεταβλητή:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} * \\ * \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Η γενική λύση του συστήματος $Ax = b$ $(b \neq \mathbb{O}_{m\times 1})$

- Αναζητούμε συνθήκες, προκειμένου το σύστημα $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = b_3 \end{cases}$ να είναι συμβιβαστό.

- Αναζητούμε συνθήκες, προκειμένου το σύστημα $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = b_3 \end{cases}$ να είναι συμβιβαστό.

- Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}}{\underset{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim}$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right).$$

- Συνθήκη στο b για ύπαρξη λύσης:

$$Ax = b \Leftrightarrow b \in \mathscr{C}(A).$$

Είδαμε ότι η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη: αν ένας συνδυασμός των γραμμών δίνει την μηδενική γραμμή, τότε ο ίδιος συνδυασμός στα στοιχεία του διανύσματος των σταθερών όρων θα πρέπει να δίνει την τιμή μηδέν. Στο παράδειγμα, αν π.χ. $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, τότε

$$(A \mid b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Η γενική λύση του συστήματος $Ax = b$ (συνέχεια)

- Για την εύρεση της γενικής λύσης του συστήματος $Ax = b$:

1. Υπολογίζουμε μία ειδική λύση $x_{ειδική}$ του $Ax = b$, θέτοντας όλες τις ελεύθερες μεταβλητές=0 και επιλύοντας το σύστημα $Ax = b$ ως προς τις βασικές.
   - Στο τρέχον παράδειγμα, έχουμε

$$(A \mid b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ \quad\;\; 2x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_{ειδική} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Προσδιορίζουμε τον μηδενοχώρο (γενική λύση $x_{ομογ}$ του $Ax = \mathbb{O}$), όπως έχουμε ήδη μελετήσει.
3. Γενική λύση του $Ax = b$ είναι:

$$x = x_{ειδική} + x_0.$$

Πράγματι,

$$\begin{array}{rl} Ax_{ομογ} & = \mathbb{O} \\ Ax_{ειδική} & = b \\ \hline A\left(x_{ειδική} + x_0\right) & = b \end{array}$$

   - Στο τρέχον παράδειγμα, έχουμε

$$x = x_{ειδική} + x_{ομογ} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Η γενική λύση του συστήματος $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ (σε σχέση με ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A)

- Στο τρέχον παράδειγμα, το σύστημα $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \ \ 8x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = b_3 \end{cases}$ έχει γενική λύση:

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_{\varepsilon\iota\delta\iota\kappa\acute{\eta}} + \mathrm{x}_{o\mu o\gamma} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

- Επίσης, έχουμε προσδιορίσει μία ισοδύναμη κλιμακωτή μορφή του αντίστοιχου επαυξημένου πίνακα:

$$(A \mid \mathrm{b}) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (U \mid \hat{\mathrm{b}}).$$

- Συνεχίζοντας κατά Jordan για την αντίστοιχη ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$(U \mid \hat{\mathrm{b}}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1 \to r_1 - r_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2 \to \frac{1}{2} r_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Βάσει του τελευταίου, θα μπορούσαμε να έχουμε συμπληρώσει άμεσα τη γενική λύση ως εξής (βασικές μεταβλητές οι x_1, x_3 και οι ελεύθερες x_2, x_4 αντικαθίστανται ως μηδενικές στην ειδική λύση και εκ περιτροπής=1 για την γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς):

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} * \\ 1 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Ένα παραμετρικό παράδειγμα

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \kappa y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \ \ y + \kappa z = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

Ένα παραμετρικό παράδειγμα

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa x + y + z = 1 \\ x + \kappa y + z = 1 \\ x + y + \kappa z = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

Ξεκινάμε από τον επαυξημένο του συστήματος $(A \mid \hat{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \kappa & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \kappa & 1 \end{array}\right)$. Καθώς δεν είμαστε σίγουροι αν το στοιχείο στη θέση είναι pivot (είναι μόνο στην περίπτωση που $\kappa \neq 0$), πραγματοποιούμε εναλλαγή γραμμών:

$$(A \mid \hat{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \kappa & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \kappa & 1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \kappa & 1 \\ 1 & \kappa & 1 & 1 \\ \kappa & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \kappa\Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \kappa & 1 \\ 0 & \kappa - 1 & 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa & 1 - \kappa^2 & 1 - \kappa \end{array}\right)$$

- Περίπτωση 1η: $\kappa \neq 1$. Τότε, το στοιχείο (2,2) στον τελευταίο επαυξημένο είναι οδηγό (pivot) και μπορούμε να συνεχίσουμε την αναγωγή:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \kappa & 1 \\ 0 & \kappa - 1 & 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa & 1 - \kappa^2 & 1 - \kappa \end{array}\right) \underset{\Gamma_3 \to \frac{1}{1-\kappa}\Gamma_3}{\overset{\Gamma_2 \to \frac{1}{\kappa-1}\Gamma_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \kappa & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 + \kappa & 1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \kappa & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \kappa & 1 \end{array}\right).$$

  - Περίπτωση 1α: $\kappa = -2$. Στην περίπτωση αυτή, δεν υπάρχει pivot στην θέση (3,3) και οδηγούμαστε στο αδύνατο σύστημα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \kappa & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  - Περίπτωση 1β: $\kappa \neq 1$, $\kappa \neq -2$.

Ένα παραμετρικό παράδειγμα (2)

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \kappa y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \ \ y + \kappa z = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

- Περίπτωση 1β: $\kappa \neq 1$, $\kappa \neq -2$. Τότε, το στοιχείο (2,2) στον τελευταίο επαυξημένο είναι οδηγό (pivot) και μπορούμε να συνεχίσουμε την αναγωγή:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \kappa & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\kappa & 1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \to \frac{1}{2+\kappa}\Gamma_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \kappa & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2+\kappa} \end{array}\right) \underset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \kappa\Gamma_3}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 - \frac{k}{2+\kappa} = \frac{2}{2+\kappa} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2+\kappa} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2+\kappa} \end{array}\right)$$

$$\overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2+\kappa} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2+\kappa} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2+\kappa} \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2+\kappa} \\ \frac{1}{2+\kappa} \\ \frac{1}{2+\kappa} \end{bmatrix}$$

  μοναδική λύση.

- Περίπτωση 2: $\kappa = 1$. Στην περίπτωση αυτή, και οι τρεις εξισώσεις είναι ταυτιζόμενες:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  δηλαδή το σύστημα εκφυλίζεται σε μία και μόνη εξίσωση $x + y + z = 1$ (επίπεδο, ώστε αναμένεται 2-παραμετρική απειρία λύσεων).

  Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με όσα έχουμε πει, βασική μεταβλητή είναι μόνο η x (αντιστοιχεί στην 1η στήλη, την μόνη με οδηγό στοιχείο), ενώ y, z είναι ελεύθερες μεταβλητές.

Ένα παραμετρικό παράδειγμα (3)

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \kappa y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \ \ y + \kappa z = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

- Περίπτωση 2: $\kappa = 1$. Στην περίπτωση αυτή, και οι τρεις εξισώσεις είναι ταυτιζόμενες:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \sim \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

δηλαδή το σύστημα εκφυλίζεται σε μία και μόνη εξίσωση $x + y + z = 1$ (επίπεδο, ώστε αναμένεται 2-παραμετρική απειρία λύσεων).

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, βασική μεταβλητή είναι μόνο η x (αντιστοιχεί στην 1η στήλη, την μόνη με οδηγό στοιχείο), ενώ y, z είναι ελεύθερες μεταβλητές.

Η γενική λύση στην περίπτωση αυτή διαμορφώνεται από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου ως εξής:

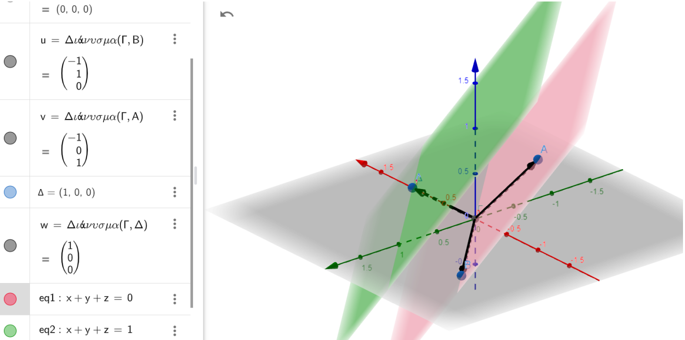
$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} * \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Φυσικά, απλούστερα θα μπορούσαμε να γράψουμε από τη μοναδική εξίσωση του συστήματος:

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Ένα παραμετρικό παράδειγμα (4)

Απεικόνιση του χώρου λύσεων του συστήματος για $\kappa = 1$



- Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα εκφυλίζεται στην μοναδική εξίσωση $x + y + z = 1$, δηλαδή λύσεις του συστήματος στον $\mathbb{R}^3$ είναι όλα τα σημεία του πράσινου επιπέδου. Παρατηρείστε επίσης ότι το διάνυσμα $\mathsf{w} = (1, 0, 0)$ ανήκει στο πράσινο επίπεδο $x + y + z = 1$, ώστε αποτελεί ειδική λύση $\mathsf{x}_{\text{ειδική}} = \mathsf{w} = (1, 0, 0)$ του συστήματος.
- Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα για $\kappa = 1$ εκφυλίζεται επίσης στην $x + y + z = 0$, δηλαδή λύσεις του συστήματος στον $\mathbb{R}^3$ είναι όλα τα σημεία του κόκκινου επιπέδου. Παρατηρείστε την περιγραφή του κόκκινου επιπέδου ως $\mathsf{x}_{\text{ομογ}} = \{y\,(-1, 1, 0) + z\,(-1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$ μέσω των διανυσμάτων u και v στο σχήμα.
- Συνολικά, έχουμε την περιγραφή του πράσινου επιπέδου μέσα από τον χώρο λύσεων του συστήματος ως $(x, y, z) = \mathsf{x}_{\text{ειδική}} + \mathsf{x}_{\text{ομογ}}$.

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. $\begin{cases} w + \ \ x - 2y = 0 \\ 5w + 2x - \ \ y = -3 \\ 2w + 3x + \ \ y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

3. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα $\begin{cases} x + \ \ y - \ \ 6z = \alpha \\ 2x + \ \ y - \ \ 2z = 8 \\ 4x + 4y - 24z = 13 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις/μοναδική λύση/καμία λύση. Να βρεθούν οι λύσεις, στις περιπτώσεις που το σύστημα είναι συμβιβαστό.

4. $\begin{cases} x - y + \ \ z = 0 \\ 2x + y + \ \ z = 1 \\ 4x - y + 3z = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 2y - \ \ z = 2 \\ 2x - \ \ y + \ \ z = -3 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 + \ \ x_5 = 1 \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 \qquad\quad + 4x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 = 1 \\ x_1 \qquad\quad + \ \ x_3 + 2x_4 + \ \ x_5 = 0 \end{cases}$

Ασκήσεις για εξάσκηση

7. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου κ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \kappa x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = k \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

8. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ:

$$` < `a \begin{cases} x + \lambda y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 5\lambda + 1 \\ x - y + 3z = 4\lambda + 2 \\ x - 2\lambda y + 7z = 10\lambda - 1 \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} w + x - 4y + z = 1 \\ 7w + x - 3y + z = 2 \\ -9w + 3x - 14y + 3z = 1 \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} -w + x + 2y + 3z = -1 \\ - y + z = -1 \\ 2w - 2x - 7y - 3z = 2 \end{cases}$$