6.3. Πράξεις με πίνακες.

Στο σύνολο των πινάκων μπορεί να οριστεί αλγεβρικός λογισμός – πράξεις δηλαδή μεταξύ των πινάκων, οι οποίες έχουν πολλά κοινά στοιχεία με τις γνωστές πράξεις μεταξύ αριθμών. Εμφανίζονται όμως και σημαντικές διαφορές οι οποίες απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Στην Ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι ορισμοί των πράξεων μεταξύ πινάκων καθώς και οι βασικές ιδιότητες τους.

6.3.1. Ισότητα πινάκων.

Προσπαθώντας να οικοδομήσει κανείς ένα σύστημα λογισμού, θα πρέπει πριν από όλα να ξεκαθαρίσει πότε δύο από τα αντικείμενα που χρησιμοποιεί είναι ίσα. Έτσι, στην περίπτωση των πινάκων, δύο πίνακες $A = (\alpha_{ij}),\ B = (\beta_{ij}),$ θα ονομάζονται ίσοι αν

- Έχουν την ίδια διάσταση και
- Τα στοιχεία τους που βρίσκονται στις ίδιες θέσεις είναι ένα προς ένα ίσα: $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$, για οποιαδήποτε επιλογή δεικτών i, j.

Έτσι το στοιχείο α_{ij} που βρίσκεται στη θέση (i,j) του πίνακα *A*, είναι δηλαδή στην i-γραμμή και τη j-στήλη, είναι ίσο με το αντίστοιχο στοιχείο β_{ij} του πίνακα *B*.

Για παράδειγμα:

- ✓ Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ίσοι.
- ✓ Οι $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 5 & 15 & 0 \\ 4 & -2 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 15 & 0 \\ 4 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ δεν είναι ίσοι αφού τα στοιχεία που βρίσκονται στις θέσεις (1,2) – δηλαδή στην πρώτη γραμμή και τη δεύτερη στήλη, δεν είναι ίσα.
- ✓ Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ είναι ίσοι αν και μόνο αν ισχύει ότι $x^2 = 1$ (αφού όλα τα υπόλοιπα στοιχεία συμπίπτουν) κάτι που ισχύει αν $x = 1$ ή $x = -1$.
- ✓ Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ δεν είναι ίσοι αφού έχουν διαφορετική διάσταση.

6.3.2. Πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων.

Δύο πίνακες μπορούν να προστεθούν υπό την προϋπόθεση ότι έχουν την ίδια διάσταση. Έτσι, αν $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & & \beta_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$ είναι δύο mxn πίνακες, το άθροισμά τους ορίζεται ως εξής:

$$A+B=\begin{pmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \alpha_{13}+\beta_{13} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \alpha_{23}+\beta_{23} & & \alpha_{2n}+\beta_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \alpha_{m2}+\beta_{m2} & \alpha_{m3}+\beta_{m3} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{pmatrix}.$$

Προσθέτουμε, δηλαδή, ένα προς ένα τα στοιχεία του πίνακα A με τα στοιχεία του πίνακα B που βρίσκονται στην ίδια θέση:

$$A+B=(\alpha_{ij})+(\beta_{ij})=(\alpha_{ij}+\beta_{ij}).$$

Παραδείγματα:

- ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 0+20 \\ -2+5 & 4-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$
- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -13 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 5 & 15 & 0 \\ 4 & -2 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3 & 4+7 & 0-1 \\ -4\mp 5 & 5+15 & 6+0 \\ 0+4 & -6-2 & -13+11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 11 & -1 \\ 1 & 20 & 6 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$
- ✓ Αντίθετα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 5 & 15 & 0 \\ 4 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ δεν μπορούν να προστεθούν αφού έχουν διαφορετική διάσταση.

Ανάλογα μπορεί να οριστεί η ***διαφορά δύο πινάκων*** <u>ίδιας διάστασης</u> ως ο πίνακας που περιέχει τις διαφορές των αντίστοιχων στοιχείων τους:

$$A-B=\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\beta_{11} & \alpha_{12}-\beta_{12} & \alpha_{13}-\beta_{13} & \cdots & \alpha_{1n}-\beta_{1n} \\ \alpha_{21}-\beta_{21} & \alpha_{22}-\beta_{22} & \alpha_{23}-\beta_{23} & & \alpha_{2n}-\beta_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}-\beta_{m1} & \alpha_{m2}-\beta_{m2} & \alpha_{m3}-\beta_{m3} & \cdots & \alpha_{mn}-\beta_{mn} \end{pmatrix},$$

ή, ισοδύναμα, $A-B=(\alpha_{ij})-(\beta_{ij})=(\alpha_{ij}-\beta_{ij}).$

Έτσι,

- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 34 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-3 & -5-10 \\ 1-5 & 34-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -15 \\ -4 & 35 \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 12 & -4 & 3 \\ 23 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 17 & -1 \\ 5 & 15 & 4 \\ 4 & -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-20 & -4-17 & 3-(-1) \\ 23-5 & 5-15 & -6-4 \\ 0-4 & 4-(-2) & 2-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -21 & 4 \\ 18 & -10 & -10 \\ -4 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

✓ ενώ η αφαίρεση $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 21 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ δεν μπορεί να γίνει αφού οι πίνακες έχουν διαφορετική διάσταση.

Είδαμε λοιπόν ότι οι πράξεις τις πρόσθεσης και αφαίρεσης πινάκων ορίζονται μέσω των αντίστοιχων πράξεων πραγματικών αριθμών. Το γεγονός αυτό συμβάλει ουσιαστικά στην μεταφορά βασικών ιδιοτήτων των πράξεων μεταξύ αριθμών και στο πλαίσιο των πινάκων. Εύκολα, έτσι μπορεί να ελέγξει κανείς ότι ισχύουν για την πρόσθεση:

Η ***μεταθετική ιδιότητα:*** $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, *αφού*

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & & \beta_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \alpha_{13}+\beta_{13} & \dots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \alpha_{23}+\beta_{23} & & \alpha_{2n}+\beta_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \alpha_{m2}+\beta_{m2} & \alpha_{m3}+\beta_{m3} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_{11}+\alpha_{11} & \beta_{12}+\alpha_{12} & \beta_{13}+\alpha_{13} & \dots & \beta_{1n}+\alpha_{1n} \\ \beta_{21}+\alpha_{21} & \beta_{22}+\alpha_{22} & \beta_{23}+\alpha_{23} & & \beta_{2n}+\alpha_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1}+\alpha_{m1} & \beta_{m2}+\alpha_{m2} & \beta_{m3}+\alpha_{m3} & \cdots & \beta_{mn}+\alpha_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & & \beta_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \\ &= B + A \end{aligned}$$

Η ***προσεταιριστική ιδιότητα:*** $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Gamma}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} A + (B + \Gamma) &= (\alpha_{ij}) + \left((\beta_{ij}) + (\gamma_{ij})\right) = (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij} + \gamma_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij} + \gamma_{ij}) \\ &= (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) + (\gamma_{ij}) = \left((\alpha_{ij}) + (\beta_{ij})\right) + (\gamma_{ij}) = (A + B) + \Gamma \end{aligned}$$

Το γεγονός ότι ***ο μηδενικός πίνακας δεν μεταβάλει το αποτέλεσμα όταν προστεθεί σε άλλον πίνακα*** – ακριβώς όπως το μηδέν δεν μεταβάλει το αποτέλεσμα όταν προστεθεί σε πραγματικό αριθμό : $\boldsymbol{A+O\ =O+A=A}$ **:**

$$A+O\ =\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_{11}+0 & \alpha_{12}+0 & \alpha_{13}+0 & \dots & \alpha_{1n}+0 \\ \alpha_{21}+0 & \alpha_{22}+0 & \alpha_{23}+0 & & \alpha_{2n}+0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}+0 & \alpha_{m2}+0 & \alpha_{m3}+0 & \cdots & \alpha_{mn}+0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}=A$$

(ακριβώς ανάλογα μπορεί να αποδειχθεί και η δεύτερη ισότητα $O+A=A$).

Επίσης, ***αν από έναν πίνακα αφαιρέσουμε τον εαυτό του προκύπτει ο μηδενικός πίνακας*** $\boldsymbol{A-A\ =O}$:

$$A-A\ =\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\alpha_{11} & \alpha_{12}-\alpha_{12} & \alpha_{13}-\alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n}-\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}-\alpha_{21} & \alpha_{22}-\alpha_{22} & \alpha_{23}-\alpha_{23} & & \alpha_{2n}-\alpha_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}-\alpha_{m1} & \alpha_{m2}-\alpha_{m2} & \alpha_{m3}-\alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn}-\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=O$$

6.3.3. Πολλαπλασιασμός αριθμού επί πίνακα.

Οποιοσδήποτε mxn πίνακας A μπορεί να πολλαπλασιαστεί επί έναν πραγματικό αριθμό λ. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας όλα τα στοιχεία του A επί λ:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \lambda\alpha_{13} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \lambda\alpha_{23} & & \lambda\alpha_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \lambda\alpha_{m2} & \lambda\alpha_{m3} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Έτσι, εύκολα υπολογίζει κανείς ότι:

- ✓ $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$,
- ✓ $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1) & 3\cdot 2 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 0 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 15 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,
- ✓ $(-4)\cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4)\cdot 2 & (-4)\cdot 4 & (-4)\cdot 0 \\ (-4)\cdot(-4) & (-4)\cdot 5 & (-4)\cdot 6 \\ (-4)\cdot 0 & (-4)\cdot(-6) & (-4)\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -16 & 0 \\ 16 & -20 & -24 \\ 0 & 24 & 20 \end{pmatrix}$

Οι βασικές, γνωστές από τους πραγματικούς αριθμούς, ιδιότητες εξακολουθούν να ισχύουν και σε αυτήν την περίπτωση:

$\mathbf{0 \cdot A = O}$ (προσοχή εδώ το πρώτο $\mathbf{0}$ είναι αριθμός και το δεύτερο $\boldsymbol{O}$ ο μηδενικός πίνακας).

Πράγματι, $0 \cdot A = (0 \cdot \alpha_{ij}) = (0)$, δηλαδή ο μηδενικός πίνακας.

$\mathbf{1 \cdot A = A}$ αφού

$$1 \cdot A = (1 \cdot \alpha_{ij}) = (\alpha_{ij}) = A.$$

Επιμεριστικές ιδιότητες:

$\boldsymbol{\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B}$ και $\boldsymbol{(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A}$

για οποιαδήποτε επιλογή πραγματικών αριθμών $\boldsymbol{\lambda, \mu}$ και πινάκων $\boldsymbol{A, B}$. Πράγματι:

$$\boldsymbol{\lambda \cdot (A + B) = \lambda} \cdot \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & & \beta_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \boldsymbol{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \alpha_{13}+\beta_{13} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \alpha_{23}+\beta_{23} & & \alpha_{2n}+\beta_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \alpha_{m2}+\beta_{m2} & \alpha_{m3}+\beta_{m3} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{11}+\beta_{11}) & \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{12}+\beta_{12}) & \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{13}+\beta_{13}) & \cdots & \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{1n}+\beta_{1n}) \\ \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{21}+\beta_{21}) & \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{22}+\beta_{22}) & \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{23}+\beta_{23}) & & \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{2n}+\beta_{2n}) \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{m1}+\beta_{m1}) & \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{m2}+\beta_{m2}) & \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{m3}+\beta_{m3}) & \cdots & \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{mn}+\beta_{mn}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{11}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{11} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{12}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{12} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{13}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{13} & \cdots & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{1n}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{1n} \\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{21}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{21} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{22}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{22} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{23}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{23} & & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{2n}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{m1}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{m1} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{m2}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{m2} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{m3}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{m3} & \cdots & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{mn}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{11} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{12} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{13} & \cdots & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{1n} \\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{21} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{22} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{23} & & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{m1} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{m2} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{m3} & \cdots & \boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{11} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{12} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{13} & \cdots & \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{1n} \\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{21} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta\alpha_{22} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{23} & & \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{m1} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{m2} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{m3} & \cdots & \boldsymbol{\lambda}\cdot\beta_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{\lambda}\cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda}\cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & & \beta_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\lambda}\cdot A + \boldsymbol{\lambda}\cdot B$$

Εργαζόμενοι ανάλογα, αλλά χρησιμοποιώντας εδώ τον δεύτερο τρόπο συμβολισμού πινάκων που έχουμε υιοθετήσει – με στόχο την εξοικείωση του αναγνώστη και στις δύο μορφές γραφής, έχουμε για τη δεύτερη επιμεριστική ιδιότητα:

$$(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})\cdot A = (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})\cdot(\alpha_{ij}) =$$

$$((\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})\cdot\alpha_{ij}) = (\boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{ij}+\boldsymbol{\mu}\cdot\alpha_{ij}) = (\boldsymbol{\lambda}\cdot\alpha_{ij}) + (\boldsymbol{\mu}\cdot\alpha_{ij}) = \boldsymbol{\lambda}\cdot(\alpha_{ij}) + \boldsymbol{\mu}\cdot(\alpha_{ij}) = \boldsymbol{\lambda}\cdot A + \boldsymbol{\mu}\cdot A$$

6.3.4. Πολλαπλασιασμός πινάκων.

Όπως είδαμε παραπάνω, οι πράξεις της πρόσθεσης της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμού επί πίνακα ορίστηκαν ως άμεσες γενικεύσεις των αντίστοιχων πράξεων στους πραγματικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα όλες οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων αυτών να ισχύουν και στο πλαίσιο του λογισμού πινάκων. Τα πράγματα διαφοροποιούνται αρκετά στην πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων τόσο ως προς τον ορισμό όσο και ως προς κάποιες ιδιότητες. Συγκεκριμένα:

Το ***γινόμενο δύο πινάκων*** $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ ***μπορεί να οριστεί μόνο αν ο αριθμός των στηλών του*** *A* ***είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα*** *B*. Θα πρέπει δηλαδή ο πρώτος πίνακας *A* να έχει διάσταση $mx\boldsymbol{n}$ και ο δεύτερος *B* $\boldsymbol{n}xk$. Το γινόμενό τους έχει τότε διάσταση mxk.

$$(mx\boldsymbol{n}) \cdot (\boldsymbol{n}xk) \rightarrow mxk$$

Σε αντίθετη περίπτωση το γινόμενο δεν μπορεί να οριστεί.

Έτσι, για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ μπορούν να πολλαπλασιαστούν αφού ο πρώτος έχει διάσταση $2x\boldsymbol{2}$ και ο δεύτερος $\boldsymbol{2}x3$. Οι στήλες δηλαδή του πρώτου είναι όσες οι γραμμές του δεύτερου. Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας $2x3$.

Αντίθετα το γινόμενο των $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 5 & 15 & 0 \\ 4 & -2 & 11 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ δεν ορίζεται αφού ο πρώτος είναι διάστασης $3x\boldsymbol{3}$ και ο δεύτερος $\boldsymbol{2}x2$.

Ήδη, επομένως, διαπιστώνει κανείς μια σημαντική διαφοροποίηση στο πολλαπλασιασμό πινάκων σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό μεταξύ αριθμών: <u>Το γινόμενο πινάκων δεν ορίζεται πάντοτε</u> ενώ, αντίθετα, οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί μπορούν να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους.

Αν λοιπόν ο περιορισμός αυτός για τις διαστάσεις ισχύει και οι πίνακες $A = (\alpha_{ij})$, με διάσταση $mx\boldsymbol{n}$, και $B = (\beta_{ij})$, με διάσταση $\boldsymbol{n}xk$, μπορούν να πολλαπλασιαστούν, τότε ***το γινόμενό τους*** $\boldsymbol{A \cdot B}$ ***έχει ως στοιχείο στη θέση (i,j) το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με***

την πράξη του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων, της i-γραμμής του πίνακα A με την j-στήλη του B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} & \cdots & & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ & \cdots & & \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} & \beta_{1j} & \\ \vdots & \beta_{2j} & \vdots \\ & \vdots & \\ & \beta_{nj} & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Ας δούμε αυτήν τη διαδικασία σε κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1. *Να υπολογιστεί το γινόμενο των πινάκων* $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Παρατηρούμε αρχικά ότι το γινόμενο των πινάκων μπορεί να οριστεί αφού οι διαστάσεις τους είναι 2x2, συνεπώς οι στήλες του πρώτου είναι όσες οι γραμμές του δεύτερου. Το γινόμενο αυτό θα είναι ένας πίνακας επίσης 2x2.

Το στοιχείο (1,1) του πίνακα $A\cdot B$ προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της πρώτης γραμμής του A επί την πρώτη στήλη του B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1\cdot 2+0\cdot(-1)} & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \\ & \end{pmatrix}$$

Ανάλογα το στοιχείο (1,2) υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την $1^η$ γραμμή του A και τη $2^η$ στήλη του B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & \mathbf{1\cdot 4+0\cdot 3}\\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & \mathbf{4}\\ & \end{pmatrix}$$

Για το (2,1) πολλαπλασιάζουμε την $2^η$ γραμμή του A επί την πρώτη του B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ \mathbf{2\cdot 2+(-3)\cdot(-1)} & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ \mathbf{7} & \end{pmatrix}$$

Και ο πίνακας συμπληρώνεται με το στοιχείο της θέσης (2,2) που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της $2^{ης}$ γραμμής του A επί τη $2^η$ στήλη του B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 7 & \mathbf{2\cdot 4+(-3)\cdot 3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 7 & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Έτσι έχουμε τελικά ότι

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{4}\\ \mathbf{7} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2. *Να υπολογιστεί το γινόμενο των πινάκων* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Και σε αυτήν την περίπτωση το γινόμενο ορίζεται αφού οι διαστάσεις των *A*, *B* είναι 2x2 και 2x3, συνεπώς οι στήλες του πρώτου είναι όσες οι γραμμές του δεύτερου.

Πολλαπλασιάζοντας, όπως και πριν, την i-γραμμή του Α επί την j-στήλη του Β για να υπολογίσουμε το (i,j)-στοιχείο του $A \cdot B$, έχουμε:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 4 & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι, όπως εξηγήσαμε και παραπάνω, ένας πίνακας 2x3.

Παράδειγμα 3. *Να υπολογιστεί το γινόμενο των πινάκων* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma \\ (-1) \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 3 \cdot \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \beta + \gamma \\ 3 \cdot \gamma - \alpha \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την πράξη του πολλαπλασιασμού, μπορεί κανείς να ορίσει και ***δυνάμεις τετραγωνικών πινάκων*** ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση των αριθμών. Έτσι, αν Α είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, έχουμε:

$\boldsymbol{A^2 = A \cdot A}$,

$\boldsymbol{A^3 = A \cdot A \cdot A}$,

$\boldsymbol{A^\nu = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}$

Σε ότι αφορά τώρα τις ιδιότητες της πράξης του πολλαπλασιασμού πινάκων, μπορεί να ελέγξει κανείς ότι αρκετές από τις γνωστές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμών ισχύουν και εδώ:

Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$\boldsymbol{A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma},$$

Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση:

$$\boldsymbol{A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma},$$

$$\boldsymbol{(B + \Gamma) \cdot A = B \cdot A + \Gamma \cdot A}$$

Ο **μοναδιαίος πίνακας** παίζει τι ρόλο της **μονάδας** (ουδέτερο στοιχείο) – δεν αλλάζει το αποτέλεσμα αν πολλαπλασιάζουμε τετραγωνικούς πίνακες επί αυτόν:

$\boldsymbol{A \cdot I = I \cdot A = A}$

Υπάρχει συμβατότητα με τον πολλαπλασιασμό πίνακας επί αριθμό:

$$\boldsymbol{\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)},$$

$$\boldsymbol{\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A = A \cdot (\lambda\mu)}.$$

Χρειάζεται όμως ιδιαίτερη προσοχή σε κάποιες ιδιότητες οι οποίες δεν ισχύουν στο πλαίσιο των πινάκων:

Δεν ισχύει η μεταθετική ιδιότητα: Το γινόμενο $\boldsymbol{A \cdot B}$ δεν είναι πάντα ίσο με το $\boldsymbol{B \cdot A}$.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ τότε

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

ενώ

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά, επομένως $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Υπάρχει ακόμη και η περίπτωση ένα από τα δύο γινόμενα να ορίζεται ενώ το άλλο όχι, όπως στο Παράδειγμα 2 νωρίτερα όπου για τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ το γινόμενο $A \cdot B$ ορίζεται, δεδομένου ότι ο Α είναι 2x2 και ο Β 2x3, ενώ το $B \cdot A$ δεν ορίζεται: ο Β είναι 2x3 και ο Α 2x2.

Αποτέλεσμα της προηγούμενης διαφοροποίησης είναι ότι και οι γνωστές ως «ταυτότητες» από τον λογισμό των αριθμών παύουν να ισχύουν στο πλαίσιο των πινάκων:

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2A \cdot B + B^2$$

Αυτό που ισχύει εδώ είναι ότι

$$(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2.$$

Η «ταυτότητα» επομένως ισχύει μόνο αν $A \cdot B = B \cdot A$.

Ένα άλλο σημείο που επίσης χρειάζεται προσοχή είναι το γεγονός ότι, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στους αριθμούς, **μπορεί δύο μη μηδενικοί πίνακες να δίνουν γινόμενο ίσο με το μηδέν**. ***Δεν ισχύει*** δηλαδή εδώ η «κλασική» ιδιότητα: $A \cdot B = O \Rightarrow A = O \text{ ή } B = O$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ: $A \cdot B = O \Rightarrow A = O \text{ ή } B = O.$

Για παράδειγμα, οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι και οι δύο μη μηδενικοί αλλά το γινόμενο τους μηδενίζεται:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά όλες οι ιδιότητες των πράξεων μεταξύ πινάκων:

$\boldsymbol{A + B = B + A}$	$\boldsymbol{A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma}$
$\boldsymbol{A + O = O + A = A}$	$\boldsymbol{A - A = O}$
$\boldsymbol{0 \cdot A = O}$	$\boldsymbol{1 \cdot A = A}$
$\boldsymbol{\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B}$	$\boldsymbol{(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A}$
$\boldsymbol{A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma}$	$\boldsymbol{A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma}$
$\boldsymbol{(B + \Gamma) \cdot A = B \cdot A + \Gamma \cdot A}$	$\boldsymbol{A \cdot I = I \cdot A = A}$
$\boldsymbol{\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)}$	$\boldsymbol{\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A = A \cdot (\lambda\mu)}$

ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ:

$$\boldsymbol{A \cdot B = B \cdot A,} \qquad \boldsymbol{A \cdot B = O \Rightarrow A = O \text{ ή } B = O}$$

Ασκήσεις για την Ενότητα 6.3.

1. Δίνονται οι πίνακες Α=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ελέγξτε ποιες από τις επόμενες παραστάσεις έχουν νόημα και υπολογίστε τις:

i) Α+Β ii) Δ+Α iii) Γ+Δ iv) $5 \cdot A$ v) $3A - 2\Delta$

vi) $A \cdot B$ vii) $B \cdot A$ viii) $A \cdot \Gamma - 2A$ ix) $B \cdot \Delta$+A

2. Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων:

i) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. Αν γνωρίζουμε ότι $\begin{pmatrix} 2 & x \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = O$, να υπολογίσετε την τιμή της μεταβλητής x.

4. Αναπτύξτε τις παραστάσεις $(A+I)^2$, $(A+I)^3$, όπου Ι ο μοναδιαίος πίνακας.

5. Από τη σχέση $A \cdot B = A \cdot \Gamma$ μπορούμε να συμπεράνουμε πάντα ότι $A = \Gamma$.

6. Βρείτε όλους τους πραγματικούς πίνακες Χ για τους οποίους ισχύει ότι $A \cdot X = X \cdot A$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

7. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τις παρακάτω εκφράσεις όταν αυτό είναι δυνατό :

α) $3A - 2B$ β) AE **γ)** CA δ) EA ε) D^2