Ασκήσεις στην άλγεβρα πινάκων

Γ. Κατσουλέας

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

gkatsouleas@hna.gr

21 Οκτωβρίου 2023

Άσκηση 1: **Αν $A = P\Delta P^{-\mathbf{1}}$, να δειχθεί ότι $A^n = P\Delta^n P^{-\mathbf{1}}$, $n \in \mathbb{N}$.**

Άσκηση 1: Αν $A = P\Delta P^{-1}$, να δειχθεί ότι $A^n = P\Delta^n P^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.
Θα το δείξουμε με μαθηματική επαγωγή.

- Βήμα 1ο. Βάση της επαγωγής: Θα δείξουμε ότι ισχύει για κάποιον φυσικο αριθμό ($n = 2$). Δηλαδή, ότι
$$A^2 = P\Delta^2 P^{-1}.$$
Πράγματι, έχουμε
$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = P\Delta \overbrace{P^{-1} \cdot P}^{I} \Delta P^{-1} = P \overbrace{\Delta \cdot I}^{\Delta} \Delta P^{-1} \\ &= P\Delta \cdot \Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1}. \end{aligned}$$

- Βήμα 2ο. Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιον φυσικο αριθμό ($n = k$). Δηλαδή, ότι
$$A^k = P\Delta^k P^{-1}.$$

- Βήμα 3ο. Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για τον επόμενο φυσικο αριθμό ($n = k + 1$). Δηλαδή, ότι
$$A^{k+1} = P\Delta^{k+1} P^{-1}.$$
Πράγματι, έχουμε
$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A = P\Delta^k \overbrace{P^{-1} \cdot P}^{I} \Delta P^{-1} = P \overbrace{\Delta^k \cdot I}^{\Delta^k} \Delta P^{-1} \\ &= P\Delta^k \cdot \Delta P^{-1} = P\Delta^{k+1} P^{-1}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2: Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix},$$

να προσδιοριστούν τα x, y, z έτσι ώστε να ισχύει

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Άσκηση 2: Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix},$$

να προσδιοριστούν τα x, y, z έτσι ώστε να ισχύει

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Γενικά, ισχύει η σχέση

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 + AB - BA.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη σχέση ισχύει μόνο όταν οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται.

Άσκηση 2: Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix},$$

να προσδιοριστούν τα x, y, z έτσι ώστε να ισχύει

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Γενικά, ισχύει η σχέση

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 + AB - BA.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη σχέση ισχύει μόνο όταν οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται. Στην περίπτωση αυτη, λαμβάνουμε

$$AB = \begin{bmatrix} x & xy & 0 \\ xy & y & z \\ x & y & z^2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{bmatrix} x & x^2 & 0 \\ y^2 & y & y \\ z & z & z^2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, η δοσμένη σχέση αληθεύει ακριβώς όταν

$$xy = x^2, xy = y^2, z = y, x = z.$$

Τελικά,

$$x = y = z.$$

Άσκηση 3: Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n$. Αν ικανοποιούν τις ιδιότητες

$$B^2 = I_n \quad \text{και} \quad A = \frac{1}{2}(B + I_n),$$

να δείξετε ότι

$$A^2 = A.$$

Άσκηση 3: Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n$. Αν ικανοποιούν τις ιδιότητες

$$B^2 = I_n \quad \text{και} \quad A = \frac{1}{2}(B + I_n),$$

να δείξετε ότι

$$A^2 = A.$$

Προφανώς,

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \cdot A = \frac{1}{2}(B + I_n) \cdot \frac{1}{2}(B + I_n) = \frac{1}{4}(B + I_n)(B + I_n) \\
&= \frac{1}{4}(B \cdot B + B \cdot I_n + I_n \cdot B + I_n \cdot I_n) = \frac{1}{4}(B^2 + B + B + I_n) \\
&= \frac{1}{4}(I_n + 2B + I_n) = \frac{1}{4}(2B + 2 \cdot I_n) = \frac{2}{4}(B + I_n) = \frac{1}{4}(B + I_n) = A.
\end{aligned}$$

Άσκηση 4: Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n$. Αν ικανοποιούν τις ιδιότητες

$$A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n,$$

να δείξετε ότι οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται.

Άσκηση 4: Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n$. Αν ικανοποιούν τις ιδιότητες

$$A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n,$$

να δείξετε ότι οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται.
Οι σχέσεις $A^2 = B^2 = I_n$ συνεπάγονται προφανώς ότι οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι και μάλιστα ότι

$$A^{-1} = A \tag{3}$$

$$B^{-1} = B. \tag{4}$$

Επειδή επιπλέον δίνεται η σχέση $(AB)^2 = I_n$, συμπεραίνουμε επίσης ότι ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος με $(AB)^{-1} = AB$. Όμως, γενικά έχουμε ότι

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \overset{(3),(4)}{=} BA.$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$AB = BA.$$

Άσκηση 5: Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n$. Αν ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι

$$A + B = A \cdot B,$$

να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει $A^{-1} + B^{-1} = I_n$.

Άσκηση 5: Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n$. Αν ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι

$$A + B = A \cdot B,$$

να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει $A^{-1} + B^{-1} = I_n$.
Ξεκινώντας από τη δοσμένη

$$\begin{aligned}
A + B = A \cdot B &\Leftrightarrow \\
(A + B) \cdot B^{-1} = (A \cdot B) \cdot B^{-1} &\Leftrightarrow \\
A \cdot B^{-1} + B \cdot B^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1}) &\Leftrightarrow \\
A \cdot B^{-1} + I_n = A \cdot I_n &\Leftrightarrow \\
A \cdot B^{-1} + I_n = A &\Leftrightarrow \\
I_n = A - A \cdot B^{-1} &\Leftrightarrow \\
I_n = A \cdot (I_n - B^{-1}), &
\end{aligned}$$

και ομοίως δείχνεται ότι $(I_n - B^{-1}) \cdot A = I_n$ (να γίνει). Συνεπώς, ο αντίστροφος του A είναι ο $I_n - B^{-1}$ και μπορούμε να γράψουμε

$$A^{-1} = I_n - B^{-1} \Leftrightarrow A^{-1} + B^{-1} = I_n.$$

Άσκηση 6: Δίνεται αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n$ με $A^{-1} = I_n - A$. Να δείξετε ότι
$$A^6 - I_n = \mathbb{O}_n.$$

Άσκηση 6: Δίνεται αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n$ με $A^{-1} = I_n - A$. Να δείξετε ότι
$$A^6 - I_n = \mathbb{O}_n.$$

Έχουμε
$$I_n = A \cdot A^{-1} = A \cdot (I_n - A) = A \cdot I_n - A \cdot A = A - A^2.$$
Αναδιατάσσοντας, έχουμε
$$A^2 - A + I_n = \mathbb{O}_n \Leftrightarrow \tag{5}$$
$$A \cdot (A^2 - A + I_n) = A \cdot \mathbb{O}_n \Leftrightarrow$$
$$A^3 - A^2 + A = \mathbb{O}_n \Leftrightarrow \tag{6}$$

Από τις σχέσεις (5)-(6), έχουμε
$$A^3 + I_n = \mathbb{O}_n \Rightarrow A^3 = -I_n.$$

Συνεπώς, εύκολα προκύπτει η ζητούμενη
$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (-I_n) \cdot (-I_n) = (-1)(-1)I_n^2 = I_n.$$

Άσκηση 7: Να υπολογίσετε τη n–οστή $(n > 1)$ δύναμη των τετραγωνικών πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 7: Να υπολογίσετε τη n–οστή ($n > 1$) δύναμη των τετραγωνικών πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

Έτσι,

$$A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A,$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I_2 \text{ (ή } A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_2).$$

Επομένως,

$$A^n = \begin{cases} I_n, \text{ αν } n = 2\rho, \rho \in \mathbb{N}, \\ A, \text{ αν } n = 2\rho + 1, \rho \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Να δειχθεί αναλυτικά με μαθηματική επαγωγή.

Άσκηση 7: Να υπολογίσετε τη n–οστή $(n > 1)$ δύναμη των τετραγωνικών πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 7: Να υπολογίσετε τη n–οστή ($n > 1$) δύναμη των τετραγωνικών πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & n & (B^{n-1})_{13} + n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ??.$$

Να δειχθεί η γενική έκφραση με μαθηματική επαγωγή.

Άσκηση 8: Τρεις τετραγωνικοί πίνακες A, B, C, με A αντιστρέψιμο, ικανοποιούν

$$A = B + C.$$

Να δειχθεί ότι $BA^{-1}C = CA^{-1}B$.

Άσκηση 8: Τρεις τετραγωνικοί πίνακες A, B, C, με A αντιστρέψιμο, ικανοποιούν

$$A = B + C.$$

Να δειχθεί ότι $BA^{-1}C = CA^{-1}B$.
Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
BA^{-1}C &= (A - C)A^{-1}(A - B)\\
&= (AA^{-1} - CA^{-1})(A - B)\\
&= (I_n - CA^{-1})(A - B)\\
&= (A - B) - CA^{-1}(A - B)\\
&= (A - B) - CA^{-1}A + CA^{-1}B\\
&= A - B - CI_n + CA^{-1}B\\
&= A - B - C + CA^{-1}B\\
&= \mathbb{O}_n + CA^{-1}B\\
&= CA^{-1}B.
\end{aligned}$$

Άσκηση 9: Αν A πραγματικός συμμετρικός $n \times n$ πίνακας και B πίνακας διάστασης $n \times m$, να δείξετε ότι ο πίνακας $B^T AB$ είναι συμμετρικός.

Άσκηση 9: Αν A πραγματικός συμμετρικός $n \times n$ πίνακας και B πίνακας διάστασης $n \times m$, να δείξετε ότι ο πίνακας $B^T AB$ είναι συμμετρικός.

Πρέπει να δειχθεί ότι
$$(B^T AB) = (B^T AB)^T.$$

Πράγματι,
$$(B^T AB)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T A^T B = B^T AB,$$

αφού A συμμετρικός πίνακας ($A = A^T$).

Άσκηση 10: Αν οι πίνακες A, B είναι συμμετρικοί, να δειχθεί ότι:

i. Ο AB συμμετρικός, όταν και μόνο όταν $AB = BA$.

ii. Ο $AB - BA$ είναι αντισυμμετρικός.

Άσκηση 10: Αν οι πίνακες A, B είναι συμμετρικοί, να δειχθεί ότι:

i. Ο AB συμμετρικός, όταν και μόνο όταν $AB = BA$.

ii. Ο $AB - BA$ είναι αντισυμμετρικός.

i. Έχουμε

$$(AB)^T = B^T A^T = BA.$$

ii. Έχουμε

$$(AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -(AB - BA).$$

Άσκηση 11: Αν $A^n = \mathbb{O}_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, να δειχθεί ότι

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + \cdots + A^{n-1}.$$

Άσκηση 11: Αν $A^n = \mathbb{O}_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, να δειχθεί ότι

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + \cdots + A^{n-1}.$$

Εξετάζουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned}(I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{n-1}) &= (I_n + A + \cdots + A^{n-1}) - A(I_n + A + \cdots + A^{n-1}) \\ &= (I_n + A + \cdots + A^{n-1}) - (A + A^2 + \cdots + A^n) \\ &= I_n - A^n \\ &= I_n.\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$(I_n + A + \cdots + A^{n-1})(I_n - A) = I_n.$$

Άσκηση 12: Ο $n \times n$ πίνακας A έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 1 και θεωρούμε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq -n\beta$. Να δειχθεί ότι:

i. $A^2 = nA$.

ii. Ο $\alpha I_n + \beta A$ είναι αντιστρέψιμος, αναζητώντας τον αντίστροφό του στη μορφή $\frac{1}{\alpha}(I_n + \gamma A)$. Στη συνέχεια, να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 12: Ο $n \times n$ πίνακας A έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 1 και θεωρούμε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq -n\beta$. Να δειχθεί ότι:

i. $A^2 = nA$.

ii. Ο $\alpha I_n + \beta A$ είναι αντιστρέψιμος, αναζητώντας τον αντίστροφό του στη μορφή $\frac{1}{\alpha}(I_n + \gamma A)$. Στη συνέχεια, να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 12: Ο $n \times n$ πίνακας A έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 1 και θεωρούμε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq -n\beta$. Να δειχθεί ότι:

i. $A^2 = nA$.

ii. Ο $\alpha I_n + \beta A$ είναι αντιστρέψιμος, αναζητώντας τον αντίστροφό του στη μορφή $\frac{1}{\alpha}(I_n + \gamma A)$. Στη συνέχεια, να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Εξετάζουμε το γινόμενο

$$(\alpha I_n + \beta A)(\frac{1}{\alpha} I_n + \frac{\gamma}{\alpha} A) = I_n + \gamma A + \frac{\beta}{\alpha} A + \frac{\beta\gamma}{\alpha} A^2 = I_n + \gamma A + \frac{\beta}{\alpha} A + \frac{\beta\gamma}{\alpha} nA.$$

Προκειμένου να μηδενιστεί ο όρος $\gamma A + \frac{\beta}{\alpha} A + \frac{\beta\gamma}{\alpha} nA = \mathbb{O}_n$, απαιτείται

$$\gamma + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta\gamma}{\alpha} n = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{\beta}{\alpha + \beta n}.$$

Άσκηση 13: Οι πίνακες $A, B \in M_n$ είναι τέτοιοι, ώστε $(AB)^2 = I_n$. Δείξτε ότι οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι και ότι $(BA)^2 = I_n$.

Άσκηση 13: Οι πίνακες $A, B \in M_n$ είναι τέτοιοι, ώστε $(AB)^2 = I_n$. Δείξτε ότι οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι και ότι $(BA)^2 = I_n$.

Έστω B όχι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει μη μηδενικό διανυσμα $x \in \mathbb{K}^n$, τέτοιο ώστε $Bx = \mathbb{O}_n$.
Τότε

$$Bx = \mathbb{O}_n \Rightarrow ABABx = \mathbb{O}_n \Rightarrow (AB)^2 x = \mathbb{O}_n \Rightarrow I_n x = \mathbb{O}_n \Rightarrow x = \mathbb{O}_n.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, ώστε B αντιστρέψιμος.

Άσκηση 13: Οι πίνακες $A, B \in M_n$ είναι τέτοιοι, ώστε $(AB)^2 = I_n$. Δείξτε ότι οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι και ότι $(BA)^2 = I_n$.

Έστω B όχι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει μη μηδενικό διανυσμα $x \in \mathbb{K}^n$, τέτοιο ώστε $Bx = \mathbb{O}_n$.
Τότε
$$Bx = \mathbb{O}_n \Rightarrow ABABx = \mathbb{O}_n \Rightarrow (AB)^2x = \mathbb{O}_n \Rightarrow I_n x = \mathbb{O}_n \Rightarrow x = \mathbb{O}_n.$$
Καταλήξαμε σε άτοπο, ώστε B αντιστρέψιμος.
Σχετικά με τον αντίστροφο, δίνεται
$$I_n = (AB)^2 = ABAB = (ABA)B.$$
Επίσης, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $(AB)^2 = I_n$ από αριστερά με B και από δεξιά με B^{-1}, έχουμε
$$(AB)^2 = I_n \Leftrightarrow B(AB)^2B^{-1} = BI_nB^{-1} \Leftrightarrow BABABB^{-1} = I_n \Leftrightarrow B(ABA) = I_n$$
απ'όπου προκύπτει ότι $(BA)^2 = I_n$ και μάλιστα $B^{-1} = ABA$.

Άσκηση 14: Αν $A^3 + A^2 + A + I = \mathbb{O}$, να βρεθεί A^{-1}.

Άσκηση 14: Αν $A^3 + A^2 + A + I = \mathbb{O}$, να βρεθεί A^{-1}.

$$\begin{aligned} A^3 + A^2 + A + I = \mathbb{O} &\Leftrightarrow \\ -A^3 - A^2 - A = I &\Leftrightarrow \\ A\underbrace{\left(-A^2 - A - I\right)}_{=A^3} = -I &\Rightarrow \\ A^{-1} = A^3. \end{aligned}$$