Σχολή Ναυτικών Δοκίμων
Γραμμική Άλγεβρα
Γενικές Ασκήσεις (Φυλλάδιο 1)
Γ. Κατσουλέας
Δευτέρα 8/1/2024

Άσκηση 1η.

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο παρακάτω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και για τις τιμές αυτές να υπολογιστεί ο A^{-1}.

Λύση. Ένας τετραγωνικός πίνακας αντιστρέφεται ακριβώς όταν η ορίζουσά του είναι μη μηδενική. Για τον δοσμένο πίνακα, έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -9 & -3 \end{vmatrix} \overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -9 & -3 \end{vmatrix}}_{=5\cdot(-3)-2\cdot(-9)=3} + 3 \cdot \left(- \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}_{=1\cdot(-3)-2\cdot(-2)=1} \right) + \lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -9 \end{vmatrix}}_{=1\cdot(-9)-5\cdot(-2)=1} =$$

$$= 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - \lambda \cdot 1 = \lambda - 3.$$

Συνεπώς ο πίνακας A αντιστρέφεται ακριβώς όταν $|A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda - 3 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \neq 3.$

Για τον υπολογισμό του αντιστρόφου, χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A),$$

όπου ο συμπληρωματικός πίνακας είναι ο ανάστροφος πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχείων του πίνακα A:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ -9 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5\cdot(-3) - 2\cdot(-9) & -[3\cdot(-3) - \lambda\cdot(-9)] & 3\cdot 2 - \lambda\cdot 5 \\ -[1\cdot(-3) - 2\cdot(-2)] & 0\cdot(-3) - \lambda\cdot(-2) & -[0\cdot 2 - \lambda\cdot 1] \\ 1\cdot(-9) - 5\cdot(-2) & -[0\cdot(-9) - 3\cdot(-2)] & 0\cdot 5 - 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9-9\lambda & 6-5\lambda \\ -1 & 2\lambda & \lambda \\ 1 & -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{\lambda - 3}\begin{bmatrix} 3 & 9-9\lambda & 6-5\lambda \\ -1 & 2\lambda & \lambda \\ 1 & -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2η.
Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο παρακάτω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και για τις τιμές αυτές να υπολογιστεί ο A^{-1}.

Λύση. Ένας τετραγωνικός πίνακας αντιστρέφεται ακριβώς όταν η ορίζουσά του είναι μη μηδενική. Για τον δοσμένο πίνακα, έχουμε

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & \alpha \end{vmatrix} &\overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}}_{=2\cdot\alpha-6\cdot1=2\alpha-6} + 0 \cdot \left(- \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix}}_{=2\cdot\alpha-6\cdot3=2\alpha-18} \right) + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=2\cdot1-2\cdot3=-4} = \\ &= 1 \cdot (2\alpha - 6) + 0 \cdot (2\alpha - 18) - 1 \cdot (-4) = 2\alpha - 10. \end{aligned}$$

Συνεπώς ο πίνακας A αντιστρέφεται ακριβώς όταν $|A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha - 10 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 5.$

Για τον υπολογισμό του αντιστρόφου, χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \mathrm{adj}(A),$$

όπου ο συμπληρωματικός πίνακας είναι ο ανάστροφος πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχείων του πίνακα A:

$$\begin{aligned} \mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot\alpha - 6\cdot 1 & -[0\cdot\alpha - 1\cdot 1] & 0\cdot 6 - 1\cdot 2 \\ -[2\cdot\alpha - 6\cdot 3] & 1\cdot\alpha - 1\cdot 3 & -[1\cdot 6 - 1\cdot 2] \\ 2\cdot 1 - 2\cdot 3 & -[1\cdot 1 - 0\cdot 3] & 1\cdot 2 - 0\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha - 6 & 1 & -2 \\ 18 - 2\alpha & \alpha - 3 & -4 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \mathrm{adj}(A) = -\frac{1}{2\alpha - 10} \begin{bmatrix} 2\alpha - 6 & 1 & -2 \\ 18 - 2\alpha & \alpha - 3 & -4 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3α.
Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x^3-1 & x^2-1 & x-1 \\ x^3-8 & x^2-4 & x-2 \\ x^3-27 & x^2-9 & x-3 \end{vmatrix} = 0.$$

Λύση.

$$\begin{vmatrix} x^3-1 & x^2-1 & x-1 \\ x^3-8 & x^2-4 & x-2 \\ x^3-27 & x^2-9 & x-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} (x-1)(x^2+x+1) & (x-1)(x+1) & x-1 \\ (x-2)(x^2+2x+4) & (x-2)(x+2) & x-2 \\ (x-3)(x^2+3x+9) & (x-3)(x+3) & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

Υπενθυμίζοντας ότι η ορίζουσα είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή (ή στήλη) του πίνακα ξεχωριστά, βγάζουμε κοινό παράγοντα από την 1η γραμμή τον $(x-1)$, από την 2η γραμμή τον $(x-2)$, από την 3η γραμμή τον $(x-3)$, ώστε έχουμε ισοδύναμα:

$$(x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} (x^2+x+1) & (x+1) & 1 \\ (x^2+2x+4) & (x+2) & 1 \\ (x^2+3x+9) & (x+3) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Παρατηρώντας ότι η 3η στήλη αποτελείται αποκλειστικά από μονάδες, κάνουμε κατάλληλες γραμμοπράξεις, προκειμένου να εμφανίσουμε μηδενικά στοιχεία σε αυτήν:

$$(x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} (x^2+x+1) & (x+1) & 1 \\ (x^2+2x+4) & (x+2) & 1 \\ (x^2+3x+9) & (x+3) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}}{\Leftrightarrow}$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 & 1 \\ (x^2+2x+4)-(x^2+x+1) & (x+2)-(x+1) & 1-1 \\ (x^2+3x+9)-(x^2+2x+4) & (x+3)-(x+2) & 1-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 & 1 \\ x+3 & 1 & 0 \\ x+5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\Leftrightarrow}$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 & 1 \\ x+3 & 1 & 0 \\ x+5-(x+3) & 1-1 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 & 1 \\ x+3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Αντιμετάθεση ζεύγους γραμμών (ή στηλών) ενός πίνακα αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας. Έτσι, παρατηρώντας ότι αντιμετάθεση της 1ης με την 3η στήλη του πίνακα οδηγεί σε άνω τριγωνικό πίνακα, έχουμε:

$$(x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 & 1 \\ x+3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{\Sigma_3 \leftrightarrow \Sigma_1}{\Leftrightarrow} \quad -(x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & x+3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Εφόσον η ορίζουσα άνω τριγωνικού πίνακα δίνεται από το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου, έχουμε τελικά:

$$-2(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

Άσκηση 3β.
Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Λύση. Παρατηρώντας ότι τα στοιχεία όλων των γραμμών έχουν το ίδιο άθροισμα, επιλέγουμε να αντικαταστήσουμε την 1η στήλη του πίνακα από το άθροισμα όλων των στηλών (το οποία δεν μεταβάλλει την ορίζουσα):

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4}{\Leftrightarrow} \quad \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 3x-1 & -1 & x & x \\ 3x-1 & x & -1 & x \\ 3x-1 & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Υπενθυμίζοντας ότι η ορίζουσα είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή (ή στήλη) του πίνακα ξεχωριστά, βγάζουμε κοινό παράγοντα από την 1η στήλη τον $(3x-1)$, ώστε έχουμε ισοδύναμα:

$$(3x-1)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & -1 & x & x \\ 1 & x & -1 & x \\ 1 & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Παραητρώντας ότι η 1η στήλη αποτελείται αποκλειστικά από μονάδες, κάνουμε κατάλληλες γραμμοπράξεις, προκειμένου να εμφανίσουμε μηδενικά στοιχεία σε αυτήν:

$$(3x-1)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & -1 & x & x \\ 1 & x & -1 & x \\ 1 & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1}}{\Leftrightarrow} \quad (3x-1)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1-1 & -1-x & x-x & x-x \\ 1-1 & x-x & -1-x & x-x \\ 1-1 & x-x & x-x & -1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$(3x-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix}}_{=1\cdot(-1-x)\cdot(-1-x)\cdot(-1-x)}.$$

Εφόσον η ορίζουσα άνω τριγωνικού πίνακα δίνεται από το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου, έχουμε τελικά:

$$(3x-1)(-1-x)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \text{ ή } x - 1 \text{ (τριπλή ρίζα)}.$$

Άσκηση 4α.
Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να δειχθεί το εξής:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1+\beta^2 & \beta & 1 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha).$$

Λύση. Παρατηρώντας ότι η 3η στήλη αποτελείται αποκλειστικά από μονάδες, κάνουμε κατάλληλες γραμμοπράξεις, προκειμένου να εμφανίσουμε μηδενικά στοιχεία σε αυτήν:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1+\beta^2 & \beta & 1 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1 \\ \Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1}}{=} \begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ (1+\beta^2)-(1+\alpha^2) & \beta-\alpha & 1-1 \\ (1+\gamma^2)-(1+\alpha^2) & \gamma-\alpha & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2-\alpha^2 & \beta-\alpha & 0 \\ \gamma^2-\alpha^2 & \gamma-\alpha & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) & \beta-\alpha & 0 \\ (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) & \gamma-\alpha & 0 \end{vmatrix}.$$

Υπενθυμίζοντας ότι η ορίζουσα είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή (ή στήλη) του πίνακα ξεχωριστά, βγάζουμε κοινό παράγοντα από την 2η γραμμή τον $(\beta-\alpha)$ και από την 3η γραμμή τον $\gamma-\alpha$, ώστε έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1+\beta^2 & \beta & 1 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ (\beta+\alpha) & 1 & 0 \\ (\gamma+\alpha) & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}{=}$$
$$= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ (\beta+\alpha) & 1 & 0 \\ (\gamma+\alpha)-(\beta+\alpha) & 1-1 & 0-0 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta+\alpha & 1 & 0 \\ \gamma-\beta & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Αντιμετάθεση ζεύγους γραμμών (ή στηλών) ενός πίνακα αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας. Έτσι, παρατηρώντας ότι αντιμετάθεση της 1ης με την 3η στήλη του πίνακα οδηγεί σε άνω τριγωνικό πίνακα, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1+\beta^2 & \beta & 1 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta+\alpha & 1 & 0 \\ \gamma-\beta & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\Sigma_1\leftrightarrow\Sigma_3}{=} -(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1+\alpha^2 \\ 0 & 1 & \beta+\alpha \\ 0 & 0 & \gamma-\beta \end{vmatrix}}_{1\cdot 1\cdot(\gamma-\beta)=\gamma-\beta}$$
$$= -(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha),$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι η ορίζουσα άνω τριγωνικού πίνακα δίνεται από το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

Άσκηση 4β.
Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να δειχθεί το εξής:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

Λύση. Παρατηρώντας ότι η 1η γραμμή αποτελείται αποκλειστικά από μονάδες, κάνουμε κατάλληλες γραμμοπράξεις, προκειμένου να εμφανίσουμε μηδενικά στοιχεία σε αυτήν:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} \overset{\substack{\Sigma_1 \to \Sigma_1 - \Sigma_2 \\ \Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Gamma_3}}{=} \begin{vmatrix} 1{-}1 & 1{-}1 & 1 \\ x{-}y & y{-}z & z \\ yz{-}zx & zx{-}xy & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ z(y-x) & x(z-y) & xy \end{vmatrix}.$$

Υπενθυμίζοντας ότι η ορίζουσα είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή (ή στήλη) του πίνακα ξεχωριστά, βγάζουμε κοινό παράγοντα από την 1η στήλη τον $(x-y)$ και από την 2η στήλη τον $y-z$, ώστε έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ z(y-x) & x(z-y) & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & z \\ -z & -x & xy \end{vmatrix} \overset{\Sigma_1 \to \Sigma_1 - \Sigma_2}{=}$$

$$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0{-}0 & 0 & 1 \\ 1{-}1 & 1 & z \\ -z{-}(-x) & -x & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & z \\ -z+x & -x & xy \end{vmatrix}.$$

Αντιμετάθεση ζεύγους γραμμών (ή στηλών) ενός πίνακα αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας. Έτσι, παρατηρώντας ότι αντιμετάθεση της 1ης με την 3η γραμμή του πίνακα οδηγεί σε άνω τριγωνικό πίνακα, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & z \\ -z+x & -x & xy \end{vmatrix} \overset{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3}{=} -(x-y)(y-z)\underbrace{\begin{vmatrix} -z+x & -x & xy \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{(x-z)\cdot 1\cdot 1=(x-z)} = (x-y)(y-z)(z-x),$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι η ορίζουσα άνω τριγωνικού πίνακα δίνεται από το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.