Σχολή Ναυτικών Δοκίμων
Γραμμική Άλγεβρα
Γενικές Ασκήσεις (Φυλλάδιο 2)
Γ. Κατσουλέας
Δευτέρα 8/1/2024

Άσκηση 1α.
Επιλύστε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=-1,\\ 3x-y+z&=7,\\ 5x+3y-4z&=2. \end{aligned}$$

Λύση. Όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε γραμμικά συστήματα (και δεν ζητάται η εφαρμογή κάποιας συγκεκριμένης μεθόδου επίλυσης), βέλτιστη μέθοδος είναι η χρήση της απαλοιφής Gauss-Jordan.

Ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 5\Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3-3\cdot 1 & -1-3\cdot 2 & 1-3\cdot(-3) & 7-3\cdot(-1) \\ 5-5\cdot 1 & 3-5\cdot 2 & -4-5\cdot(-3) & 2-5\cdot(-1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 10 & 10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 10 & 10 \\ 0 & -7-1\cdot(-7) & 11-1\cdot 10 & 7-1\cdot 10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 10\Gamma_3 \\ \Gamma_1 \to \Gamma_1 + 3\Gamma_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3+3\cdot 1 & -1+3\cdot(-3) \\ 0 & -7 & 10-10\cdot 1 & 10-10\cdot(-3) \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & -7 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\Gamma_2 \to -\frac{1}{7}\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{40}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2-2\cdot 2 & 0 & -10-2\cdot\frac{-40}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{40}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-40}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Συνεπώς, από την τελευταία ισοδύναμη (ανηγμένη κλιμακωτή) μορφή του συστήματος, μοναδική λύση του συστήματος είναι η

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{-40}{7} \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Β. Τρόπος. Στην περίπτωση αυτή (τετραγωνικό σύστημα με μοναδική λύση), αντιλαμβανόμαστε εκ των υστέρων ότι ο πίνακας του συστήματος

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή πρόκειται περί συστήματος Crammer. Πράγματι, η ορίζουσα του A βρίσκεται

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} \overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}}_{=(-1)\cdot(-4)-1\cdot 3=1} +2 \cdot \left(- \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}_{=3\cdot(-4)-1\cdot 5=-17} \right) + (-3) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}_{=3\cdot 3-(-1)\cdot 5=14} =$$

$$= 1 + 2 \cdot 17 - 3 \cdot 14 = 1 + 34 - 42 = -7.$$

(Σημειώνουμε ότι στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να έχουμε καταλήξει κοιτώντας απλώς την πρώτη γραμμοϊσοδύναμη κλιμακωτή μορφή του συστήματος που βρέθηκε στην προηγούμενη σελίδα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Πράγματι, οι γραμμοπράξεις που είχαν γίνει στο μεταξύ δεν μεταβάλλουν την ορίζουσα του πίνακα του συστήματος, δηλαδή

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) \cdot 1 = -7,$$

όπου η τελευταία ορίζουσα υπολογίζεται άμεσα από το γίνομενο των διαγώνιων στοιχείων, δεδομένης της άνω τριγωνικής μορφής του πίνακα.)

Το διάνυσμα της μοναδικής λύσης δίνεται από τον κανόνα του Crammer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \frac{|A_3|}{|A|} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

όπου οι πίνακες A_1, A_2, A_3 στην τελευταία έκφραση προκύπτουν από τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος με εκ περιτροπής αντικατάσταση μίας στήλης του τη φορά με το διάνυσμα των σταθερών όρων του συστήματος $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Έτσι, έχουμε

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 7 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} \overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}}_{=(-1)\cdot(-4)-1\cdot 3=1} +2 \cdot \left(- \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}_{=7\cdot(-4)-1\cdot 2=-30} \right) + (-3) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{=7\cdot 3-(-1)\cdot 2=23} =$$

$$= (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-30) - 3 \cdot 23 = -1 + 60 - 69 = -10,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} \overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}_{=7\cdot(-4)-1\cdot 2=-30} +(-1) \cdot \left(- \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}_{=3\cdot(-4)-1\cdot 5=-17} \right) + (-3) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}_{=3\cdot 2-7\cdot 5=-29} =$$

$$= 1 \cdot (-30) - (-1) \cdot (-17) + (-3) \cdot (-29) = -30 - 17 + 87 = 40,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{=(-1)\cdot 2-7\cdot 3=-23} +2 \cdot \left(- \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}_{=3\cdot 2-7\cdot 5=-29} \right) + (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}_{=3\cdot 3-(-1)\cdot 5=-14} =$$

$$= 1 \cdot (-23) - 2 \cdot (-29) + (-1) \cdot (-14) = -23 + 58 - 14 = 21.$$

Τελικά, η (1) δίνει τη μοναδική λύση:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \frac{|A_3|}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{-7} \\ \frac{40}{-7} \\ \frac{21}{-7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ -\frac{40}{7} \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Προφανώς η λύση είναι η ίδια με εκείνη που προσδιορίστηκε με την προηγούμενη μέθοδο, ωστόσο η διαδικασία με τη μέθοδο του Crammer είναι πολύ πεισσότερο υπολογιστικά δαπανηρή.

Γ. Τρόπος. Είδαμε ότι ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος. Στην περίπτωση αυτή, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε την μοναδική λύση του συστήματος με χρήση της λεγόμενης μεθόδου του αντιστρόφου. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, γράφουμε το δοσμένο σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=-1,\\ 3x-y+z&=7,\\ 5x+3y-4z&=2 \end{aligned}$$

με χρήση πινάκων ως εξής:

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}, \tag{2}$$

όπου

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & 3 & -4\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}-1\\ 7\\ -2\end{bmatrix}.$$

Υπολογίζοντας, όπως προηγούμενως, την ορίζουσα του πίνακα του συστήματος, έχουμε

$$\begin{aligned} |A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & 3 & -4\end{vmatrix} &\overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}}_{=(-1)\cdot(-4)-1\cdot 3=1}+2\cdot\left(-\underbrace{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & -4\end{vmatrix}}_{=3\cdot(-4)-1\cdot 5=-17}\right)+(-3)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 3\end{vmatrix}}_{=3\cdot 3-(-1)\cdot 5=14}=\\ &=1+2\cdot 17-3\cdot 14=1+34-42=-7. \end{aligned}$$

Δηλαδή, ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, καθώς $|A|=-7\neq 0$. Συνεπώς, αν βρούμε τον αντίστροφό του πίνακα A^{-1}, μπορούμε να προσδιορίσουμε την μοναδική λύση ξ, πολλαπλασιάζοντας την σχέση (2) εξ αριστερών επί τον αντίστροφο πίνακα A^{-1}:

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\overset{A^{-1}\cdot}{\Leftrightarrow}A^{-1}A\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}\Leftrightarrow I_3\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}.$$

Για τον υπολογισμό του αντιστρόφου, χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}(A),$$

όπου ο συμπληρωματικός πίνακας είναι ο ανάστροφος πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχείων του πίνακα A:

$$\begin{aligned} \text{adj}(A)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & -4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}(-1)\cdot(-4)-1\cdot 3 & -[2\cdot(-4)-(-3)\cdot 3] & 2\cdot 1-(-3)\cdot(-1)\\ -[3\cdot(-4)-1\cdot 5] & 1\cdot(-4)-(-3)\cdot 5 & -[1\cdot 1-(-3)\cdot 3]\\ 3\cdot 3-(-1)\cdot 5 & -[1\cdot 3-2\cdot 5] & 1\cdot(-1)-2\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 17 & 11 & -10\\ 14 & 7 & -7\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, έχουμε

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}(A)=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 17 & 14 & -10\\ 14 & 7 & -7\end{bmatrix},$$

ώστε το διάνυσμα της μοναδικής λύσης προσδιορίζεται τελικά από τον πολλαπλασιασμό του αντιστρόφου επί το διάνυσμα $\mathbf{b}$ των σταθερών όρων:

$$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 17 & 14 & -10\\ 14 & 7 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 7\\ 2\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+(-1)\cdot 7+(-1)\cdot 2\\ 17\cdot(-1)+11\cdot 7+(-10)\cdot 2\\ 14\cdot(-1)+7\cdot 7+(-7)\cdot 2\end{bmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-10\\ 2\\ 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{7}\\ -\frac{40}{7}\\ -3\end{bmatrix},$$

δηλαδή η ίδια λύση που προσδιορίστηκε και με τις προηγούμενες μεθόδους (προφανώς..). Σημειώνουμε ότι και η τελευταία αυτή μέθοδος του αντιστρόφου πίνακα είναι επίσης υπολογιστικά δαπανηρή.

Άσκηση 1β.
Επιλύστε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2, \\ 3x - 2y - z &= 5, \\ 2x - 5y + 3z &= -4, \\ x + 4y + 6z &= 0. \end{aligned}$$

Λύση. Όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε γραμμικά συστήματα, βέλτιστη μέθοδος είναι η χρήση της απαλοιφής Gauss-Jordan. Μάλιστα, στην περίπτωση μη τετραγωνικών συστημάτων (όπως στην προκειμένη περίπτωση), ή για τετραγωνικά συστήματα με μη αντιστρέψιμο πίνακα συστήματος, αποτελεί και την μοναδική επιλογή.

Ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3-3\cdot 1 & -2-3\cdot 2 & -1-3\cdot 2 & 5-3\cdot 2 \\ 2-2\cdot 1 & -5-2\cdot 2 & 3-2\cdot 2 & -4-2\cdot 2 \\ 1-1 & 4-2 & 6-2 & 0-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \tfrac{1}{2}\Gamma_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 9\Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 + 8\Gamma_2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -9+9\cdot 1 & -1+9\cdot 2 & -8+9\cdot(-1) \\ 0 & -8+8\cdot 1 & -7+8\cdot 2 & -1+8\cdot(-1) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & -17 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} \Gamma_3 \to \frac{1}{17}\Gamma_3 \\ \Gamma_4 \to \frac{1}{9}\Gamma_4 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\sim}{\begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3 \\ \Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2-2\cdot 1 & 2-2\cdot(-1) \\ 0 & 1 & 2-2\cdot 1 & -1-2\cdot(-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2-2\cdot 1 & 0 & 4-2\cdot 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Συνεπώς, από την τελευταία ισοδύναμη (ανηγμένη κλιμακωτή) μορφή του συστήματος, μοναδική λύση του συστήματος είναι η

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1γ.
Επιλύστε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} x + 5y + 4z - 13w &= 3, \\ 3x - y + 2z + 5w &= 2, \\ 2x + 2y + 3z - 4w &= 1. \end{aligned}$$

Λύση. Όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε γραμμικά συστήματα, βέλτιστη μέθοδος είναι η χρήση της απαλοιφής Gauss-Jordan. Μάλιστα, στην περίπτωση μη τετραγωνικών συστημάτων (όπως στην προκειμένη περίπτωση), ή για τετραγωνικά συστήματα με μη αντιστρέψιμο πίνακα συστήματος, αποτελεί και την μοναδική επιλογή.

Ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 3-3\cdot 1 & -1-3\cdot 5 & 4-3\cdot 4 & 5-3\cdot(-13) & 2-3\cdot 3 \\ 2-2\cdot 1 & 2-2\cdot 5 & 3-2\cdot 4 & -4-3\cdot(-13) & 1-2\cdot 3 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & -8 & -5 & 22 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \tfrac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & -8-\frac{1}{2}\cdot(-16) & -5-\frac{1}{2}\cdot(-10) & 22-\frac{1}{2}\cdot 44 & -5-\frac{1}{2}\cdot(-7) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Συνεπώς, από την τελευταία ισοδύναμη κλιμακωτή μορφή του συστήματος, παρατηρούμε ότι το σύστημα δεν έχει λύση (αδύνατο), εφόσον ο βαθμός του πίνακα του συστήματος (2 ανεξάρτητες γραμμές) δεν ισούται με τον βαθμό του επαυξημένου (3 ανεξάρτητες γραμμές).

Άσκηση 2α.
Να βρεθούν συνθήκες για τα α, β, γ, προκειμένου το ακόλουθο σύστημα να είναι συμβιβαστό (να έχει λύση):

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= \alpha, \\ 3x - y + z &= \beta, \\ -2x + 3y - 3z &= \gamma. \end{aligned}$$

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 3 & -1 & 1 & \beta \\ -2 & 3 & -3 & \gamma \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 3-3\cdot 1 & -1-3\cdot 2 & 1-3\cdot(-3) & \beta-3\cdot\alpha \\ -2+2\cdot 1 & 3+2\cdot 2 & -3+2\cdot(-3) & \gamma+2\cdot\alpha \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -7 & 10 & \beta-3\cdot\alpha \\ 0 & 7 & -9 & \gamma+2\cdot\alpha \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -7 & 10 & \beta-3\cdot\alpha \\ 0 & 7+(-7) & -9+10 & \gamma+2\cdot\alpha+(\beta-3\cdot\alpha) \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -7 & 10 & \beta-3\cdot\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \gamma+2\cdot\alpha+(\beta-3\cdot\alpha) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -7 & 10 & \beta-3\cdot\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \gamma-\alpha+\beta \end{array}\right).$$

Από την τελευταία ισοδύναμη μορφή του επαυξημένου του συστήματος διαπιστώνουμε ότι ο βαθμός του πίνακα του συστήματος είναι 3 (3 ανεξάρτητες γραμμές). Ως εκ τούτου, ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος και το δοσμένο σύστημα έχει μοναδική λύση για οποιεσδήποτε σταθερές $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ στη δεξιά πλευρά του συστήματος.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να έχουμε καταλήξει, υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα του συστήματος. Σημειώνουμε ότι οι γραμμοπράξεις που εκτελέστηκαν ανωτέρω διατηρούν την ορίζουσα, ώστε τελικά η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος βρίσκεται άμεσα πλέον

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-7)\cdot 1 = -7$$

ως το γινόμενο των οδηγών (διαγώνιων) στοιχείων του τελευταίου πίνακα, δεδομένης της άνω τριγωνικής (κλιμακωτής) μορφής αυτού.

Διαφορετικά, αν δεν είχαμε εκτελέσει την μέθοδο της απαλοιφής, θα υπολογίζαμε την ίδια ορίζουσα ως εξής:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} 1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}_{=(-1)\cdot(-3)-1\cdot 3=0} + 2\cdot\left(- \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}_{=3\cdot(-3)-1\cdot(-2)=-7}\right) + -3\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}_{=3\cdot 3-(-1)\cdot(-2)=7} =$$

$$= 1\cdot 0 - 2\cdot(-7) + (-3)\cdot 7 = -7.$$

Άσκηση 2β.
Να βρεθούν συνθήκες για τα α, β, γ, προκειμένου το ακόλουθο σύστημα να είναι συμβιβαστό (να έχει λύση):

$$\begin{aligned} x-2y+z&=\alpha,\\ x+y-z&=\beta,\\ 2x-y-z&=\gamma. \end{aligned}$$

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha\\ 1 & 1 & -1 & \beta\\ 2 & -1 & -1 & \gamma \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1\\ \Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha\\ 1-1 & 1-(-2) & -1-1 & \beta-\alpha\\ 2-2\cdot 1 & -1-2\cdot(-2) & -1-2\cdot 1 & \gamma-2\cdot\alpha \end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha\\ 0 & 3 & -2 & \beta-\alpha\\ 0 & 3 & -3 & \gamma-2\cdot\alpha \end{array}\right) \overset{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha\\ 0 & 3 & -2 & \beta-\alpha\\ 0 & 3-3 & -3-(-2) & \gamma-2\cdot\alpha-(\beta-\alpha) \end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha\\ 0 & 3 & -2 & \beta-\alpha\\ 0 & 0 & -1 & \gamma-\alpha-\beta \end{array}\right).$$

Από την τελευταία ισοδύναμη μορφή του επαυξημένου του συστήματος διαπιστώνουμε ότι ο βαθμός του πίνακα του συστήματος είναι 3 (3 ανεξάρτητες γραμμές). Ως εκ τούτου, ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος και το δοσμένο σύστημα έχει μοναδική λύση για οποιεσδήποτε σταθερές $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ στη δεξιά πλευρά του συστήματος.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να έχουμε καταλήξει, υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα του συστήματος. Σημειώνουμε ότι οι γραμμοπράξεις που εκτελέστηκαν ανωτέρω διατηρούν την ορίζουσα, ώστε τελικά η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος βρίσκεται άμεσα πλέον

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-1)=-3$$

ως το γινόμενο των οδηγών (διαγώνιων) στοιχείων του τελευταίου πίνακα, δεδομένης της άνω τριγωνικής (κλιμακωτής) μορφής αυτού.

Διαφορετικά, αν δεν είχαμε εκτελέσει την μέθοδο της απαλοιφής, θα υπολογίζαμε την ίδια ορίζουσα ως εξής:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{ανάπτυγμα ως προς }\Gamma_1}{=} 1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1\\ -1 & -1 \end{vmatrix}}_{=1\cdot(-1)-(-1)\cdot(-1)=-2} + -2\cdot\left(-\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{=1\cdot(-1)-(-1)\cdot 2=1}\right) + 1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{=1\cdot(-1)-1\cdot 2=-3} =$$

$$= 1\cdot(-2)-(-2)\cdot 1+1\cdot(-3)=-3.$$

Άσκηση 2γ.
Να βρεθούν συνθήκες για τα α, β, γ, προκειμένου το ακόλουθο σύστημα να είναι συμβιβαστό (να έχει λύση):

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= \alpha, \\ x + y - z &= \beta, \\ 2x - y &= \gamma. \end{aligned}$$

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & -1 & \beta \\ 2 & -1 & 0 & \gamma \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha \\ 1-1 & 1-(-2) & -1-1 & \beta-\alpha \\ 2-2\cdot 1 & -1-2\cdot(-2) & 0-2\cdot 1 & \gamma-2\cdot\alpha \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha \\ 0 & 3 & -2 & \beta-\alpha \\ 0 & 3 & -2 & \gamma-2\cdot\alpha \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha \\ 0 & 3 & -2 & \beta-\alpha \\ 0 & 3-3 & -2-(-2) & \gamma-2\cdot\alpha-(\beta-\alpha) \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha \\ 0 & 3 & -2 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-\alpha-\beta \end{array}\right).$$

Από την τελευταία ισοδύναμη μορφή του επαυξημένου του συστήματος διαπιστώνουμε ότι ο βαθμός του πίνακα του συστήματος είναι 2 (2 ανεξάρτητες γραμμές) ώστε δεν είναι αντιστρέψιμος πίνακας (όπως στα προηγούμενα παραδείγματα), ενώ ο βαθμός του επαυξημένου είναι 2 ή 3 (2 ή 3 ανεξάρτητες γραμμές), αναλόγως του αν η ποσότητα $\gamma - \alpha - \beta$ στο δεξί μέλος της τρίτης εξίσωσης του τελευταίου γραμμοϊσοδύναμου συστήματος είναι μηδενική ή όχι. Δηλαδή, το σύστημα δεν έχει λύση όταν

$$\gamma - \alpha - \beta \neq 0$$

(οπότε ο βαθμός του επαυξημένου είναι 3, διάφορος του βαθμού του πίνακα του συστήματος που είναι 2).

Από την άλλη, το σύστημα έχει μονοπαραμετρική απειρία ·λύσεων (μία ελεύθερη μεταβλητή - η z), άρα είναι και συμβιβαστό, όταν

$$\gamma - \alpha - \beta = 0.$$

Άσκηση 3α.
Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + \alpha z &= 1, \\ 2x + \alpha y + 8z &= 3 \end{aligned}$$

έχει

(α.) μοναδική λύση,

(β.) απειρία λύσεων,

(γ.) καμμία λύση.

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & 8 & 3 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 2-2\cdot 1 & \alpha-2\cdot 2 & 8-2\cdot\alpha & 3-2\cdot 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-4 & 8-2\cdot\alpha & 1 \end{array}\right).$$

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη στήλη εμφανίζει οδηγό στοιχείο όταν $\alpha \neq 4$. Στην περίπτωση αυτή, βασικές μεταβλητές είναι οι δύο πρώτες (x, y) στις στήλες των οποίων εμφανίστηκαν οδηγά στοιχεία και ελεύθερη η 3η (z) στην στήλη της οποίας δεν εμφανίζεται οδηγό στοιχείο. Συνεπώς, για $\alpha \neq 4$, έχουμε μονοπαραμετρική απειρία λύσεων (απειρες λύσεις).

Διαφορετικά, όταν $\alpha = 4$, η τελευταία μορφή του συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-4 & 8-2\cdot\alpha & 1 \end{array}\right) \overset{\alpha=4}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

απ'όπου προφανώς το σύστημα είναι αδύνατο για $\alpha = 4$. *(Ο βαθμός του πίνακα του συστήματος είναι 1 (1 μοναδική ανεξάρτητη γραμμή), ενώ ο βαθμός του επαυξημένου είναι 2 (2 ανεξάρτητες γραμμές).)*

Άσκηση 3β.
Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 1, \\ -2x - y + z &= \beta, \\ x - y + 2z &= \alpha \end{aligned}$$

έχει (α.) μοναδική λύση, (β.) απειρία λύσεων, (γ.) καμμία λύση.

Λύση. Το σύστημα έχει μονδική λύση (για οποιεσδήποτε σταθερές στην δεξιά πλευρά του συστήματος), όταν ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος ($|A| \neq 0$). Για το δοσμένο σύστημα, η ορίζουσα του σχετικού πίνακα υπολογίζεται:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{=(-1)\cdot 2 - 1\cdot(-1) = -1} + 1 \cdot \left(- \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=(-2)\cdot 2 - 1 \cdot 1 = -5} \right) + \alpha \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=(-2)\cdot(-1)-(-1)\cdot 1 = 3} =$$
$$= 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-5) + \alpha \cdot 3 = 3\alpha + 4.$$

Συνεπώς, για $\alpha \neq -\frac{4}{3}$ και οποιδήποτε $\beta \in \mathbb{R}$, έχουμε μοναδική λύση (αντιστρέψιμος πίνακας συστήματος, $|A| = 3\alpha + 4 \neq 0$).

Για την διερεύνηση των υπόλοιπων περιπτώσεων, θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε κατευθείαν στο σύστημα την τιμή $\alpha = -\frac{4}{3}$ και να προχωρήσουμε στην επίλυσή του. Για διδακτικούς λόγους (και επειδή ο γράφων δε συμπαθεί ιδιαίτερα τα κλάσματα...), παρουσιάζουμε τη διαδικασία για γενικό α και θα το αντικαταστήσουμε αργότερα. Ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ -2 & -1 & 1 & \beta \\ 1 & -1 & 2 & \alpha \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ -2+2\cdot 1 & -1+2\cdot 1 & 1+2\cdot\alpha & \beta+2\cdot 1 \\ 1-1 & -1-1 & 2-\alpha & \alpha-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1+2\cdot\alpha & \beta+2 \\ 0 & -2 & 2-\alpha & \alpha-1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2}{\sim} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1+2\cdot\alpha & \beta+2 \\ 0 & -2+2\cdot 1 & 2-\alpha+2\cdot(1+2\cdot\alpha) & \alpha-1++2\cdot(\beta+2) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1+2\cdot\alpha & \beta+2 \\ 0 & 0 & 4+3\alpha & \alpha+2\beta+3 \end{array}\right).$$

Παρατηρείστε πως η διαδικασία αυτή ¨αποκαλύπτει¨, όπως έχουμε πει, την ορίζουσα του πίνακα του συστήματος ως το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων της κλιμακωτής μορφής του πίνακα συντελεστών του συστήματος ($|A| = 1 \cdot 1 \cdot (4 + 3\alpha = 4 + 3\alpha)$, καθιστώντας απίτης ουσίας τον ανωτέρω υπολογισμό της ορίζουσας περιττό...

Αντικαθιστώντας όπου $\alpha = -\frac{4}{3}$, έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta+\frac{5}{3} \end{array}\right).$$

Διαπιστώνουμε από την τρίτη εξίσωση του τελευταίου συστήματος ότι $2\beta + \frac{5}{3} \neq 0$, έχουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο/μη συμβιβαστό (μηδέν λύσεις). Πράγματι, τότε ο βαθμός του πίνακα του συστήματος είναι 2 (2 ανεξάρτητες γραμμές), ενώ ο βαθμός του επαυξημένου είναι 3 (3 ανεξάρτητες γραμμές). Συνοψίζοντας, για $\alpha = -\frac{4}{3}$ και $\beta \neq -\frac{5}{6}$, έχουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο/μη συμβιβαστό (μηδέν λύσεις).

Διαφορετικά, για $\alpha = -\frac{4}{3}$ και $\beta = -\frac{5}{6}$, έχουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (μονοπαραμετρική απειρία λύσεων).

Αντικαθιστώντας στο τελευταίο σύστημα όπου $\beta = -\frac{5}{6}$, έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta+\frac{5}{3} \end{array}\right) \overset{\beta=-\frac{5}{6}}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-1 & -\frac{4}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right) & 1-\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Στην περίπτωση αυτή, βασικές μεταβλητές είναι οι δύο πρώτες (x, y) στις στήλες των οποίων εμφανίστηκαν οδηγά στοιχεία και ελεύθερη η 3η (z) στην στήλη της οποίας δεν εμφανίζεται οδηγό στοιχείο. Για να προσδιορίσουμε τη γενική λύση, το απλοποιημένο σύστημα που αντιστοιχεί στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή γράφεται

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{3}z &= -\frac{1}{6}, \\ y - \frac{5}{3}z &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}z, \\ y &= \frac{7}{6} + \frac{5}{3}z. \end{aligned}$$

δηλαδή όλες οι βασικές μεταβλητές (x, y) εκφράζονται άμεσα ως προς την ελεύθερη (z) και το διάνυσμα των αγνώστων λαμβάνει την μορφή:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}z \\ \frac{7}{6} + \frac{5}{3}z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{7}{6} \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 3γ.
Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + \alpha y + \alpha z &= \beta, \\ x + \alpha^2 y + 2\alpha z &= \alpha\beta \end{aligned}$$

έχει (α.) μοναδική λύση, (β.) απειρία λύσεων, (γ.) καμμία λύση.

Λύση. Το σύστημα έχει μονδική λύση (για οποιεσδήποτε σταθερές στην δεξιά πλευρά του συστήματος), όταν ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος ($|A| \neq 0$). Για το δοσμένο σύστημα, παρατηρώντας ότι η 1η στήλη αποτελείται αποκλειστικά από μονάδες, κάνουμε κατάλληλες γραμμοπράξεις, προκειμένου να εμφανίσουμε μηδενικά στοιχεία σε αυτήν:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & 2\alpha \end{vmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-1 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 1-1 & \alpha^2-\alpha & 2\alpha-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha \end{vmatrix}$$

Υπενθυμίζοντας ότι η ορίζουσα είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή (ή στήλη) του πίνακα ξεχωριστά, βγάζουμε κοινό παράγοντα από την 3η γραμμή τον παράγοντα α, ώστε έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{=} \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha-1-(\alpha-1) & 1-(\alpha-1) \end{vmatrix} \\ &= \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{vmatrix}}_{=1\cdot(\alpha-1)\cdot(2-\alpha)} = \alpha(\alpha-1)(2-\alpha), \end{aligned}$$

όπου στο τελυεταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι η ορίζουσα κάποιου πίνακα σε άνω τριγωνική μορφή δίνεται από το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

Συνεπώς, το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος. Δηλαδή όταν:

$$|A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 0 \text{ και } \alpha \neq 1 \text{ και } \alpha \neq 2$$

και για οποιαδήποτε τιμή $\beta \in \mathbb{R}$.

Συνεχίζουμε με την διερεύνηση των υπόλοιπων περιπτώσεων. Για $\alpha = 0$, ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & 2\alpha & \alpha\beta \end{array}\right) \overset{\alpha=0}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \beta-1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{array}\right). \tag{3}$$

Στο σημείο αυτό, από την τρίτη εξίσωση του τελευταίου συστήματος, διαπιστώνουμε ότι για $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, το σύστημα είναι μη συμβιβαστό (όχι λύσεις).

Αντίστοιχα, για $\alpha = \beta = 0$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (μονοπαραμετρική απειρία, αφού έχουμε μόνο μία ελεύθερη μεταβλητή). Το τελευταίο σύστημα (3) γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{array}\right) \overset{\beta=0}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2 \\ \Gamma_2 \to -\Gamma_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Το αντίστοιχο ανηγμένο κλιμακωτό σύστημα γράφεται:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y + z &= 1. \end{aligned}$$

Επομένως, οι βασικές μεταβλητές (x, y που αντιστοιχούν στις στήλες που εμφάνισαν οδηγά στοιχεία) εκφράζονται αμέσως σε σχέση με την μοναδική ελεύθερη μεταβλητή (z που αντιστοιχεί στην 3η στήλη που δεν εμφάνισε οδηγό στοιχείο)

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 1 - z. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε την μονοπαραμετρική απειρία λύσεων:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Συνεχίζουμε με την διερεύνηση των υπόλοιπων περιπτώσεων. Για $\alpha = 1$, ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & 2\alpha & \alpha\beta \end{array}\right) \overset{\alpha=1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 2 & \beta \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta-1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{array}\right). \tag{4}$$

Στο σημείο αυτό, από την τρίτη εξίσωση του τελευταίου συστήματος, διαπιστώνουμε ότι για $\alpha = 1$ και $\beta \neq 1$, το σύστημα είναι μη συμβιβαστό (όχι λύσεις).

Αντίστοιχα, για $\alpha = \beta = 1$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (μονοπαραμετρική απειρία, αφού έχουμε μόνο μία ελεύθερη μεταβλητή). Το τελευταίο σύστημα στην (4) γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{array}\right) \overset{\beta=1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Το αντίστοιχο ανηγμένο κλιμακωτό σύστημα γράφεται:

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, οι βασικές μεταβλητές (x, z που αντιστοιχούν στις στήλες που εμφάνισαν οδηγά στοιχεία) εκφράζονται αμέσως σε σχέση με την μοναδική ελεύθερη μεταβλητή (y που αντιστοιχεί στην 2η στήλη που δεν εμφάνισε οδηγό στοιχείο)

$$\begin{aligned} x &= 1 - y, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε την μονοπαραμετρική απειρία λύσεων:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Συνεχίζουμε με την διερεύνηση της τελευταίας περίπτωσης. Για $\alpha = 2$, ο επαυξημένος πίνακας του δοσμένου συστήματος γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & 2\alpha & \alpha\beta \end{array}\right) \overset{\alpha=2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \beta \\ 1 & 4 & 4 & 2\beta \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta-1 \\ 0 & 3 & 3 & 2\beta-1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{(2\beta-1)-(\beta-1)}_{=2-\beta} \end{array}\right). \tag{5}$$

Στο σημείο αυτό, από την τρίτη εξίσωση του τελευταίου συστήματος, διαπιστώνουμε ότι για $\alpha = 2$ και $\beta \neq 2$, το σύστημα είναι μη συμβιβαστό (όχι λύσεις).

Αντίστοιχα, για $\alpha = \beta = 1$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (μονοπαραμετρική απειρία, αφού έχουμε μόνο μία ελεύθερη μεταβλητή). Το τελευταίο σύστημα στην (5) γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\beta \end{array}\right) \overset{\beta=2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Το αντίστοιχο ανηγμένο κλιμακωτό σύστημα γράφεται:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y + z &= 1. \end{aligned}$$

Επομένως, οι βασικές μεταβλητές (x, y που αντιστοιχούν στις στήλες που εμφάνισαν οδηγά στοιχεία) εκφράζονται αμέσως σε σχέση με την μοναδική ελέυθερη μεταβλητή (z που αντιστοιχεί στην 3η στήλη που δεν εμφάνισε οδηγό στοιχείο)

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 1 - z. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε την μονοπαραμετρική απειρία λύσεων:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 4α.
Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} (3-\lambda) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}}_{=\lambda\cdot(3-\lambda)-2\cdot 2=(\lambda+1)(\lambda-4)} + 2 \cdot \left(- \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}}_{=2\cdot(3-\lambda)-2\cdot 4=-2(1+\lambda)} \right) + 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}_{=2\cdot 2-(-\lambda)\cdot 4=4(1+\lambda)} =$$

$$\begin{aligned} &= (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4) + 4(1+\lambda) + 16(1+\lambda) \\ &= (1+\lambda)\left[(3-\lambda)(\lambda-4) + 20\right] \\ &= (1+\lambda)\left(3\lambda - 12 - \lambda^2 + 4\lambda + 20\right) \\ &= (1+\lambda)(-\lambda^2 + 7\lambda + 8) \\ &= -(1+\lambda)^2(\lambda - 8). \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του πίνακα A προσδιορίζονται από την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\chi_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(1+\lambda)^2(\lambda-8) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1 \text{ (διπλή ιδιοτιμή) ή } \lambda = 8.$$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda = -1$: Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$(A - (-1)I_3)\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3-(-1) & 2 & 4 \\ 2 & 0-(-1) & 2 \\ 4 & 2 & 3-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Εφόσον το σύστημα είναι ομογενές, εκτελούμε τη μέθοδο της απαλοιφής στην πίνακα του συστήματος (και όχι στον επαυξημένο, δεδομένου του ότι η στήλη των σταθερών όρων είναι μηδενική και οι γραμμοπράξεις δεν πρόκειται να την μεταβάλλουν). Προφανώς έχουμε

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \frac{1}{4}\Gamma_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

δηλαδή πρόκειται για διπαραμετρική απειρία λύσεων (βασική μεταβλητή η x και ελεύθερες οι y, z). Πράγματι, το αντίστοιχο σύστημα εκφυλίζεται σε μία και μόνη εξίσωση:

$$x + \frac{1}{2}y + z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y - z \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τα δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -1$.

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda = 8$: Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$(A - 8I_3)\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3-8 & 2 & 4 \\ 2 & 0-8 & 2 \\ 4 & 2 & 3-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Εφόσον το σύστημα είναι ομογενές, εκτελούμε τη μέθοδο της απαλοιφής στην πίνακα του συστήματος (και όχι στον επαυξημένο, δεδομένου του ότι η στήλη των σταθερών όρων είναι μηδενική και οι γραμμοπράξεις δεν πρόκειται να την μεταβάλλουν). Προφανώς έχουμε

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{bmatrix} 2 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 5\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_1}}$$

$$\underset{\sim}{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 5\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_2 \to -\frac{1}{18}\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 4\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δηλαδή πρόκειται για μονοπαραμετρική απειρία λύσεων (βασικές μεταβλητές οι x, y και ελεύθερη η z). Πράγματι, το αντίστοιχο σύστημα λύνεται άμεσα ως προς τις βασικές μεταβλητές σε σχέση με την ελεύθερη. Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα γράφεται:

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z, \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 8$.

Εφόσον έχουν βρεθεί 3 ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Θέτοντας τον διαγώνιο πίνακα

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

που έχει ως στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του τις ιδιοτιμές του πίνακα A και τον πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (με την ίδια σειρά) έχουμε την διαγωνοποίηση του πίνακα A:

$$A = PDP^{-1}.$$

Άσκηση 4β.
Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$\chi_B(\lambda) = |B - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } \Gamma_1}{=} (1-\lambda) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}}_{=(-5-\lambda)\cdot(4-\lambda)-3\cdot(-6)=(\lambda-1)(\lambda+2)} + (-3) \cdot \left(- \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix}}_{=3\cdot(4-\lambda)-3\cdot 6=-3(\lambda+2)} \right) + 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -5-\lambda \\ 6 & -6 \end{vmatrix}}_{=3\cdot(-6)-(-5-\lambda)\cdot 6=6(\lambda+2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2) - 9(\lambda+2) + 18(\lambda+2) \\
&= (\lambda+2)\left[(1-\lambda)(\lambda-1)+9\right] \\
&= (\lambda+2)\left[9-(1-\lambda)^2\right] \\
&= (\lambda+2)\left[3-(1-\lambda)\right]\left[3+(1-\lambda)\right] \\
&= (\lambda+2)(2+\lambda)(4-\lambda).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του πίνακα B προσδιορίζονται από την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\chi_B(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+2)(2+\lambda)(4-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2 \text{ (διπλή ιδιοτιμή) ή } \lambda = 4.$$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda = -2$: Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$(B-(-2)I_3)\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-(-2) & -3 & 3 \\ 3 & -5-(-2) & 3 \\ 6 & -6 & 4-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Εφόσον το σύστημα είναι ομογενές, εκτελούμε τη μέθοδο της απαλοιφής στην πίνακα του συστήματος (και όχι στον επαυξημένο, δεδομένου του ότι η στήλη των σταθερών όρων είναι μηδενική και οι γραμμοπράξεις δεν πρόκειται να την μεταβάλλουν). Προφανώς έχουμε

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \frac{1}{3}\Gamma_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

δηλαδή πρόκειται για διπαραμετρική απειρία λύσεων (βασική μεταβλητή η x και ελεύθερες οι y, z). Πράγματι, το αντίστοιχο σύστημα εκφυλίζεται σε μία και μόνη εξίσωση:

$$x - y + z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y - z \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τα δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$.

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda = 4$: Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$(B-4I_3)\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-4 & -3 & 3 \\ 3 & -5-4 & 3 \\ 6 & -6 & 4-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Εφόσον το σύστημα είναι ομογενές, εκτελούμε τη μέθοδο της απαλοιφής στην πίνακα του συστήματος (και όχι στον επαυξημένο, δεδομένου του ότι η στήλη των σταθερών όρων είναι μηδενική και οι γραμμοπράξεις δεν πρόκειται να την μεταβάλλουν). Προφανώς έχουμε

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_1 \to -\frac{1}{3}\Gamma_1 \\ \Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \to \frac{1}{3}\Gamma_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_2 \to -\frac{1}{4}\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δηλαδή πρόκειται για μονοπαραμετρική απειρία λύσεων (βασικές μεταβλητές οι x, y και ελεύθερη η z). Πράγματι, το αντίστοιχο σύστημα λύνεται άμεσα ως προς τις βασικές μεταβλητές σε σχέση με την ελεύθερη. Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα γράφεται:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0, \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}z, \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 4$.

Εφόσον έχουν βρεθεί 3 ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ο πίνακας B διαγωνοποιείται. Θέτοντας τον διαγώνιο πίνακα

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

που έχει ως στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του τις ιδιοτιμές του πίνακα B και τον πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (με την ίδια σειρά) έχουμε την διαγωνοποίηση του πίνακα B:

$$B = PDP^{-1}.$$

Άσκηση 4γ.
Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$C=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{bmatrix}.$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$\chi_C(\lambda)=|C-\lambda I_3|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\2&4-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ανάπτυγμα ως προς }\Gamma_1}{=}(3-\lambda)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{vmatrix}}_{=(4-\lambda)\cdot(3-\lambda)-2\cdot 1=(\lambda-5)(\lambda-2)}+1\cdot\left(-\underbrace{\begin{vmatrix}2&2\\1&3-\lambda\end{vmatrix}}_{=2\cdot(3-\lambda)-2\cdot 1=2(2-\lambda)}\right)+1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2&4-\lambda\\1&1\end{vmatrix}}_{=2\cdot 1-(4-\lambda)\cdot 1=\lambda-2}=$$

$$\begin{aligned}&=(3-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-2)+2(\lambda-2)+(\lambda-2)\\&=(\lambda-2)\left[(3-\lambda)(\lambda-5)+3\right]\\&=(\lambda-2)\left(3\lambda-15-\lambda^2+5\lambda+3\right)\\&=(\lambda-2)(-\lambda^2+8\lambda-12)\\&=-(\lambda-2)^2(\lambda-6).\end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του πίνακα C προσδιορίζονται από την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\chi_C(\lambda)=0\quad\Leftrightarrow\quad-(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=2\text{ (διπλή ιδιοτιμή) ή }\lambda=6.$$

Για την εύρεση των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων, θεωρούμε κάθε ιδιοτιμή ξεχωριστά:
Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda=2$: Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$(C-2I_3)\mathbf{x}=0\quad\Leftrightarrow\quad\begin{bmatrix}3-2&1&1\\2&4-2&2\\1&1&3-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Εφόσον το σύστημα είναι ομογενές, εκτελούμε τη μέθοδο της απαλοιφής στην πίνακα του συστήματος (και όχι στον επαυξημένο, δεδομένου του ότι η στήλη των σταθερών όρων είναι μηδενική και οι γραμμοπράξεις δεν πρόκειται να την μεταβάλλουν). Προφανώς έχουμε

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{bmatrix}\overset{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1\\\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

δηλαδή πρόκειται για διπαραμετρική απειρία λύσεων (βασική μεταβλητή η x και ελεύθερες οι y,z). Πράγματι, το αντίστοιχο σύστημα εκφυλίζεται σε μία και μόνη εξίσωση:

$$x+y+z=0\quad\Leftrightarrow\quad x=-y-z\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y-z\\y\\z\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad y,z\in\mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\qquad\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

τα δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda=2$.
Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda=6$: Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$(C-6I_3)\mathbf{x}=0\quad\Leftrightarrow\quad\begin{bmatrix}3-6&1&1\\2&4-6&2\\1&1&3-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{bmatrix}-3&1&1\\2&-2&2\\1&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Εφόσον το σύστημα είναι ομογενές, εκτελούμε τη μέθοσο της απαλοιφής στην πίνακα του συστήματος (και όχι στον επαυξημένο, δεδομένου του ότι η στήλη των σταθερών όρων είναι μηδενική και οι γραμμοπράξεις δεν πρόκειται να την μεταβάλλουν). Προφανώς έχουμε

$$\begin{bmatrix}-3 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix} \overset{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & -2 & 2\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1\\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_1}}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & 4 & -8\end{bmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_2 \to -\frac{1}{4}\Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

δηλαδή πρόκειται για μονοπαραμετρική απειρία λύσεων (βασικές μεταβλητές οι x, y και ελεύθερη η z). Πράγματι, το αντίστοιχο σύστημα λύνεται άμεσα ως προς τις βασικές μεταβλητές σε σχέση με την ελεύθερη. Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα γράφεται:

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z, \\ y = 2z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z\\ 2z\\ z\end{bmatrix} = z\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 6$.

Εφόσον έχουν βρεθεί 3 ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ο πίνακας C διαγωνοποιείται. Θέτοντας τον διαγώνιο πίνακα

$$D = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

που έχει ως στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του τις ιδιοτιμές του πίνακα C και τον πίνακα

$$P = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (με την ίδια σειρά) έχουμε την διαγωνοποίηση του πίνακα C:

$$C = PDP^{-1}.$$