Εισαγωγή στη γραμμική άλγεβρα

Γ. Κατσουλέας

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

gkatsouleas@hna.gr

26 Σεπτεμβρίου 2023

Περιεχόμενα

Από τα διανύσματα στην έννοια του πίνακα. Το θεμελιώδες πρόβλημα της γραμμικής άλγεβρας

Το θεμελιώδες πρόβλημα της γραμμικής άλγεβρας.

- Σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με m αγνώστους.
- Θέλουμε να γνωρίζουμε:
  - Ύπαρξη. Κατά πόσον υπάρχει λύση.
  - Μοναδικότητα. Εφόσον υπάρχει, κατά πόσον είναι μοναδική.
  - Μέθοδο επίλυσης. Εφόσον κάποιο σύστημα έχει μία ή περισσότερες λύσεις, πώς μπορούμε να τις βρούμε;
- Δύο προσεγγίσεις:
  - Η προσέγγιση του προβλήματος κοιτώντας μία εξίσωση κάθε φορά (μέσω των γραμμών του συστήματος). $\longrightarrow$ Στην περίπτωση $n = m = 2$, δηλαδή τετραγωνικών 2×2 συστημάτων, αποτελεί την σχολική θεώρηση.
  - Η προσέγγιση του προβλήματος κοιτώντας έναν άγνωστο κάθε φορά (μέσω των στηλών του συστήματος). $\longrightarrow$ Γενικεύεται ευκολότερα σε υψηλότερες διαστάσεις και αποτελεί τη βάση της Γραμμικής Άλγεβρας.

Γραμμικές εξισώσεις

- Γραμμική εξίσωση: Μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b,$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ οι συντελεστές της εξίσωσης, $b \in \mathbb{R}$ η σταθερά της εξίσωσης και $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ η πλειάδα των αγνώστων.

- Στην περίπτωση $m = 2$ αγνώστων, πολλές φορές οι άγνωστοι συμβολίζονται απλούστερα x, y.
- Στην περίπτωση $m = 3$ αγνώστων, πολλές φορές οι άγνωστοι συμβολίζονται απλούστερα x, y, z.
- Παραδείγματα:
  - $2x + y - 8z = 10 \longrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (2, 1, -8)$ και $b = 10$
  - $-x_1 + \pi x_3 - \sqrt{3}x_4 = 0.07 \longrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4) = \left(-1, 0, \pi, -\sqrt{3}\right)$ και $b = 0.07$
  - $2x - y + 6 = 13 - 4x \longrightarrow (a_1, a_2) = (6, -1)$ και $b = 7$
  - Μη γραμμική εξίσωση: $\sqrt{x} + \frac{1}{y} = wz - 10$

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Η θεώρηση μέσω των γραμμών του συστήματος

Με σκοπό να δείξουμε τη διαφορά των δύο προσεγγίσεων (και όχι τη μεθοδολογία επίλυσης), ξεκινάμε με ένα απλό 2×2 σύστημα (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους).

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Η θεώρηση μέσω των γραμμών του συστήματος

Με σκοπό να δείξουμε τη διαφορά των δύο προσεγγίσεων (και όχι τη μεθοδολογία επίλυσης), ξεκινάμε με ένα απλό 2×2 σύστημα (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους).

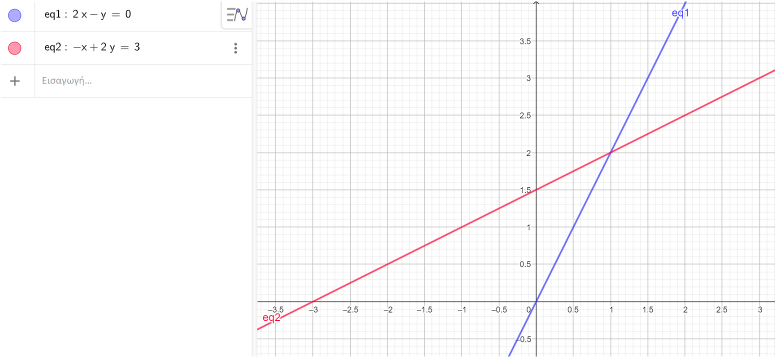
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

- Η 1η εξίσωση περιγράφει ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,2)$.
- Η 2η εξίσωση περιγράφει ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(-3,0)$ και $(-1,1)$.
- Λύση του συστήματος αποτελεί το σημείο τομής των ευθειών αυτών (ακριβέστερα, οι συντεταγμένες αυτού).

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Η θεώρηση μέσω των γραμμών του συστήματος

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$



Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Η θεώρηση μέσω των συντελεστών των αγνώστων (στηλών)

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

- Ισοδύναμη γραφή του συστήματος σε μορφή ισότητας διανυσμάτων:

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

- Θεωρώντας τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \text{ όπου } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ και } \Sigma_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ερμηνεύουμε την αριστερή πλευρά του (1) ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών του A:

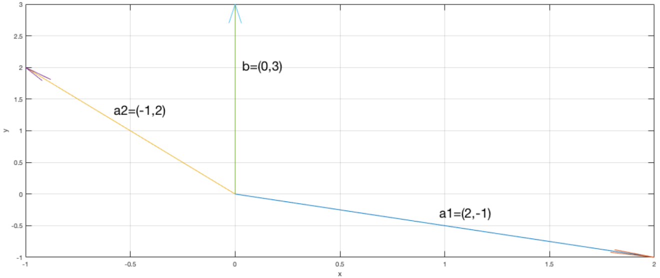
$$\underbrace{x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1 \text{ και } \Sigma_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Η θεώρηση μέσω των συντελεστών των αγνώστων (2)

- Ισοδύναμη γραφή του συστήματος σε μορφή ισότητας διανυσμάτων:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1 \text{ και } \Sigma_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Θέτοντας το διάνυσμα των σταθερών όρων του συστήματος $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, για την επίλυση του συστήματος, οδηγούμαστε στο ακόλουθο ερώτημα:
  Είναι δυνατόν το διάνυσμα b να εκφραστεί ως γραμ. συδυασμός των διανυσμάτων Σ_1 και Σ_2 των συντελεστών των αγνώστων και, σε περίπτωση καταφατικής απάντησης, ποιοι είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού;



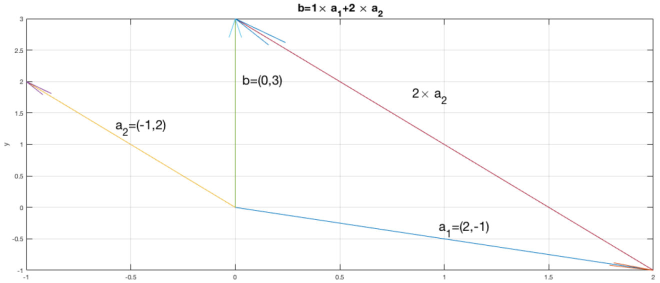
Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Η θεώρηση μέσω των συντελεστών των αγνώστων (3)

- Ισοδύναμη γραφή του συστήματος σε μορφή ισότητας διανυσμάτων:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1 \text{ και } \Sigma_2} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Είδαμε ότι η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, δηλαδή έχουμε την έκφραση

$$\underbrace{{\color{green}1}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + {\color{green}2}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1 \text{ και } \Sigma_2} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$



Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Δύο παραλλαγές

Στο προηγούμενο σύστημα, η λύση ήταν μοναδική. Γενικά, είναι πάντα μοναδική η λύση κάποιου γραμμικού συστήματος ή υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις;

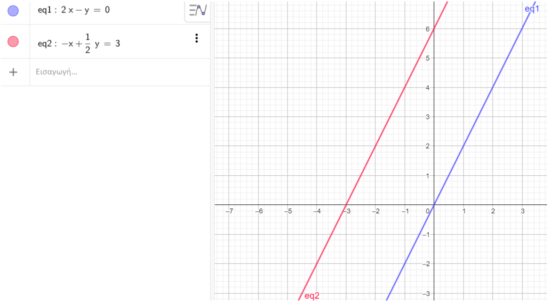
1η Παραλλαγή: $\begin{cases} 2x - \phantom{\frac{1}{2}}y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Δύο παραλλαγές

Στο προηγούμενο σύστημα, η λύση ήταν μοναδική. Γενικά, είναι πάντα μοναδική η λύση κάποιου γραμμικού συστήματος ή υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις;

1η Παραλλαγή: $\begin{cases} 2x - \quad y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

Θεώρηση μέσω γραμμών συστήματος: Οι δύο εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν παράλληλες ευθείες, ώστε δεν έχουμε λύσεις (αδύνατο σύστημα).



Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Δύο παραλλαγές (2)

1η Παραλλαγή: $\begin{cases} 2x - \phantom{\frac{1}{2}}y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

Θεώρηση μέσω στηλών:

- Ισοδύναμη γραφή του συστήματος σε μορφή ισότητας διανυσμάτων:

$$\begin{cases} 2x - \phantom{\frac{1}{2}}y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1 \text{ και } \Sigma_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Είναι δυνατόν το διάνυσμα b να εκφραστεί ως γραμ. συνδυασμός των διανυσμάτων Σ_1 και Σ_2 των συντελεστών των αγνώστων;

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Δύο παραλλαγές (2)

1η Παραλλαγή: $\begin{cases} 2x - \ \ y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

Θεώρηση μέσω στηλών:

- Ισοδύναμη γραφή του συστήματος σε μορφή ισότητας διανυσμάτων:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1 \text{ και } \Sigma_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Είναι δυνατόν το διάνυσμα b να εκφραστεί ως γραμ. συνδυασμός των διανυσμάτων Σ_1 και Σ_2 των συντελεστών των αγνώστων;
- Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή, έχουμε $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\Sigma_1$, ώστε το αριστερό μέλος γράφεται

$$x\Sigma_1 + y\Sigma_2 = x\Sigma_1 + y\left(-\frac{1}{2}\Sigma_1\right) = \left(x - \frac{1}{2}y\right)\Sigma_1 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

για οποιουσδήποτε αριθμούς $x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow$ Αδύνατο σύστημα.

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Δύο παραλλαγές (3)

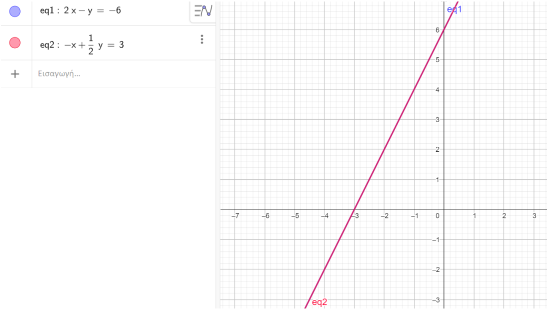
2η Παραλλαγή:

$$\begin{cases} 2x - \phantom{\tfrac{1}{2}}y = -6 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$$

2η Παραλλαγή:

$$\begin{cases} 2x - \phantom{\frac{1}{2}}y = -6 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$$

Θεώρηση μέσω γραμμών συστήματος: Οι δύο εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν ταυτιζόμενες ευθείες, ώστε έχουμε απειρία λύσεων.



2η Παραλλαγή: $\begin{cases} 2x - \quad y = -6 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

Θεώρηση μέσω στηλών: Ισοδύναμα, σε μορφή ισότητας διανυσμάτων:

$$\begin{cases} 2x - \quad y = -6 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1 \text{ και } \Sigma_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Είναι δυνατόν το διάνυσμα $\mathbf{b}$ να εκφραστεί ως γραμ. συδυασμός των διανυσμάτων Σ_1 και Σ_2 των συντελεστών των αγνώστων και, αν ναι, για ποιους συντελεστές;

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Δύο παραλλαγές (4)

2η Παραλλαγή: $\begin{cases} 2x - \;\; y = -6 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

Θεώρηση μέσω στηλών: Ισοδύναμα, σε μορφή ισότητας διανυσμάτων:

$$\begin{cases} 2x - \;\; y = -6 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1 \text{ και } \Sigma_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Είναι δυνατόν το διάνυσμα $\mathbf{b}$ να εκφραστεί ως γραμ. συδυασμός των διανυσμάτων Σ_1 και Σ_2 των συντελεστών των αγνώστων και, αν ναι, για ποιους συντελεστές;
- Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή, έχουμε $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\Sigma_1$και

  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = -3\Sigma_1$,ώστε το αριστερό μέλος γράφεται

$$x\Sigma_1 + y\Sigma_2 = x\Sigma_1 + y\left(-\frac{1}{2}\Sigma_1\right) = \left(x - \frac{1}{2}y\right)\Sigma_1 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

και έχουμε

$$x\Sigma_1 + y\Sigma_2 = \mathbf{b} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}y\right)\Sigma_1 = -3\Sigma_1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2}y = -3.$$

Δηλαδή, λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη αριθμών $(x, y) = \left(-3 + \frac{1}{2}y, y\right)$, για οποιοδήποτε αριθμό $y \in \mathbb{R} \longrightarrow$ Απειρία λύσεων.

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 2×2: Συμπεράσματα

- Μέσα από τα προηγούμενα 2×2 συστήματα, είδαμε, όπως ήταν και αναμενόμενο, ότι και οι δύο προσεγγίσεις (μέσω των γραμμών ή των στηλών του πίνακα του συστήματος) οδηγούν στα ίδια συμπεράσματα.
- Ωστόσο, στην περίπτωση που το πλήθος των αγνώστων ή των εξισώσεων αρχίζει να αυξάνει (ή σε περιπτώσεις που το σύστημα δεν είναι τετραγωνικό, δηλαδή έχει διαφορετικό πλήθος εξισώσεων και αγνώστων), η νέα προσέγγιση του προβλήματος (μέσω των στηλών $\Sigma_{\mathbf{1}}$ και $\Sigma_{\mathbf{2}}$ του πίνακα του συστήματος) γενικεύεται ευκολότερα.
- Για το λόγο αυτό, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη μελέτη της έννοιας των πινάκων, που αποτελούν και την βασική έννοια στον κλάδο της Γραμμικής Άλγεβρας.
- Για παράδειγμα, επιστρέφοντας στην περίπτωση των 2×2 συστημάτων (όπου ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος A έχει τη μορφή $A = \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{1}} & \Sigma_{\mathbf{2}} \end{bmatrix}$), αντιλαμβανόμαστε ότι το κρίσιμο ερώτημα είναι η περιγραφή του συνόλου

$$\{x\Sigma_{\mathbf{1}} + y\Sigma_{\mathbf{2}} : x, y \in \mathbb{R}\} .$$

  Δηλαδή, ο προσδιορισμός όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του πίνακα του συστήματος A.
- Ήδη μπρούμε να αντιληφθούμε ότι η επιλυσιμότητα ενός συστήματος εξαρτάται από το κατά πόσον το διάνυσμα των σταθερών όρων του συστήματος ανήκει στο ανωτέρω σύνολο.

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 3×3: Η θεώρηση μέσω των γραμμών του συστήματος

$$\begin{cases} 2x - \;\; y \qquad\;\; = 0 \\ -x + 2y - \;\; z = -1 \\ \qquad - 3y + 4z = 4 \end{cases}$$

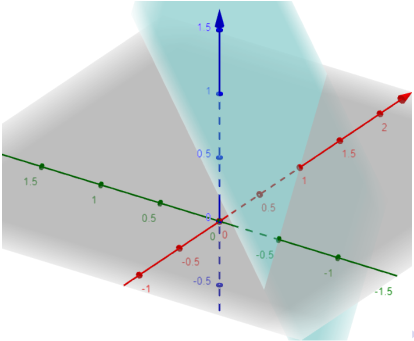
Γεωμετρική ερμηνεία: Ήδη τα πράγματα αρχίζουν να δυσκολεύουν...

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 3×3: Η θεώρηση μέσω των γραμμών του συστήματος

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases}$$

Γεωμετρική ερμηνεία: Ήδη τα πράγματα αρχίζουν να δυσκολεύουν...

- Η 2η εξίσωση περιγράφει επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ και $(0,-\frac{1}{2},0)$.

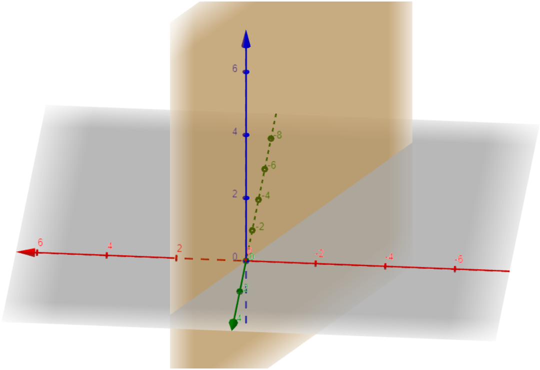


Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 3×3: Η θεώρηση μέσω των γραμμών του συστήματος (2)

$$\begin{cases} 2x - \ \ y \qquad\ \ = 0 \\ -x + 2y - \ \ z = -1 \\ \qquad - 3y + 4z = 4 \end{cases}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

- Η 1η εξίσωση περιγράφει επίπεδο κάθετο στην ευθεία $y = 2x$ του επιπέδου $x - y$.

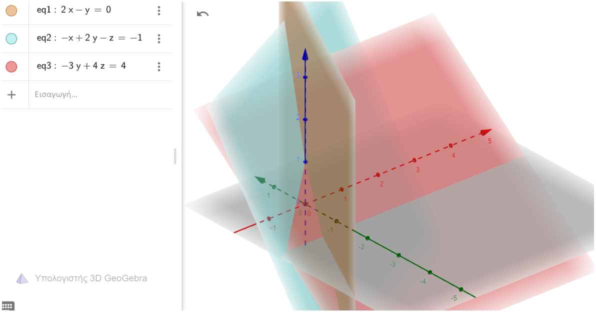


- Ομοίως και η τρίτη εξίσωση..

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 3 × 3: Η θεώρηση μέσω των γραμμών του συστήματος (3)

$$\begin{cases} 2x - y \phantom{{}-z} = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ - 3y + 4z = 4 \end{cases}$$

Γεωμετρική ερμηνεία: Η συνολική εικόνα:



- Παρατηρούμε στο σχήμα ότι μοναδικό κοινό σημείο των τριών επιπέδων (άρα και λύση του συστήματος) είναι το σημείο $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.
- Αρχίζουμε να αντιλαμβανόμαστε τους περιορισμούς της παρούσας προσέγγισης, ήδη η εποπτεία έχει γίνει αρκετά δύσκολη χωρίς της χρήση Η/Υ, ενώ θα ήταν αδύνατη αν είχαμε λ.χ. 4 αγνώστους ή ακόμα περισσότερους...

Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 3×3: Η θεώρηση μέσω των συντελεστών των αγνώστων

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases} \longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = [\Sigma_1 \quad \Sigma_2 \quad \Sigma_3]$$

Θεώρηση μέσω στηλών: Ισοδύναμα, σε μορφή ισότητας διανυσμάτων:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \underbrace{x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1,\ \Sigma_2 \text{ και } \Sigma_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Είναι δυνατόν το διάνυσμα b να εκφραστεί ως γραμ. συδυασμός των διανυσμάτων Σ_1, Σ_2 και Σ_3 των συντελεστών των αγνώστων και, αν ναι, για ποιους συντελεστές;

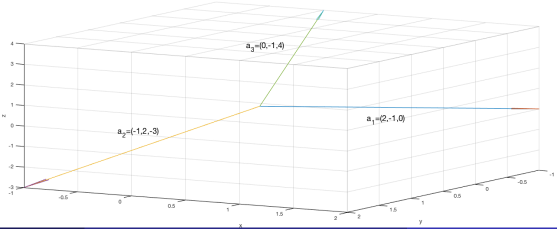
Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 3×3: Η θεώρηση μέσω των συντελεστών των αγνώστων

$$\begin{cases} 2x - \ y \qquad = 0 \\ -x + 2y - \ z = -1 \\ \qquad - 3y + 4z = 4 \end{cases} \longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = [\Sigma_1 \quad \Sigma_2 \quad \Sigma_3]$$

Θεώρηση μέσω στηλών: Ισοδύναμα, σε μορφή ισότητας διανυσμάτων:

$$\begin{cases} 2x - \ y \qquad = 0 \\ -x + 2y - \ z = -1 \\ \qquad - 3y + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \underbrace{x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1,\ \Sigma_2 \text{ και } \Sigma_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Είναι δυνατόν το διάνυσμα b να εκφραστεί ως γραμ. συδυασμός των διανυσμάτων Σ_1, Σ_2 και Σ_3 των συντελεστών των αγνώστων και, αν ναι, για ποιους συντελεστές;



Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 3×3: Η θεώρηση μέσω των συντελεστών των αγνώστων (2)

Θεώρηση μέσω στηλών:

$$\begin{cases} 2x - y \phantom{{}-z} = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ - 3y + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1,\ \Sigma_2 \text{ και } \Sigma_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Είναι δυνατόν το διάνυσμα **b** να εκφραστεί ως γραμ. συδυασμός των διανυσμάτων Σ_1, Σ_2 και Σ_3 των συντελεστών των αγνώστων και, αν ναι, για ποιους συντελεστές;

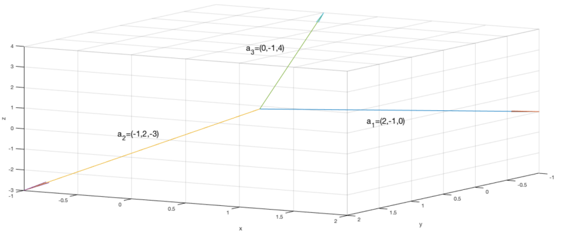
Ένα στοιχειώδες παράδειγμα 3×3: Η θεώρηση μέσω των συντελεστών των αγνώστων (2)

Θεώρηση μέσω στηλών:

$$\begin{cases} 2x - y \qquad = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ \quad - 3y + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\text{Γρ. συνδυασμός των διανυσμάτων } \Sigma_1,\ \Sigma_2 \text{ και } \Sigma_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Είναι δυνατόν το διάνυσμα **b** να εκφραστεί ως γραμ. συδυασμός των διανυσμάτων Σ_1, Σ_2 και Σ_3 των συντελεστών των αγνώστων και, αν ναι, για ποιους συντελεστές;
- Στην περίπτωση αυτή, η έκφραση του γραμμικού συνδυασμού είναι προφανής:

$$0 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 1)$$



Εξάσκηση.

Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 3 \\ \ \ x - 2y = -1 \end{cases}$$

και να εξεταστεί από την πλευρά των γραμμών και των στηλών του πίνακα συντελεστών του.