Ορίζουσες: Υπολογιστικοί τύποι

Γ. Κατσουλέας

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

gkatsouleas@hna.gr

14 Νοεμβρίου 2023

Περιεχόμενα

Έκφραση ορίζουσας σε σχέση με στοιχεία του πίνακα

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

- Έχουμε ήδη παρουσιάσει πώς οι 10 ιδιότητες της ορίζουσας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστεί πρακτικά η ορίζουσα οποιουδήποτε πίνακα.
- Ωστόσο, με χρήση των 10 αυτών ιδιοτήτων μπορεί να αποδειχθεί ένας (δύσχρηστος, είναι αλήθεια..) γενικός τύπος για την ορίζουσα, σε σχέση με τα ίδια τα στοιχεία του πίνακα.
- Όπως θα δούμε, η ορίζουσα κάποιου πίνακα μπορεί να εκφραστεί ως εξής:
  - Σχηματίζουμε όλα τα γινόμενα στοιχείων του πίνακα όπου χρησιμοποιούμε αποκλειστικά ένα στοιχείο από κάθε γραμμή και κάθε στήλη κάθε φορά. Δηλαδή, κάθε γινόμενο έχει n παράγοντες (όταν ο πίνακας είναι $n \times n$) και υπάρχουν $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \equiv n!$ τέτοια γινόμενα.
  - Καθένα από τα γινόμενα αυτά λαβάνει κάποιο πρόσημο (θετικό ή αρνητικό) βάσει ενός κανόνα και στη συνέχεια ή άθροιση όλων αυτών των $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \equiv n!$ όρων δίνει την ορίζουσα(!).
- Παρουσιάζουμε ακολούθως μία σκιαγράφηση της απόδειξης αυτής της έκφρασης της ορίζουσας στις περιπτώσεις 2×2 και 3×3.
  - Π.χ., στην περίπτωση 2×2 πίνακα, η ορίζουσα δίνεται ως άθροισμα $2! = 2 \cdot 1 = 2$ γινομένων από $n = 2$ στοιχεία του πίνακα το καθένα-ένα στοιχείο από κάθε γραμμή και κάθε στήλη. (Αντιπαραβάλλετε με τον σχετικό τύπο που έχει ήδη αναφερθεί στη διάφάνεια 15).
  - Αντίστοιχα, στην περίπτωση 3×3 πίνακα, η ορίζουσα δίνεται ως άθροισμα $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ γινομένων από $n = 3$ στοιχεία του πίνακα το καθένα (κ.ο.κ. για $n > 3$).
- Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, θα μπορούσαμε να έχουμε ακολουθήσει την αντίστροφη παρουσίαση: να ορίσουμε την ορίζουσα από την εν λόγω έκφραση και να την χρησιμοποιήσουμε, προκειμένου να αποδείξουμε και τις 10 ιδιότητες που έχουμε ήδη παρουσιάσει.

Σκιαγράφηση της απόδειξης του γενικού τύπου ορίζουσας στην περίπτωση 2×2

Απόδειξη τύπου ορίζουσας 2×2, χρησιμοποιώντας ιδιότητες:
Θα δείξουμε ότι

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- Μοναδιαίος πίνακας: $\det(I_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$
- Πίνακας μετάθεσης: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{(3\beta)}{=} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{(3\beta)}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}}_{\overset{(3\alpha,4)}{=} 0+ad} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}_{\overset{(3\alpha,4)}{=} -bc+0} = ad - bc.$

Παρατηρήσεις:

- Η αρχική ορίζουσα διασπάται σε $4(=2^2)$ όρους (2 από την 1η γραμμή και στη συνέχεια καθένας από αυτούς διασπάται σε 2 ακόμα ορίζουσες, λόγω της 2ης γραμμής).
- Πολλές από τις ορίζουσες στο τελικό άθροισμα είναι μηδενικές.
- Ποιο χαρακτηριστικό έχουν οι μη μηδενικές ορίζουσες που συμμετέχουν στην τελική άθροιση;

Σκιαγράφηση της απόδειξης του γενικού τύπου ορίζουσας στην περίπτωση 3×3

Επέκταση προηγούμενης τεχνικής (χρησιμοποιώντας ιδιότητες) για ορίζουσες 3×3:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{1\text{ος όρος}} \\
&\quad + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{2\text{ος όρος}} \\
&\quad + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{3\text{ος όρος}}
\end{aligned}
$$

Σκιαγράφηση της απόδειξης του γενικού τύπου ορίζουσας στην περίπτωση 3×3 (2)

Επέκταση προηγούμενης τεχνικής (χρησιμοποιώντας ιδιότητες) για ορίζουσες 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Παρατηρήσεις:

- Η αρχική ορίζουσα διασπάται σε $27 (= 3 \cdot 3)$ όρους (3 από την 1η γραμμή και στη συνέχεια καθένας από αυτούς διασπάται σε 9 ακόμα ορίζουσες, λόγω 2ης/3ης γραμμής).
- Πολλές από τις ορίζουσες στο τελικό άθροισμα είναι μηδενικές.
- Στην τελική άθροιση παραμένουν $6 (= 3 \cdot 2 = 3!)$ μη μηδενικοί όροι.
- Κάθε όρος αποτελεί γινόμενο 3 παραγόντων: 1 στοιχείο από κάθε γραμμή και από κάθε στήλη. (Αν κάποια γραμμή ή στήλη είναι μηδενική, τότε $\det = 0$.)
- Κάθε ορίζουσα στην τελική άθροιση υπολογίζεται ως $\pm$ το γινόμενο των μη μηδενικών στοιχείων που παρουσιάζονται σάυτήν. Το πρόσημο εξαρτάται από την ορίζουσα του αντίστοιχου πίνακα μετάθεσης.

Σκιαγράφηση της απόδειξης του γενικού τύπου ορίζουσας στην περίπτωση 3×3 (3)

Επέκταση προηγούμενης τεχνικής (χρησιμοποιώντας ιδιότητες) για ορίζουσες 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}_{(1,2,3)\to(1,2,3)} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}_{(1,2,3)\to(1,3,2)} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}_{(1,2,3)\to(2,1,3)} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{(1,2,3)\to(2,3,1)} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}_{(1,2,3)\to(3,1,2)} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{(1,2,3)\to(3,2,1)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Γενικός τύπος ορίζουσας (n! όροι)

Επέκταση προηγούμενης τεχνικής (χρησιμοποιώντας ιδιότητες) για ορίζουσες πινάκων $A \in \Pi_{n\times n}$: Περιγραφικά (όχι αυστηρά), μπορούμε να γράφουμε

$$\det(A) = \sum_{n! \text{ όροι}} \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\omega},$$

όπου $(1, 2, \ldots, n) \to (\alpha, \beta, \ldots, \omega)$ μία μετάθεση των $(1, 2, \ldots, n)$, δηλαδή κάθε όρος $(1, 2, \ldots, n)$ χρησιμοποιείται μία και μόνη φορά.

Ορισμός

Έστω το σύνολο $S = \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου S πάνω στο εαυτό του καλείται μετάθεση *(permutation)* των φυσικών $\{1, 2, \ldots, n\}$ και θα συμβολίζεται με

$$p = (p_1, \ldots p_n) \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 1: Στη μετάθεση

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{έχουμε} \quad \begin{cases} p_1 = 3, \\ p_2 = 1, \\ p_3 = 5, \\ p_4 = 4, \\ p_5 = 2, \end{cases}$$

ώστε γράφουμε απλούστερα $(3, 1, 5, 4, 2)$.
Παράδειγμα 2: Ταυτοτική μετάθεση $(1, 2, 3, 4, 5) \to (1, 2, 3, 4, 5)$.

Μεταθέσεις (2)

Παρατήρηση: Το πλήθος όλων των μεταθέσεων των αριθμών $\{1, 2, \ldots, n\}$ είναι $n!$.

Ορισμός

Σε μία μετάθεση λέμε ότι έχουμε παράβαση ή αντιστροφή, όταν ένας μεγαλύτερος φυσικός προηγείται από κάποιον μικρότερό του. Σε μία μετάθεση $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ των αριθμών $(1, 2, \ldots, n)$ το πλήθος των παραβάσεων είναι

$$\kappa = \sum_{\ell=1}^{n-1} \kappa_\ell,$$

όπου κ_ℓ το πλήθος των φυσικών στη μετάθεση $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ που προηγούνται από τον ℓ και είναι μεγαλύτεροί του.

Παράδειγμα: Στη μετάθεση $(1, 2, 3, 4, 5, 6) \to (3, 6, 2, 4, 1, 5)$ έχουμε

$$\kappa_1 = 4, \kappa_2 = 2, \kappa_3 = 0, \kappa_4 = 1, \kappa_5 = 1,$$

οπότε το συνολικό πλήθος παραβάσεων σε αυτή είναι

$$\kappa = \Sigma_{\ell=1}^{6} \kappa_\ell = 4 + 2 + 0 + 1 + 1 = 8.$$

Μεταθέσεις (3)

Συμβολισμός: Το σύνολο όλων των $(n!)$ μεταθέσεων των αριθμών $\{1, 2, \ldots, n\}$ συμβολίζεται S_n.

Ορισμός

Μία μετάθεση καλείται άρτια, όταν το πλήθος των παραβάσεων σε αυτήν είναι άρτιος και περιττή, όταν το πλήθος των παραβάσεων σε αυτήν είναι περιττός αριθμός.
Πρόσημο της μετάθεσης $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ καλείται η συνάρτηση $\epsilon : S_n \to \{\pm 1\}$, ώστε

$$\epsilon(p_1, p_n, \ldots, p_n) = \begin{cases} -1, & \text{όταν η } (p_1, p_2, \ldots, p_n) \text{ είναι περιττή,} \\ 1, & \text{όταν η } (p_1, p_2, \ldots, p_n) \text{ είναι άρτια.} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Έχουμε

$$\epsilon(p_1, p_n, \ldots, p_n) = (-1)^{\kappa},$$

όπου κ το πλήθος των παραβάσεων στην $(p_1, p_n, \ldots, p_n)$.

Γενικός τύπος ορίζουσας ($n!$ όροι)

Επέκταση προηγούμενης τεχνικής (χρησιμοποιώντας ιδιότητες) για ορίζουσες πινάκων $A \in \Pi_{n \times n}$: Τυπικότερα, μπορούμε να γράφουμε

$$\det(A) = \sum_{J \in S_n} \epsilon(J) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

όπου η άθροιση γίνεται πάνω στο σύνολο όλων των μεταθέσεων $J : (1, 2, \ldots, n) \to (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ των $(1, 2, \ldots, n)$.

Εφαρμογή γενικού τύπου ορίζουσας ($n!$ όροι)

Εφαρμογή.

Να χρησιμοποιηθεί ο γενικός τύπος της ορίζουσας για τον υπολογισμό της 4×4 ορίζουσας (χωρίς χρήση ιδιοτήτων/απαλοιφής):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Εφαρμογή γενικού τύπου ορίζουσας ($n!$ όροι)

Εφαρμογή.
Να χρησιμοποιηθεί ο γενικός τύπος της ορίζουσας για τον υπολογισμό της 4×4 ορίζουσας (χωρίς χρήση ιδιοτήτων/απαλοιφής):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Απάντηση. Ο γενικός τύπος της ορίζουσας είναι εφαρμόσιμος ακριβώς επειδή ο δοσμένος πίνακας έχει πολλά μηδενικά στοιχεία!
Πράγματι, μία επιλογή μη μηδενικού γινομένου (κρατώντας ένα ακριβώς στοιχείο από κάθε γραμμή και κάθε στήλη) θα μπορούσε να είναι από τα στοιχεία της ελάσσονας διαγωνίου (με κόκκινο υποδηλώνονται τα στοιχεία που αποκλείονται μόλις επιλεγεί το μπλε στοιχεία του πίνακα κάθε φορά):

$$\begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}1} \\ 0 & 1 & 1 & {\color{red}0} \\ 1 & 1 & 0 & {\color{red}0} \\ 1 & 0 & 0 & {\color{red}1} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}1} \\ {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}1} & {\color{red}0} \\ 1 & 1 & {\color{red}0} & {\color{red}0} \\ 1 & 0 & {\color{red}0} & {\color{red}1} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}1} \\ {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}1} & {\color{red}0} \\ {\color{red}1} & {\color{blue}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \\ 1 & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}1} \\ {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}1} & {\color{red}0} \\ {\color{red}1} & {\color{blue}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \\ {\color{blue}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} \end{vmatrix}.$$

Παρατηρείστε ότι οποιαδήποτε άλλη επιλογή με πρώτο στοιχείο το (1,4) οδηγεί σε μηδενικό γινόμενο. Π.χ.:

$$\begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}1} \\ 0 & 1 & 1 & {\color{red}0} \\ 1 & 1 & 0 & {\color{red}0} \\ 1 & 0 & 0 & {\color{red}1} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}1} \\ {\color{red}0} & {\color{blue}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0} \\ 1 & {\color{red}1} & 0 & {\color{red}0} \\ 1 & {\color{red}0} & 0 & {\color{red}1} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}1} \\ {\color{red}0} & {\color{blue}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0} \\ {\color{blue}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \\ {\color{red}1} & {\color{red}0} & 0 & {\color{red}1} \end{vmatrix} \to \text{οδηγεί σε μηδενικό γινόμενο.}$$

Επίσης, ξεκινώντας τον σχηματισμό του γινομένου από το στοιχείο (1,3):

$$\begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{blue}1} & {\color{red}1} \\ 0 & 1 & {\color{red}1} & 0 \\ 1 & 1 & {\color{red}0} & 0 \\ 1 & 0 & {\color{red}0} & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{blue}1} & {\color{red}1} \\ {\color{red}0} & {\color{blue}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0} \\ 1 & {\color{red}1} & {\color{red}0} & 0 \\ 1 & {\color{red}0} & {\color{red}0} & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{blue}1} & {\color{red}1} \\ {\color{red}0} & {\color{blue}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0} \\ {\color{blue}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \\ {\color{red}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{blue}1} & {\color{red}1} \\ {\color{red}0} & {\color{blue}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0} \\ {\color{blue}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \\ {\color{red}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{blue}1} \end{vmatrix} \text{ άλλη μία εφικτή επιλογή.}$$

Εφαρμογή γενικού τύπου ορίζουσας ($n!$ όροι) - συνέχεια

Εφαρμογή: Να χρησιμοποιηθεί ο γενικός τύπος της ορίζουσας για τον υπολογισμό της 4×4 ορίζουσας (χωρίς εφαρμογή ιδιοτήτων/απαλοιφής):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Μόνες επιλογές που οδηγούν σε μη μηδενικές ορίζουσες:

- $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1$, διότι $(1, 2, 3, 4) \to (4, 3, 2, 1)$ άρτια μετάθεση.
- $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, διότι $(1, 2, 3, 4) \to (3, 2, 1, 4)$ περιττή μετάθεση.
- Οι υπόλοιπες ορίζουσες στο άθροισμα των συνολικά 24 όρων είναι μηδενικές.

Τελικά, έχουμε $\det(A) = 0$

Δυσκολία στην εφαρμογή γενικού τύπου ορίζουσας

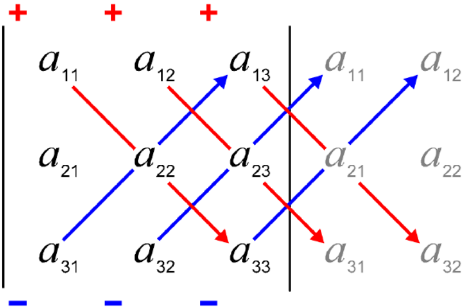
Παρατήρηση: Ο γενικός τύπος της ορίζουσας δεν είναι εύχρηστος για τον υπολογισμό, όταν ο πίνακας έχει διάσταση μεγαλύτερη από 4×4 και δεν έχει πολλά μηδενικά:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Όλες οι $4!$ επιλογές οδηγούν σε μη μηδενικές ορίζουσες:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \text{κλπ.....}$$

Μνημονικός κανόνας προσήμων του Sarrus (μόνο για ορίζουσες 3×3)



$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Εφαρμογή μνημονικών κανόνων προσήμων (μόνο για ορίζουσες 2×2, 3×3)

Εφαρμογή. $\left(\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c\right)$

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των πινάκων:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

Εφαρμογή μνημονικών κανόνων προσήμων (μόνο για ορίζουσες 2×2, 3×3)

Εφαρμογή. $\left(\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c\right)$

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των πινάκων:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

Απάντηση.

Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 12 - 12 = 0,$$

δηλαδή ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος (οι δύο στήλες του είναι συγγραμμικές).

Επίσης,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 5 + 12 = 17 \neq 0,$$

δηλαδή ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος (οι δύο στήλες δεν είναι συγγραμικές/εξαρτημένες).

Εφαρμογή μνημονικών κανόνων προσήμων (μόνο για ορίζουσες 2×2, 3×3)

Εφαρμογή. (Κανόνας Sarrus)
Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των πινάκων:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Εφαρμογή μνημονικών κανόνων προσήμων (μόνο για ορίζουσες 2×2, 3×3)

Εφαρμογή. (Κανόνας Sarrus)
Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των πινάκων:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Απάντηση.
Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \cdot 2 - 5 \cdot 5 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 0 = 35 + 60 + 0 - 75 - 20 - 0 = 0,$$

δηλαδή ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος (οι στήλες του είναι εξαρτημένες - σημειώνουμε ότι $\Sigma_{\mathbf{3}} = \Sigma_{\mathbf{1}} + 2\Sigma_{\mathbf{2}}$).
Επίσης,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 20 + 6 - 45 - 2 = -21 \neq 0,$$

δηλαδή ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος (οι στήλες δεν είναι εξαρτημένες).

Ανάπτυγμα ορίζουσας κατά Laplace

Σχέση με ορίζουσες μικρότερης τάξης

Βασική ιδέα στην περίπτωση 3×3:

$$\det(A) \overset{\text{Ορισμό}}{=} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}_{a_{12}[-(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})]} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}_{a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})}$$

Ορισμός

Η ορίζουσα που προκύπτει από τον $A \in \Pi_n$, αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου a_{ij} καλείται ελλάσων ορίζουσα (*minor*) του στοιχείου a_{ij} και συμβολίζεται με M_{ij} ($(n-1) \times (n-1)$ ορίζουσα).
Το γινόμενο $(-1)^{i+j} M_{ij}$ καλείται αλγεβρικό συμπλήρωμα (*cofactor*) του στοιχείου a_{ij} και συμβολίζεται με A_{ij}.

Με τις ποσότητες αυτές, η ορίζουσα του πίνακα $A \in \Pi_3$ γράφεται

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Μνημονικό σχήμα προσήμων αλγεβρικών συμπληρωμάτων:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}_{3\times 3}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}_{4\times 4}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}_{5\times 5}$$

Παρατήρηση: Σημειώνουμε ότι τα πρόσημα αυτά ενσωματώνονται (μαζί με τις αντίστοιχες ελάσσονες ορίζουσες) στα αλγεβρικά συμπληρώματα των εκάστοτε στοιχείων.

Ανάπτυγμα ορίζουσας κατά Laplace (υπολογιστικός τύπος)

Ανάπτυγμα ορίζουσας (ως προς τα στοιχεία της i–γραμμής):

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Αντίστοιχα αναπτύγματα μπορούμε να έχουμε και προς οποιαδήποτε στήλη. Π.χ., για τη στήλη–j:

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Παρατηρήσεις:

- Με τον τύπο του αναπτύγματος, μπορούμε να αναγάγουμε μία $n \times n$ ορίζουσα βήμα-βήμα σε $(n-1) \times (n-1)$, $(n-2) \times (n-2)$ και διαδοχικά σε μικρότερης τάξης, μέχρι την περίπτωση 2×2.
- Σχετικά με τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων ενός πίνακα 2×2, παρατηρούμε ότι

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21}).$$

Ανάπτυγμα ορίζουσας κατά Laplace: Εφαρμογή

$$\begin{vmatrix} 2^{+} & -1^{-} & 1^{+} \\ 3^{-} & 2^{+} & 1^{-} \\ -1^{+} & 0^{-} & 1^{+} \end{vmatrix} \overset{\text{ως προς 1η Γραμμή}}{=} +2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) + (3 \cdot 0 - (-1) \cdot 2)$$

$$= 4 + 4 + 2 = 10.$$

- Στην πράξη, το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μίας ορίζουσας είναι ως προς την γραμμή ή στήλη που παρουσιάζει τα περισσότερα μηδενικά.
- Στο τρέχον παράδειγμα, θα μπορούσαμε καλύτερα να αναπτύξουμε ως προς την 3η γραμμή ή την 2η στήλη.
- Για λόγους επίδειξης, παρουσιάζουμε επίσης το ανάπτυγμα ως προς την 2η στήλη:

$$\begin{vmatrix} 2^{+} & -1^{-} & 1^{+} \\ 3^{-} & 2^{+} & 1^{-} \\ -1^{+} & 0^{-} & 1^{+} \end{vmatrix} \overset{\text{ως προς 2η Στήλη}}{=} -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) + 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) - 0$$

$$= 4 + 6 = 10.$$

Ανάπτυγμα ορίζουσας κατά Laplace: Εφαρμογή

Έστω ο 3×3 πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Με ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της $2^{ης}$ γραμμής έχουμε:

$$\mathrm{detA} = |\mathrm{A}| = (-1)^{2+1} 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{detA} = 0 + 5(1 \cdot 4 - 3 \cdot 3) - (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3)$$
$$\mathrm{detA} = -25 + 4 = -21$$

- Το ίδιο αποτέλεσμα βρίσκουμε και με αναπτύγματα ως προς τα στοιχεία των υπόλοιπων γραμμών ή και στηλών.

Ανάπτυγμα κατά Laplace: Παραδείγματα

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a & b & c \\ 2 & a & b & c \\ 7 & 15 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Ανάπτυγμα κατά Laplace: Παραδείγματα

Παράδειγμα. Να υπόλογιστεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a & b & c \\ 2 & a & b & c \\ 7 & 15 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Έχουμε

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a & b & c \\ 2 & a & b & c \\ 7 & 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{=} \begin{vmatrix} -1^{+} & 3^{-} & 1^{+} & 2^{-} \\ 0^{-} & a^{+} & b^{-} & c^{+} \\ 2^{+} & 0 & 0^{+} & 0^{-} \\ 7^{-} & 15^{+} & 5^{-} & 10^{+} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ανάπτ. ως προς } \Gamma_3}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότητα 3α}}{=} 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότητα 4}}{=} 2 \cdot 5 \cdot 0 = 0.$$

Ανάπτυγμα κατά Laplace: Παραδείγματα

Παράδειγμα. Να βρεθούν οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & x \\ \lambda^2 & x & \lambda \\ x & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Παράδειγμα. Να βρεθούν οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & x \\ \lambda^2 & x & \lambda \\ x & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & x \\ \lambda^2 & x & \lambda \\ x & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \overset{\Sigma_1 \to \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} \lambda+\lambda^2+x & \lambda^2 & x \\ \lambda^2+x+\lambda & x & \lambda \\ x+\lambda+\lambda^2 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+\lambda+\lambda^2)\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & x \\ 1 & x & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\Leftrightarrow} (x+\lambda+\lambda^2)\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & x \\ 0 & x-\lambda^2 & \lambda - x \\ 0 & \lambda-\lambda^2 & \lambda^2 - x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+\lambda+\lambda^2)\begin{vmatrix} x-\lambda^2 & \lambda - x \\ \lambda-\lambda^2 & \lambda^2 - x \end{vmatrix} \Leftrightarrow (x+\lambda+\lambda^2)\left[\left(x-\lambda^2\right)\left(\lambda^2-x\right) - (\lambda-x)\left(\lambda-\lambda^2\right)\right] = 0$$

$$(x+\lambda+\lambda^2)\left[\lambda^2 x - x^2 - \lambda^4 + \lambda^2 x - \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda x - \lambda^2 x\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+\lambda+\lambda^2)\underbrace{\left(-x^2 + \left(\lambda^2+\lambda\right)x - \left(\lambda^4-\lambda^3+\lambda^2\right)\right)}_{\Delta=(\lambda^2+\lambda)^2-4(\lambda^4-\lambda^3+\lambda^2)=\ldots=-3\lambda^2(\lambda-1)^2\leq 0} = 0.$$

- $x = -\lambda - \lambda^2$ ή
- $-x^2 + \left(\lambda^2+\lambda\right)x - \left(\lambda^4-\lambda^3+\lambda^2\right) = 0$ με πραγματικές λύσεις μόνον όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$.
  - $\lambda = 0$. Τότε, $x = 0$.
  - $\lambda = 1$. Τότε, η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή $-(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.