Συστήματα Κράμμερ

Γ. Κατσουλέας

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

gkatsouleas@hna.gr

October 27, 2023

Περιεχόμενα

Αντίστροφος πίνακας (κλειστός τύπος με χρήση ορίζουσας/αλγεβρικών συμπληρωμάτων): Ιδέα

Ιδέα από την περίπτωση 2×2:

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

και επίσης

$$\left(\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Πώς μπορούν να εκφραστούν τα στοιχεία του πίνακα $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ που εμφανίζεται στον αντίστροφο με τα αλγεβρικά στοιχεία του αρχικού πίνακα $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$?

Η έννοια του συμπληρωματικού πίνακα

Ιδέα από την περίπτωση 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad - bc}}_{=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας αλγ. συμπλ.}}$$

Η έννοια του συμπληρωματικού πίνακα

Ιδέα από την περίπτωση 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας αλγ. συμπλ.}}$$

Ορισμός

Έστω $A \in M_n$. Ο $n \times n$ πίνακας με στοιχείο θέσης$-(i,j)$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα A_{ji} λέγεται συμπληρωματικός *(adjoint)* του πίνακα A και συμβολίζεται $adj(A)$. Δηλαδή,

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Παρατηρείστε ότι τα αλγεβρικά συμπληρώματα της 1ης γραμμής του πίνακα A τοποθετούνται στην 1η στήλη του συμπληρωματικού του, $adj(A)$ κ.ο.κ.

Συμπληρωματικός πίνακας (υπολογισμός)

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο συμπληρωματικός του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Συμπληρωματικός πίνακας (υπολογισμός) - συνέχεια

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο συμπληρωματικός του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 39, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -30,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 18,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -27,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 15,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3. \quad \Rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} 39 & 18 & 3 \\ -30 & 0 & 15 \\ -6 & -27 & 3 \end{bmatrix}$$

Τύπος για αντίστροφο πίνακα

Πρόταση

Για έναν πίνακα $A \in \Pi_n$, *έχουμε*

$$A\,(adj(A)) = (adj(A))\,A = \det(A)\cdot I_n.$$

Παρατήρηση: Ως συνέπεια της Πρότασης, συμβολίζοντας

$$B = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A),$$

έχουμε

$$BA = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)A = \frac{1}{\det(A)}\det(A)I_n = I_n.$$

Επιπλέον,

$$AB = A\left[\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right] = \frac{1}{\det(A)}A\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}\det(A)I_n = I_n.$$

Λόγω της μοναδικότητας του αντιστρόφου, συμπεραίνουμε ότι

$$A^{1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A).$$

Ορίζουσα συμπληρωματικού πίνακα

Πόρισμα

Έστω $A \in \Pi_n$ αντιστρέψιμος. Τότε, η ορίζουσα του συμπληρωματικού του πίνακα δίνεται από τη σχέση
$$\det(adj(A)) = (\det(A))^{n-1}.$$

Απόδειξη: Από τη σχέση
$$A\left(\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right) = I_n,$$
έχουμε
$$\begin{aligned}
\det(A)\det\left(\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right) &= \det(I_n)\\
\det(A)\left(\frac{1}{\det(A)}\right)^n \det(adj(A)) &= 1\\
\frac{1}{\det(A)^{n-1}}\det(adj(A)) &= 1\\
\det(adj(A)) &= (\det(A))^{n-1}.
\end{aligned}$$

Τύπος για αντίστροφο πίνακα: Εξειδίκευση στις περιπτώσεις 3×3 και 2×2

- Αν $\det(A) \neq 0$, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.
- Ειδικά στην περίπτωση 3×3 πίνακα A, αν $\det(A) \neq 0$, αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{21} & +M_{31} \\ -M_{12} & +M_{22} & -M_{32} \\ +M_{13} & -M_{23} & +M_{33} \end{bmatrix},$$

όπου A_{ij} το αλγεβρικό συμπλήρωμα και M_{ij} η ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου a_{ij}.

- Ειδικά στην περίπτωση 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, αν $\det(A) = \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Υπολογισμός αντιστρόφου πίνακα

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν ο πίνακας αντιστρέφεται και να βρεθεί ο αντίστροφος, αν υπάρχει:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 39 & 18 & 3 \\ -30 & 0 & 15 \\ -6 & -27 & 3 \end{bmatrix}$$

και επίσης

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 6 & 7 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-5) \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 7 - 6 \cdot 1 \cdot 2 - 7 \cdot (-5) \cdot 3 - 4 \cdot 0 \cdot (-1) \\ &= 12 + 30 - 12 + 105 = 135 \neq 0, \end{aligned}$$

ώστε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{135} \begin{bmatrix} 39 & 18 & 3 \\ -30 & 0 & 15 \\ -6 & -27 & 3 \end{bmatrix}.$$

Συστήματα Crammer

Συστήματα Crammer

Ως συστήματα Cramer αναφέρονται τα γραμμικά συστήματα

$$Ax = b,$$

όπου $A \in \Pi_n$ αντιστρέψιμος.

Συστήματα Crammer

Ως συστήματα Cramer αναφέρονται τα γραμμικά συστήματα

$$Ax = b,$$

όπου $A \in \Pi_n$ αντιστρέψιμος.
Στην περίπτωση αυτή, έχουμε μοναδική λύση, αφού

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = \frac{1}{\det(A)} adj(A)b$$

Κατά συντεταγμένη,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

Ως συστήματα Cramer αναφέρονται τα γραμμικά συστήματα

$$Ax = b,$$

όπου $A \in \Pi_n$ αντιστρέψιμος.
Στην περίπτωση αυτή, έχουμε μοναδική λύση, αφού

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = \frac{1}{\det(A)} adj(A)b$$

Κατά συντεταγμένη,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(B_1) \\ \det(B_2) \\ \vdots \\ \det(B_n) \end{bmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \begin{cases} B_1 \in M_n, & \text{ο } A \text{ κατόπιν αντικατάστασης της 1ης στήλης από το } b, \\ B_2 \in M_n, & \text{ο } A \text{ κατόπιν αντικατάστασης της 2ης στήλης από το } b, \\ \ldots, & \\ B_n \in M_n, & \text{ο } A \text{ κατόπιν αντικατάστασης της } n\text{–στήλης από το } b. \end{cases}$$

Η μοναδική λύση ενός συστήματος Cramer

$$Ax = b$$

δίνεται από τον τύπο

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\det(B_1)}{\det(A)} \\ \frac{\det(B_2)}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det(B_n)}{\det(A)} \end{bmatrix},$$

όπου

$$B_i \in \Pi_n, \quad \text{ο } A \text{ κατόπιν αντικατάστασης της στήλης-}i \text{ από το } b \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Δηλαδή, αν

$$A = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_n \end{bmatrix}, \quad \text{έχουμε} \quad \begin{cases} B_1 = \begin{bmatrix} b & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_n \end{bmatrix}, \\ B_2 = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & b & \Sigma_3 & \cdots & \Sigma_n \end{bmatrix}, \\ \ldots \\ B_n = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_{n-1} & b \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Κανόνας Crammer: Εξειδίκευση στην περίπτωση 3 × 3

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Θέτουμε $A_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_2 & a_{33} \end{vmatrix}, A_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

Εάν η ορίζουσα $|\mathbf{A}| \neq \mathbf{0}$, τότε το σύστημα έχει **μοναδική** λύση

$$x = \frac{A_x}{|A|}, \qquad y = \frac{A_y}{|A|}, \qquad z = \frac{A_z}{|A|}$$

Κανόνας Crammer: Εφαρμογή

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Κανόνας Crammer: Εφαρμογή

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ \ \ x_1 - 5x_2 - \ \ x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Λύση: Ο πίνακας του συστήματος $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος με $\det(A) = 17 \neq 0$.

Συνεπώς, πρόκειται περί συστήματος Cramer και ο σχετικός κανόνας εξασφαλίζει μοναδική λύση

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\det(B_1)}{\det(A)} \\ \frac{\det(B_2)}{\det(A)} \\ \frac{\det(B_3)}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

όπου

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 51, \quad \det(B_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 17, \quad \det(B_3) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = -51.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\det(B_1)}{\det(A)} \\ \frac{\det(B_2)}{\det(A)} \\ \frac{\det(B_3)}{\det(A)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{51}{17} \\ \frac{17}{17} \\ \frac{-51}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Κανόνας Crammer: Παρατηρήσεις

Παρατηρήσεις:

- Ένα ομογενές σύστημα Cramer

$$Ax = \mathbb{O}_{n\times 1}$$

  έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Και αντιστρόφως (γιατί;).

- Γενικά, προτιμάται η μέθοδος της απαλοιφής Gauss (υπολογιστικά περισσότερο οικονομική).

Κανόνας Crammer: Εφαρμογές

Εφαρμογή. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \ \ y - \ \ z = 1 \\ x + 4y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 3. \end{cases}$$

Κανόνας Crammer: Εφαρμογές

Εφαρμογή. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \ \ y - \ \ z = 1 \\ x + 4y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 3. \end{cases}$$

Λύση.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$: Ο πίνακας του συστήματος.
- $$\det(A) = \begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & -1^{+} \\ 1^{-} & 4^{+} & 3^{-} \\ 2^{+} & 3^{-} & 4^{+} \end{vmatrix} \overset{\text{ως προς 1η Γραμμή}}{=} 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (16 - 9) - (4 - 6) - (3 - 8) = 7 + 2 + 5 = 14 \neq 0.$$
- Επειδή η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός, έχουμε μοναδική λύση.

Κανόνας Crammer: Εφαρμογές (συνέχεια)

Εφαρμογή. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \ \ y - \ \ z = 1 \\ x + 4y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 3. \end{cases}$$

Λύση.

- Για να βρούμε τη μοναδική λύση, υπολογίζουμε:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & -1^{+} \\ 2^{-} & 4^{+} & 3^{-} \\ 3^{+} & 3^{-} & 4^{+} \end{vmatrix} \overset{\text{ως προς 1η Γραμμή}}{=} 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (16-9) - (8-9) - (6-12) = 7 + 1 + 6 = 14,$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & -1^{+} \\ 1^{-} & 2^{+} & 3^{-} \\ 2^{+} & 3^{-} & 4^{+} \end{vmatrix} \overset{\text{ως προς 1η Γραμμή}}{=} 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (8-9) - (4-6) - (3-8) = -1 + 2 + 1 = 2,$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & 1^{+} \\ 1^{-} & 4^{+} & 2^{-} \\ 2^{+} & 3^{-} & 3^{+} \end{vmatrix} \overset{\text{ως προς 1η Γραμμή}}{=} 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (12-6) - (3-4) - (3-8) = 6 + 1 - 5 = 2.$$

- Επομένως, η μοναδική λύση είναι

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{14}{14} = 1, \qquad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}, \qquad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \longrightarrow \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Κανόνας Crammer: Παραμετρικό παράδειγμα

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 = 3 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Κανόνας Crammer: Παραμετρικό παράδειγμα (συνέχεια)

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 = 3 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
Λύση: Ο πίνακας του συστήματος έχει ορίζουσα

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 3 \\ 2 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha-1 & 4 \\ 2 & 1 & \alpha+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 4 \\ 1 & \alpha+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-1)(\alpha+2) - 4 = \alpha^2 + \alpha - 6 = (\alpha+3)(\alpha-2).$$

Κανόνας Crammer: Παραμετρικό παράδειγμα (συνέχεια)

Παράδειγμα:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 3 \\ 2 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+3)(\alpha-2).$$

i. Αν $\alpha \neq -3$, $\alpha \neq 2$ ($\det(A) \neq 0$): Πρόκειται περί συστήματος Cramer και ο σχετικός κανόνας εξασφαλίζει μοναδική λυση. Έχουμε

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & \alpha & 3 \\ 3 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-2 & 5 \\ 3 & 0 & \alpha+3 \end{vmatrix} = (\alpha-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & \alpha+3 \end{vmatrix} = (\alpha-2)(\alpha+3)$$

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & \alpha+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & \alpha+2 \end{vmatrix} = \alpha-2,$$

$$\det(B_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha-1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha-2,$$

δηλαδή $x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)} = \frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{(\alpha-2)(\alpha+3)} = 1,$

$$x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)} = \frac{\alpha-2}{(\alpha-2)(\alpha+3)} = \frac{1}{\alpha+3}, \quad x_3 = \frac{\det(B_3)}{\det(A)} = \frac{\alpha-2}{(\alpha-2)(\alpha+3)} = \frac{1}{\alpha+3}.$$

ii. Αν $\alpha = -3$ ($\det(A) = 0$): Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

με αντίστοιχο επαυξημένο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 4\Gamma_2}{\overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Κανόνας Crammer: Παραμετρικό παράδειγμα (συνέχεια)

iii. Αν $\alpha = 2$ ($\det(A) = 0$): Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

με αντίστοιχο επαυξημένο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα μονοπαραμετρική απειρία λύσεων της μορφής

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Κανόνας Crammer: Παραμετρικό παράδειγμα

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \kappa x + y + z = 1 \\ x + \kappa y + z = 1 \\ x + y + \kappa z = 1. \end{cases}$$

Κανόνας Crammer: Παραμετρικό παράδειγμα

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \kappa x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \kappa y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \ \ y + \kappa z = 1. \end{cases}$$

Λύση. Το σύστημα αυτό το είχαμε αντιμετωπίσει με χρήση της μεθόδου απαλοιφής Gauss-Jordan. Παρουσιάζουμε εδώ την επίλυσή του με χρήση της μεθόδου Crammer.

- $$\det(A) = \begin{vmatrix} \kappa^{+} & 1^{-} & 1^{+} \\ 1^{-} & \kappa^{+} & 1^{-} \\ 1^{+} & 1^{-} & \kappa^{+} \end{vmatrix} \overset{\text{ως προς 1η Γραμμή}}{=} \kappa \begin{vmatrix} \kappa & 1 \\ 1 & \kappa \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \kappa \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
  $$= \kappa \left(\kappa^2 - 1\right) - (\kappa - 1) + (1 - \kappa)$$
  $$= \kappa (\kappa + 1)(\kappa - 1) - (\kappa - 1) - (\kappa - 1)$$
  $$= (\kappa - 1)\left(\kappa^2 + \kappa - 2\right)$$
  $$= (\kappa - 1)(\kappa + 2)(\kappa - 1)$$
  $$= (\kappa - 1)^2 (\kappa + 2).$$
- Όταν η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός (δηλ. για $\kappa \neq 1, -2$), έχουμε μοναδική λύση.

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \kappa x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \ x + \kappa y + \ \ z = 1 \\ \ x + \ \ y + \kappa z = 1. \end{cases}$$

Λύση.

- 1η Περίπτωση: $\kappa \neq 1, -2$. Για να βρούμε τη μοναδική λύση, υπολογίζουμε:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & 1^{+} \\ 1^{-} & \kappa^{+} & 1^{-} \\ 1^{+} & 1^{-} & \kappa^{+} \end{vmatrix} \overset{\text{ως προς 1η Γραμμή}}{=} 1 \begin{vmatrix} \kappa & 1 \\ 1 & \kappa \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \kappa \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\kappa^2 - 1\right) - (\kappa - 1) + (1 - \kappa) = (\kappa - 1)^2 ,$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} \kappa^{+} & 1^{-} & 1^{+} \\ 1^{-} & 1^{+} & 1^{-} \\ 1^{+} & 1^{-} & \kappa^{+} \end{vmatrix} \overset{\text{ως προς 1η Γραμμή}}{=} \kappa \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \kappa \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \kappa \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \kappa (\kappa - 1) - (\kappa - 1) = (\kappa - 1)^2 ,$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} \kappa^{+} & 1^{-} & 1^{+} \\ 1^{-} & \kappa^{+} & 1^{-} \\ 1^{+} & 1^{-} & 1^{+} \end{vmatrix} \overset{\text{ως προς 1η Γραμμή}}{=} \kappa \begin{vmatrix} \kappa & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \kappa \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \kappa (\kappa - 1) + (1 - \kappa) = (\kappa - 1)^2 .$$

- Επομένως, η μοναδική λύση είναι

$$x = y = z = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{(\kappa - 1)^2}{(\kappa - 1)^2 (\kappa + 2)} = \frac{1}{\kappa + 2} \longrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa+2} \\ \frac{1}{\kappa+2} \\ \frac{1}{\kappa+2} \end{bmatrix} .$$

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \kappa y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \ \ y + \kappa z = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

- Περίπτωση 2: $\kappa = 1$. Στην περίπτωση αυτή, και οι τρεις εξισώσεις είναι ταυτιζόμενες:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \sim \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

δηλαδή το σύστημα εκφυλίζεται σε μία και μόνη εξίσωση $x + y + z = 1$ (επίπεδο, ώστε αναμένεται 2-παραμετρική απειρία λύσεων).

Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με όσα έχουμε πει, βασική μεταβλητή είναι μόνο η x (αντιστοιχεί στην 1η στήλη, την μόνη με οδηγό στοιχείο), ενώ y, z είναι ελεύθερες μεταβλητές.

Κανόνας Crammer: Παραμετρικό παράδειγμα (συνέχεια)

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \kappa y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \ \ y + \kappa z = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

- **Περίπτωση 3:** $\kappa = 1$. Στην περίπτωση αυτή, και οι τρεις εξισώσεις είναι ταυτιζόμενες:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \sim \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  δηλαδή το σύστημα εκφυλίζεται σε μία και μόνη εξίσωση $x + y + z = 1$ (επίπεδο, ώστε αναμένεται 2-παραμετρική απειρία λύσεων).

  Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, βασική μεταβλητή είναι μόνο η x (αντιστοιχεί στην 1η στήλη, την μόνη με οδηγό στοιχείο), ενώ y, z είναι ελεύθερες μεταβλητές.

  Η γενική λύση στην περίπτωση αυτή διαμορφώνεται από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου ως εξής:

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} * \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

  Φυσικά, απλούστερα θα μπορούσαμε να γράψουμε από τη μοναδική εξίσωση του συστήματος:

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Ασκήσεις προς λύση

1. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ x & 5 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & \zeta \end{vmatrix}.$$

3. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} \alpha & x & 2\alpha - x \\ \beta & y & 2\beta - y \\ \gamma & z & 2\gamma - z \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1+\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & 1+\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & 1+\gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & 1+\delta \end{vmatrix}.$$

4. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων (εφόσον υπάρχουν):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$