Σχολή Ναυτικών Δοκίμων
Γραμμική Άλγεβρα
Ασκήσεις Παραμετρικών Συστημάτων
Γ. Κατσουλέας
Δευτέρα 4/12/2023

Παράδειγμα 1ο.
Επιλύστε το ακόλουθο παραμετρικό σύστημα για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 1, \\
x + \alpha y + \alpha z &= \beta, \\
x + \alpha^2 y + 2\alpha z &= \alpha\beta.
\end{aligned}
$$

Λύση. Όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε τετραγωνικά παραμετρικά συστήματα (τόσες εξισώσεις όσες και οι άγνωστοι), η διερεύνηση διευκολύνεται με χρήση του κριτηρίου της ορίζουσας, προκειμένου να διαπιστώσουμε πότε ο πίνακας του συστήματος ($A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ εν προκειμένω) είναι αντιστρέψιμος (ακριβώς όταν $\det(A) \neq 0$). Στην περίπτωση αντιστρέψιμου πίνακα A, είναι βολικό να θεωρήσουμε τον κανόνα του Crammer για την ευκολότερη επίλυση του συστήματος και εύρεση της μοναδικής του λύσης. Ακολούθως, για τις περιπτώσεις στις οποίες δεν έχουμε αντιστρέψιμο πίνακα συντελεστών, προχωράμε κατάνάγκην με απαλοιφή Gauss για να διαπιστώσουμε αν το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει παραμετρική απειρία λύσεων και να προσδιορίσουμε το αντίστοιχο σύνολο λύσεων.

Έτσι, ξεκινάμε υπολογίζοντας την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & 2\alpha \end{vmatrix} \overset{\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha^2 & 2\alpha - \alpha^2 \end{vmatrix} \overset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha - 1 & 0 \\ 1 & \alpha^2 - 1 & \alpha(2-\alpha) \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (\alpha - 1) \cdot \alpha(2 - \alpha),
\end{aligned}
$$

αφού ο τελευταίος πίνακας είναι κάτω τριγωνικός και η ορίζουσά του δίνεται από το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.

Συνεπώς, ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος ακριβώς όταν:

$$|A| \neq 0 \qquad \iff \qquad \alpha \neq 0, 1, 2.$$

Περίπτωση 1η: $\alpha \neq 0, 1, 2$. Όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, στην περίπτωση αυτή ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος και το σύστημα έχει μοναδική λύση. Το διάνυσμα της μοναδικής λύσης δίνεται από τον κανόνα του Crammer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \frac{|A_3|}{|A|} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

όπου οι πίνακες A_1, A_2, A_3 στην τελευταία έκφραση προκύπτουν από τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος με εκ περιτροπής αντικατάσταση μίας στήλης του τη φορά με το διάνυσμα των σταθερών όρων του συστήματος $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \alpha\beta \end{bmatrix}$.

Έτσι, έχουμε

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha\beta & \alpha^2 & 2\alpha \end{vmatrix} \overset{\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \alpha\beta & \alpha^2 & 2\alpha - \alpha^2 \end{vmatrix} \overset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha - \beta & 0 \\ \alpha\beta & \alpha^2 - \alpha\beta & \alpha(2-\alpha) \end{vmatrix}$$
$$= (\alpha - \beta) \cdot \alpha (2 - \alpha),$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \\ 1 & \alpha\beta & 2\alpha \end{vmatrix} \overset{\substack{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1 \\ \Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \beta - 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha\beta - 1 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{ανάπτυγμα ως} \\ \text{προς 1η γραμμή}}}{=} \begin{vmatrix} \beta - 1 & \alpha - 1 \\ \alpha\beta - 1 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix}$$
$$= (\beta - 1) \cdot (2\alpha - 1) - (\alpha - 1) \cdot (\alpha\beta - 1)$$
$$= 2\alpha\beta - \beta - 2\alpha + 1 - \left(\alpha^2\beta - \alpha - \alpha\beta + 1\right)$$
$$= 3\alpha\beta - \beta - \alpha - \alpha^2\beta,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & \alpha\beta \end{vmatrix} \overset{\substack{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1 \\ \Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha - 1 & \beta - 1 \\ 1 & \alpha^2 - 1 & \alpha\beta - 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{κοινός παράγοντας} \\ \text{από 2η στήλη}}}{=} (\alpha - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \beta - 1 \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha\beta - 1 \end{vmatrix}$$
$$\overset{\substack{\text{ανάπτυγμα ως} \\ \text{προς 1η γραμμή}}}{=} (\alpha - 1) \begin{vmatrix} 1 & \beta - 1 \\ \alpha + 1 & \alpha\beta - 1 \end{vmatrix} = (\alpha - 1) \cdot [(\alpha\beta - 1) - (\beta - 1) \cdot (\alpha + 1)]$$
$$= (\alpha - 1) \cdot [\alpha\beta - 1 - (\beta\alpha + \beta - \alpha - 1)]$$
$$= (\alpha - 1) \cdot (\alpha - \beta).$$

Τελικά, η (1) δίνει τη μοναδική λύση:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \frac{|A_3|}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\alpha-\beta)\cdot\alpha(2-\alpha)}{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(2-\alpha)} \\ \frac{3\alpha\beta-\beta-\alpha-\alpha^2\beta}{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(2-\alpha)} \\ \frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-\beta)}{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(2-\alpha)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\alpha-\beta)}{(\alpha-1)} \\ \frac{3\alpha\beta-\beta-\alpha-\alpha^2\beta}{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(2-\alpha)} \\ \frac{(\alpha-\beta)}{\alpha\cdot(2-\alpha)} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Οι περιπτώσεις που εξαιρέθηκαν από την προηγούμενη ανάλυση, πρέπει να αντιμετωπιστούν ξεχωριστά με την μέθοδο της απαλοιφής.

Περίπτωση 2η: $\alpha = 0$. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα λαμβάνει την ειδικότερη μορφή:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x &= \beta, \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Σχηματίζουμε τον αντίστοιχο επαυξημένο και προχωράμε με γραμμοπράξεις:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \beta - 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \beta - 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{array}\right). \tag{3}$$

Κριτήριο προκειμένου να είναι συμβιβαστό το σύστημα (3) είναι η συνθήκη

$$\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A). \tag{4}$$

Έτσι, διακρίνουμε επιπλέον στις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 2α: $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή, για το (3) έχουμε

$$\operatorname{rank}(A|b) = 3 \qquad \text{και} \qquad \operatorname{rank}(A) = 2,$$

ώστε το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό (δηλ. είναι αδύνατο-δεν έχει λύση), βάσει της συνθήκης (4). Ισοδύναμα και απλούστερα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η τελευταία εξίσωση του κλιμακωτού συστήματος στην (3) είναι η $0 = -\beta\,(\neq 0)$, η οποία δε μπορεί να ικανοποιηθεί για οποιαδήποτε τιμή των αγνώστων.

Περίπτωση 2β: $\alpha = \beta = 0$. Στην περίπτωση αυτή, το κλιμακωτό σύστημα (3) λαμβάνει την μορφή:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \beta - 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{array}\right) \overset{\beta=0}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{5}$$

Το κλιμακωτό σύστημα (5) είναι συμβιβαστό (έχει λύσεις), βάσει της συνθήκης (4), καθώς

$$\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A) = 2.$$

Συνεχίζουμε να εργαζόμαστε πάνω στο σύστημα (5), προκειμένου να το τρέψουμε στην απλούστερη δυνατή (ανηγμένη κλιμακωτή μορφή):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \to -\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Το τελευταίο σύστημα (σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή) γράφεται $\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 1 \end{cases}$. Ελεύθερη μεταβλητή είναι εκείνη στην στήλη της οποίας δεν εμφανίστηκε οδηγό στοιχείο (δηλ., η z), οπότε εκφράζουμε τις υπόλοιπες σε σχέση με αυτήν (έχουμε μονοπαραμετρική απειρία λύσεων):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Σημειώνουμε ότι η ίδια λύση μπορούσε να έχει γραφεί και κατέυθείαν, παρατηρώντας την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{7}$$

διαπιστώνοντας ότι x, y βασικές μεταβλητές (αντιστοιχούν σε στήλες που εμφανίστηκαν οδηγά στοιχεία), z ελεύθερη μεταβλητή (αντιστοιχεί σε στήλη χωρίς οδηγό στοιχείο) και θεωρώντας την γενική μορφή της λύσης

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} * \\ * \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R},$$

όπου στο 1ο σταθερό διάνυσμα της λύσης όλες οι ελεύθερες μεταβλητές τίθενται ίσες με μηδέν, ενώ στη συνέχεια για κάθε ελεύθερη μεταβλητή μεταβλητή (εν προκειμένω, μόνο μία-η z) θεωρούμε ένα ακόμα διάνυσμα στο οποίο μία από αυτές τίθεται ίση με 1 και οι υπόλοιπες (εκ περιτροπής) ίσες με 0. Η γενική αυτή μορφή συμπληρώνεται από τα στοιχεία της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής, συμπληρώνοντας τους σταθερούς όρους των μη μηδενικών γραμμών της (7) (μπλε στοιχεία) στις αντίστοιχες θέσεις του σταθερού διανύσματος της λύσης. Επίσης, οι υπόλοιπες θέσεις του διανύσματος που πολλαπλασιάζει η ελεύθερη μεταβλητή z συμπληρώνονται από τους αντιθέτους των συντελεστών της μεταβλητής αυτής που παρατηρούνται στις μη μηδενικές γραμμές της (7) (πράσινα στοιχεία):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η λύση που παρατηρήθηκε και ανωτέρω στην (6).

Περίπτωση 3η: $\alpha = 1$. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα λαμβάνει την ειδικότερη μορφή:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= \beta, \\ x + y + 2z &= \beta. \end{aligned}$$

Σχηματίζουμε τον αντίστοιχο επαυξημένο και προχωράμε με γραμμοπράξεις:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 2 & \beta \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta - 1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 1 \end{array}\right). \tag{8}$$

Περίπτωση 3α: $\alpha = 1, \beta \neq 1$. Στο σύστημα (8) έχουμε

$$\operatorname{rank}(A|b) = 3 \qquad \text{και} \qquad \operatorname{rank}(A) = 2,$$

ώστε το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό, βάσει της συνθήκης (4).

Περίπτωση 3β: $\alpha = \beta = 1$. Στην περίπτωση αυτή, το κλιμακωτό σύστημα (8) λαμβάνει την μορφή:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 1 \end{array}\right) \overset{\beta=1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{9}$$

Το κλιμακωτό σύστημα (9) είναι συμβιβαστό, βάσει της συνθήκης (4), καθώς

$$\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A) = 2.$$

Συνεχίζουμε να εργαζόμαστε πάνω στο σύστημα (9), προκειμένου να το τρέψουμε στην απλούστερη δυνατή (ανηγμένη κλιμακωτή μορφή):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{10}$$

Δηλαδή, έχουμε y ελεύθερη μεταβλητή (καθώς αντιστοιχεί στην 2η στήλη, η οποία δεν εμφάνισε οδηγό στοιχείο) και θεωρούμε τη μορφή της λύσης (μονοπαραμετρική απειρία λύσεων):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} * \\ 1 \\ * \end{bmatrix}, \quad y \in \mathbb{R},$$

η οποία συμπληρώνεται βάσει της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής (10) ως εξής:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Εναλλακτικά, το ανηγμένο κλιμακωτό σύστημα γράφεται $\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ ώστε καταλήγουμε και πάλι στην ίδια λύση:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Περίπτωση 4η: $\alpha = 2$. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα λαμβάνει την ειδικότερη μορφή:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + 2y + 2z &= \beta, \\ x + 4y + 4z &= 2\beta. \end{aligned}$$

Σχηματίζουμε τον αντίστοιχο επαυξημένο και προχωράμε με γραμμοπράξεις:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \beta \\ 1 & 4 & 4 & 2\beta \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta - 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2\beta - 1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \beta \end{array}\right). \tag{11}$$

Περίπτωση 4α: $\alpha = 2, \beta \neq 2$. Στο σύστημα (11) έχουμε

$$\operatorname{rank}(A|b) = 3 \qquad \text{και} \qquad \operatorname{rank}(A) = 2,$$

ώστε το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό, βάσει της συνθήκης (4).

Περίπτωση 4β: $\alpha = \beta = 2$. Στην περίπτωση αυτή, το κλιμακωτό σύστημα (8) λαμβάνει την μορφή:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\beta \end{array}\right) \overset{\beta=2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{12}$$

Το κλιμακωτό σύστημα (12) είναι συμβιβαστό, βάσει της συνθήκης (4), καθώς

$$\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A) = 2.$$

Συνεχίζουμε να εργαζόμαστε πάνω στο σύστημα (12), προκειμένου να το τρέψουμε στην απλούστερη δυνατή (ανηγμένη κλιμακωτή μορφή):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{13}$$

Δηλαδή, έχουμε z ελεύθερη μεταβλητή (καθώς αντιστοιχεί στην 3η στήλη, η οποία δεν εμφάνισε οδηγό στοιχείο) και θεωρούμε τη μορφή της λύσης (μονοπαραμετρική απειρία λύσεων):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} * \\ * \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R},$$

η οποία συμπληρώνεται βάσει της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής (12) ως εξής:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Εναλλακτικά, θα μπρούσαμε να καταλήξουμε στην ίδια λύση γράφοντας από την (12) αναλυτικά το αντίστοιχο ανηγμένο κλιμακωτό σύστημα $\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 1. \end{cases}$

Έτσι, ολοκληρώνεται η διαδικασία της διερεύνησης του συγκεκριμένου συστήματος.

Σημειώνουμε ότι η διερεύνηση θα μπορούσε να έχει γίνει εναλλακτικά και με αποκλειστική χρήση της μεθόδου απαλοιφής Gauss, αλλά είναι περισσότερο περίπλοκη και δεν συνίσταται. Για λόγους πληρότητας (αλλά και για επανάληψη στην συγκεκριμένη μέθοδο) παρουσιάζουμε ακολούθως την αντίστοιχη διαδικασία.

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + \alpha y + \alpha z &= \beta, \\ x + \alpha^2 y + 2\alpha z &= \alpha\beta. \end{aligned}$$

γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & 2\alpha & \alpha\beta \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & \beta-1 \\ 0 & \alpha^2-1 & 2\alpha-1 & \alpha\beta-1 \end{array}\right).$$

Στο σημείο αυτό, αναγκαζόμαστε να σταματήσουμε παροδικά τη διαδικασία, δεδομένου ότι δε μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι στη δεύτερη στήλη εμφανίζεται οδηγό στοιχείο (τόσο το στοιχείο $\alpha - 1$ στη θέση $(2,2)$, όσο και εκείνο $(\alpha^2 - 1)$ στη θέση $(3,2)$ του πίνακα ενδέχεται να είναι μηδενικά). Συνεπώς, διακρίνουμε σε περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\alpha \neq 1$. Στην περίπτωση αυτή, το στοιχείο στη θέση $(2,2)$ αποτελεί οδηγό και συνεχίζουμε τη διαδικασία τροπής σε κλιμακωτή μορφή:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & \beta-1 \\ 0 & \alpha^2-1 & 2\alpha-1 & \alpha\beta-1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3-(\alpha+1)\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha\,(2-\alpha) & \alpha-\beta \end{array}\right) \tag{14}$$

Και πάλι, στο σημείο αυτό, δε μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι η 3η στήλη εμφανίζει οδηγό στοιχείο, δεδομένης της παραμετρικής μορφής του στοιχείου $(3,3)$.

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι και με την παρούσα μέθοδο, παρατηρούμε ότι ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος όταν εμφανίζει οδηγά στοιχεία σε κάθε γραμμή και στήλη, δηλαδή ακριβώς όταν $\alpha =\neq 0,1,2$. Συνεπώς, καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με τη χρήση του εργαλείου της ορίζουσας. Θυμηθείτε, εξάλλου, ότι η ορίζουσα (σε απόλυτη τιμή, εφόσον έχουν κατά τη διαδικασία της απαλοιφής γίνει αντιμεταθέσεις γραμμών) ισούται με το γινόμενο των οδηγών στοιχείων. Στην περίπτωση αυτή, καθώς δεν έχουν εφαρμοστεί καθόλου αντιμεταθέσεις γραμμών, συμπεραίνουμε και πάλι ότι

$$|A| = \alpha\,(2-\alpha)\,(\alpha-1)\,.$$

Συνεχίζουμε, διακρίνοντας τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1α: $\alpha = 0$. Η (14) γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha\,(2-\alpha) & \alpha-\beta \end{array}\right) \overset{\alpha=0}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{array}\right).$$

Περίπτωση 1α.i: $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Το σύστημα είναι αδύνατο.

Περίπτωση 1α.ii: $\alpha = \beta = 0$. Το σύστημα γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{array}\right) \overset{\alpha=0}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1+\Gamma_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \to -\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

απ'όπου προκύπτει (όπως προηγουμένως) η μονοπαραμετρική απειρία λύσεων

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Περίπτωση 1β.i: $\alpha = 2$. Η (14) γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha\,(2-\alpha) & \alpha-\beta \end{array}\right) \overset{\alpha=2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\beta \end{array}\right).$$

Περίπτωση 1β.i: $\alpha = 2, \beta \neq 2$. Το σύστημα είναι αδύνατο.

Περίπτωση 1β.ii: $\alpha = \beta = 2$. Το σύστημα γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\beta \end{array}\right) \overset{\beta=2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

απ'όπου προκύπτει και πάλι η ίδια μονοπαραμετρική απειρία λύσεων

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Περίπτωση 2η: $\alpha \neq 0,1,2$. Η (14) γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & \beta-1\\ 0 & 0 & \alpha\,(2-\alpha) & \alpha-\beta\end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2\to\frac{1}{\alpha-1}\Gamma_2\\ \Gamma_3\to\frac{1}{\alpha(2-\alpha)}\Gamma_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & \frac{\beta-1}{\alpha-1}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha-\beta}{\alpha(2-\alpha)}\end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_3\\ \Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1-\frac{\beta-1}{\alpha-1}\\ 0 & 1 & 1 & \frac{3\alpha\beta-\alpha-\beta-\beta\alpha^2}{\alpha(2-\alpha)(\alpha-1)}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha-\beta}{\alpha(2-\alpha)}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & \frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}\\ 0 & 1 & 1 & \frac{3\alpha\beta-\alpha-\beta-\beta\alpha^2}{\alpha(2-\alpha)(\alpha-1)}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha-\beta}{\alpha(2-\alpha)}\end{array}\right),$$

δηλαδή ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος (προέκυψαν 3 οδηγά στοιχεία, όσα και η διάσταση του πίνακα) και έχουμε τη μοναδική λύση

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}\\ \frac{3\alpha\beta-\alpha-\beta-\beta\alpha^2}{\alpha(2-\alpha)(\alpha-1)}\\ \frac{\alpha-\beta}{\alpha(2-\alpha)}\end{bmatrix}.$$

Περίπτωση 3η: $\alpha = 1$. Η (14) γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & \beta-1\\ 0 & 0 & \alpha\,(2-\alpha) & \alpha-\beta\end{array}\right) \overset{\alpha=1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \beta-1\\ 0 & 0 & 1 & 1-\beta\end{array}\right) \overset{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1-\beta\\ 0 & 0 & 0 & \beta-1\end{array}\right). \tag{15}$$

Περίπτωση 3α: $\alpha = 1, \beta \neq 1$. Το σύστημα αδύνατο.
Περίπτωση 3η: $\alpha = \beta = 1$. Η (15) εξειδικεύεται ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1-\beta\\ 0 & 0 & 0 & \beta-1\end{array}\right) \overset{\beta=1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

ώστε έχουμε μονοπαραμετρική απειρία λύσεων

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 2ο.
Επιλύστε το ακόλουθο παραμετρικό σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x+y+\kappa z &= 2, \\ 3x+4y+2z &= \kappa, \\ 2x+3y-z &= 1. \end{aligned}$$

Λύση. Ξεκινάμε τη διερεύνηση, υπολογίζοντας την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} &\overset{\substack{\text{ανάπτυγμα} \\ \text{ως προς } \Gamma_1}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \kappa \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-4-6) - (-3-4) + \kappa(9-8) = \kappa - 3. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος ακριβώς όταν:

$$|A| \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \kappa \neq 3.$$

Περίπτωση 1η: $\kappa \neq 3$. Ό πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος και το σύστημα έχει μοναδική λύση. Το διάνυσμα της μοναδικής λύσης δίνεται από τον κανόνα του Crammer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \frac{|A_3|}{|A|} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

όπου οι πίνακες A_1, A_2, A_3 στην τελευταία έκφραση προκύπτουν από τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος με εκ περιτροπής αντικατάσταση μίας στήλης του τη φορά με το διάνυσμα των σταθερών όρων του συστήματος $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ \kappa \\ 1 \end{bmatrix}$.

Έτσι, έχουμε

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \kappa \\ \kappa & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{ανάπτυγμα} \\ \text{ως προς } \Gamma_1}}{=} 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \kappa & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \kappa \begin{vmatrix} \kappa & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(-4-6) - (-\kappa-2) + \kappa(3-2\kappa) = 3(\kappa-3)(\kappa+2).$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \kappa \\ 3 & \kappa & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{ανάπτυγμα} \\ \text{ως προς } \Gamma_1}}{=} \begin{vmatrix} \kappa & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \kappa \begin{vmatrix} 3 & \kappa \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-\kappa-2) - 2(-3-4) + \kappa(3-2\kappa) = -2(\kappa-3)(\kappa+2).$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \kappa \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{ανάπτυγμα} \\ \text{ως προς } \Gamma_1}}{=} \begin{vmatrix} 4 & \kappa \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & \kappa \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4-3\kappa) - (3-2\kappa) + 2(9-8) = -(\kappa-3).$$

Τελικά, η (16) δίνει τη μοναδική λύση:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \frac{|A_3|}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(\kappa-3)(\kappa+2)}{\kappa-3} \\ \frac{-2(\kappa-3)(\kappa+2)}{\kappa-3} \\ \frac{-(\kappa-3)}{\kappa-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\kappa+2) \\ -2(\kappa+2) \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Η περίπτωση που εξαιρέθηκε από την προηγούμενη ανάλυση, πρέπει να αντιμετωπιστεί ξεχωριστά με την μέθοδο της απαλοιφής.

Περίπτωση 2η: $\kappa = 3$. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα λαμβάνει την ειδικότερη μορφή:

$$\begin{aligned} x+y+3z &= 2, \\ 3x+4y+2z &= 3, \\ 2x+3y-z &= 1. \end{aligned}$$

Σχηματίζουμε τον αντίστοιχο επαυξημένο και προχωράμε με γραμμοπράξεις:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -1 & 1\end{array}\right)\underset{\sim}{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-3\Gamma_1\\ \Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -7 & -3\\ 0 & 1 & -7 & -3\end{array}\right)\overset{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -7 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 10 & 5\\ 0 & 1 & -7 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Το τελευταίο σύστημα είναι στην απλούστερη δυνατή (ανηγμένη κλιμακωτή μορφή), οπότε η λύση (μονοπαραμετρική απειρία λύσεων) γράφεται (ελεύθερη μεταβλητή η z στην στήλη της οποίας δεν εμφανίστηκε οδηγό στοιχείο):

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-10z\\ -3-+7z\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -3\\ 0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-10\\ 7\\ 1\end{bmatrix},\quad z\in\mathbb{R}. \tag{18}$$

Έτσι, ολοκληρώνεται η διαδικασία της διερεύνησης του συγκεκριμένου συστήματος.

Σημειώνουμε ότι η διερεύνηση θα μπορούσε να έχει γίνει εναλλακτικά και με αποκλειστική χρήση της μεθόδου απαλοιφής Gauss:

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\begin{aligned}x+y+\kappa z&=2,\\ 3x+4y+2z&=\kappa,\\ 2x+3y-z&=1.\end{aligned}$$

γράφεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \kappa & 2\\ 3 & 4 & 2 & \kappa\\ 2 & 3 & -1 & 1\end{array}\right)\underset{\sim}{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-3\Gamma_1\\ \Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \kappa & 2\\ 0 & 1 & 2-3\kappa & \kappa-6\\ 0 & 1 & -1-2\kappa & -3\end{array}\right)\underset{\sim}{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \kappa & 2\\ 0 & 1 & -1-2\kappa & -3\\ 0 & 1 & 2-3\kappa & \kappa-6\end{array}\right)$$
$$\underset{\sim}{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \kappa & 2\\ 0 & 1 & -1-2\kappa & -3\\ 0 & 0 & 3-\kappa & \kappa-3\end{array}\right).$$

Στο σημείο αυτό, αναγκαζόμαστε να σταματήσουμε παροδικά τη διαδικασία, δεδομένου ότι δε μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι στην 3η στήλη εμφανίζεται οδηγό στοιχείο. Σημειώνουμε ότι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων στην τελευταία κλιμακωτή μορφή δίνει τον αντίθετο της ορίζουσας $|A|$ (έχει πραγματοποιηθεί μία και μόνο εναλλαγή γραμμών). Συνεπώς, διακρίνουμε σε περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\kappa\neq 3$. Στην περίπτωση αυτή, το στοιχείο στη θέση $(3,3)$ αποτελεί οδηγό και συνεχίζουμε τη διαδικασία τροπής σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \kappa & 2\\ 0 & 1 & -1-2\kappa & -3\\ 0 & 0 & 3-\kappa & \kappa-3\end{array}\right)\overset{\Gamma_3\to\frac{1}{\kappa-3}\Gamma_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \kappa & 2\\ 0 & 1 & -1-2\kappa & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\underset{\sim}{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2+(1+2\kappa)\Gamma_3\\ \Gamma_1\to\Gamma_1-\kappa\Gamma_3}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 2+\kappa\\ 0 & 1 & 0 & -2\kappa-4\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)$$
$$\underset{\sim}{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\kappa+6\\ 0 & 1 & 0 & -2\kappa-4\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right),$$

απ΄όπου και πάλι προκύπτει η ίδια μοναδική λύση του συστήματος που προσδιορίστηκε και προηγουμένως στην (17). Η περίπτωση μη αντιστρέψιμου πίνακα συστήματος για $\kappa=3$ έχει ήδη παρουσιαστεί.

Σημειώνουμε ότι η επίλυση του συστήματος στην περίπτωση που έχουμε αντιστρέψιμο πίνακα συστήματος (όταν $\kappa\neq 3$) θα μπορούσε να έχει γίνει εναλλακτικά και με τη λεγόμενη μέθοδο του αντιστρόφου (η οποία δεν συστήνεται, εφόσον ο αντίστροφος δεν έχει ήδη ζητηθεί, διότι ο υπολογισμός του αντιστρόφου είναι υπολογιστικά δαπανηρή διαδικασία). Χάριν πληρότητας, ο αντίστροφος του A (όταν $\kappa\neq 3$) παρουσιάζεται ακολούθως:

Ο σχετικός τύπος του Crammer δίνει:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A),$$

όπου $adj(A)$ ο προσαρτημένος (ή συμπληρωματικός) πίνακας του συστήματος είναι ο ανάστροφος του πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχείων του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, δηλαδή:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \kappa \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & \kappa \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & \kappa \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \kappa \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1+3\kappa & 2-4\kappa \\ 7 & -1-2\kappa & -2+3\kappa \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι επείδη είναι πολύ εύκολο να γίνουν λάθη στον υπολογισμό του συμπληρωματικού πίνακα, καλό είναι πάντα να γίνεται η επαλήθευση, δηλαδή να ελέγχεται ότι το γινόμενο του πίνακα A επί τον συμπληρωματικό $Aadj(A)$ δίνει το βαθμωτό πολλπλάσιο $|A|\, I_n$ του μοναδιαίου πίνακα αντίστοιχης τάξης:

$$Aadj(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 1+3\kappa & 2-4\kappa \\ 7 & -1-2\kappa & -2+3\kappa \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa-3 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa-3 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa-3 \end{bmatrix} = (\kappa-3)\, I_3 = |A|\, I_3.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{\kappa-3} \begin{bmatrix} -10 & 1+3\kappa & 2-4\kappa \\ 7 & -1-2\kappa & -2+3\kappa \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπενθυμίζοντας ότι το δοσμένο σύστημα γράφεται ισοδύναμα στην μορφή $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ο πίνακας συντελεστών του συστήματος, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ το διάνυσμα των αγνώστων (σε μορφή πίνακα-στήλης) και $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ \kappa \\ 1 \end{bmatrix}$ το διάνυσμα των σταθερών όρων, έχουμε

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \overset{A^{-1}\cdot}{\Leftrightarrow} A^{-1} \cdot A\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow I_3\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b},$$

δηλαδή για την εύρεση των αγνώστων αρκεί πλέον απλώς ο πολλαπλασιασμός πινάκων

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} &= \frac{1}{\kappa-3} \begin{bmatrix} -10 & 1+3\kappa & 2-4\kappa \\ 7 & -1-2\kappa & -2+3\kappa \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \kappa \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa-3} \begin{bmatrix} -20+(1+3\kappa)\kappa+(2-4\kappa) \\ 14+(-1-2\kappa)\kappa+(-2+3\kappa) \\ 2-\kappa+1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\kappa-3} \begin{bmatrix} -20+(1+3\kappa)\kappa+(2-4\kappa) \\ 14+(-1-2\kappa)\kappa+(-2+3\kappa) \\ 2-\kappa+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa-3} \begin{bmatrix} 3(\kappa^2-\kappa-6) \\ -2(\kappa^2-\kappa-6) \\ 3-\kappa \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\kappa-3} \begin{bmatrix} 3(\kappa-3)(\kappa+2) \\ -2(\kappa-3)(\kappa+2) \\ 3-\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\kappa+2) \\ -2(\kappa+2) \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\kappa+6 \\ -2\kappa-4 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

δηλαδή η ίδια μοναδική λύση που υπολογίστηκε στην εν λόγω περίπτωση και προηγουμένως.

Παράδειγμα 3ο. Επιλύστε το ακόλουθο παραμετρικό σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1, \\ x + \alpha y + 3z &= 2, \\ 2x + 3y + \alpha z &= 3. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4ο. Επιλύστε το ακόλουθο παραμετρικό σύστημα για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= \alpha, \\ x - 2y + z &= \beta, \\ x + y - \alpha z &= -1. \end{aligned}$$