Πιθανότητες – Εισαγωγή

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Πιθανότητες

Σε αυτό το μάθημα θα ασχοληθούμε με:

- Τα πειράματα τύχης
- Τους χώρους των πιθανοτήτων
- Τον υπολογισμό πιθανοτήτων
- Τον υπολογισμό πιθανοτήτων στο excel

Τυχαίο Πείραμα v.s Ντετερμινιστικό Πείραμα

Πολλά φαινόμενα έχουν την ιδιότητα η επανειλλημένη παρατήρησή τους κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες να οδηγεί πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, αν αφήνουμε μια μπάλα που ήταν αρχικά ακίνητη να πέσει από ύψος d μέτρων μέσα σε έναν κύλινδρο χωρίς αέρα, θα φτάνει στο έδαφος πάντα μετά από

$t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$ δευτερόλεπτα, όπου το g είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας σε m/s^2.

Αυτά ανήκουν στα λεγόμενα **αιτιοκρατικά ή ντετερμινιστικά φαινόμενα**.

Τυχαίο Πείραμα v.s Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Υπάρχουν όμως άλλα φαινόμενα, των οποίων η επανειλλημένη παρατήρηση κάτω από τις ίδιες συνθήκες δεν οδηγεί πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα.
- Λόγου χάρη, αν ρίξουμε ένα νόμισμα 1000 φορές, οι εμφανίσεις γραμμάτων (Γ) ή κεφαλής (Κ) εναλλάσσονται με έναν φαινομενικά ακανόνιστο και απρόβλεπτο τρόπο.
- Τέτοιου είδους φαινόμενα τα θεωρούμε ως **τυχαία**, και ένα πείραμα όπως αυτό που μόλις περιγράφτηκε το ονομάζουμε **πείραμα τύχης.**

Τυχαίο Πείραμα v.s Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Τα πειράματα τύχης, ή αλλιώς τυχαία πειράματα, είναι λοιπόν εκείνα για τα οποία η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελούνται απλά καθορίζει ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων για το κάθε πείραμα.
- ΄Ενα πιό απλό παράδειγμα είναι η ϱίψη ενός νομίσματος. Αν και δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, γνωρίζουμε ότι ϑα είναι Κ ή Γ, ϑα ανήκει δηλαδή στο σύνολο $\{\mathrm{K}, \Gamma\}$.

Παραδείγματα

Άλλα παραδείγματα πειραμάτων τύχης είναι

- Η ρίψη ενός ζαριού
- Το τράβηγμα ενός χαρτιού από μιά συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά
- Η καταγραφή της διάρκειας ζωής μιάς μπαταρίας ή ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα
- Η καταγραφή των υψών των ατόμων ενός δοθέντος πληθυσμού
- Η επιλογή ενός ϐόλου από ένα δοχείο το οποίο περιέχει s ϐόλους, οι οποίοι φέρουν τους αριθμούς 1,2,...,s, αλλά είναι όμοιοι κατά τα άλλα

Δειγματικός Χώρος

- Είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.
- Συμβολισμοί: Ω, S

Π.χ. Για τη ρίψη του ενός ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6.

Δειγματικός Χώρος

Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης μπορεί να έχει

- **Πεπερασμένο πλήθος στοιχείων** (π.χ. αποτελέσματα ρίψης ζαριού) ή
- **Άπειρο πλήθος στοιχείων** (π.χ. αριθμός προσπαθειών να πετύχεις ένα στόχο)

Δειγματικός Χώρος – Παραδείγματα

- Αν θεωρήσουμε το πείραμα της παρατήρησης του αποτελέσματος που θα φέρει η ρίψη ενός ζαριού, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Δειγματικός Χώρος – Παραδείγματα

- Αν θεωρήσουμε το πείραμα της παρατήρησης του αποτελέσματος που θα φέρει η ρίψη δύο ζαριών, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{(x, y) : x = 1, \ldots, 6,\ y = 1, \ldots, 6\}$$

		2ο ζάρι					
		1	2	3	4	5	6
1ο ζάρι	1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
	2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
	3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
	4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
	5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
	6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Ενδεχόμενα

- Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.
- Συμβολισμός: $A, B, \ldots$

Ισχύει δηλαδή $\emptyset \subseteq \mathrm{A} \subseteq \Omega$ για κάθε ενδεχόμενο Α.

Όπου το $\emptyset$ ή $\{\quad\}$ ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο ενώ

ο δειγματικός χώρος Ω ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο.

- Τα ενδεχόμενα που αποτελούνται από μόνο στοιχείο του δειγματικού χώρου Ω, δηλαδή είναι της μορφής $\mathrm{A} = \{\omega\}$ λέγονται στοιχειώδη ενδεχόμενα.

Ενδεχόμενα – Παραδείγματα

Έστω το πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού.

Δειγματικός χώρος πειράματος: Ω= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Τα παρακάτω σύνολα αποτελούν ενδεχόμενα του τυχαίου πειράματος.

- E_1 ={Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι άρτιος αριθμός} = $\{2, 4, 6\}$.
- E_2={Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι τέσσερα}=$\{ 4\}$.
- E_3 ={Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι περιττός αριθμός}= $\{1, 3, 5\}$.
- E_4 ={Το αποτέλεσμα του ζαριού αριθμός μικρότερος του 3}= $\{1, 2\}$.
- E_5= {Το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο του τέσσερα} = $\{5, 6\}$

Ενδεχόμενα – Παραδείγματα

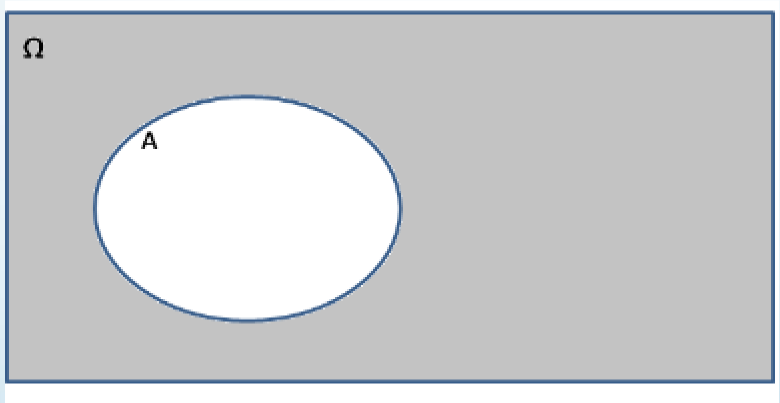
<u>Παρατήρηση:</u> Ένα ενδεχόμενο Ε εμφανίζεται σε μια πραγματοποίηση ενός πειράματος (δοκιμή) όταν το αποτέλεσμα ω της δοκιμής ανήκει στο ενδεχόμενο E, δηλαδή $\omega \in \mathrm{E}$.

Π.χ Αν το αποτέλεσμα του ζαριού είναι $\omega = 4$, τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα E_1, E_2 πραγματοποιήθηκαν, ενώ τα ενδεχόμενα E_3, E_4, E_5 δεν πραγματοποιήθηκαν.

Συμβολικά: $\omega \in \mathrm{E}_1$, $\omega \in \mathrm{E}_2, \omega \notin \mathrm{E}_3$, $\omega \notin \mathrm{E}_4$, $\omega \notin \mathrm{E}_5$.

Γραφική αναπαράσταση ενδεχομένων

Η γραφική Αναπαράσταση ενδεχομένων γίνεται με τα διαγράμματα Venn

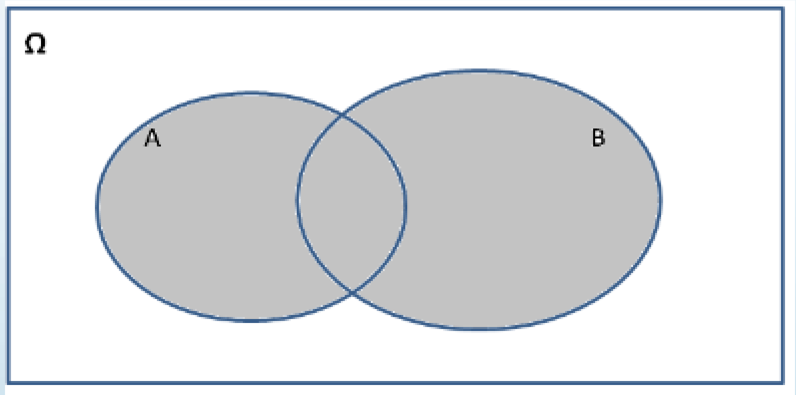


Πράξεις με Ενδεχόμενα

- **Ένωση** δύο ενδεχομένων A, B ενός δειγματικού χώρου Ω, είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B.

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\omega \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Leftrightarrow \omega \in \mathrm{A} \text{ ή } \omega \in \mathrm{B}$$

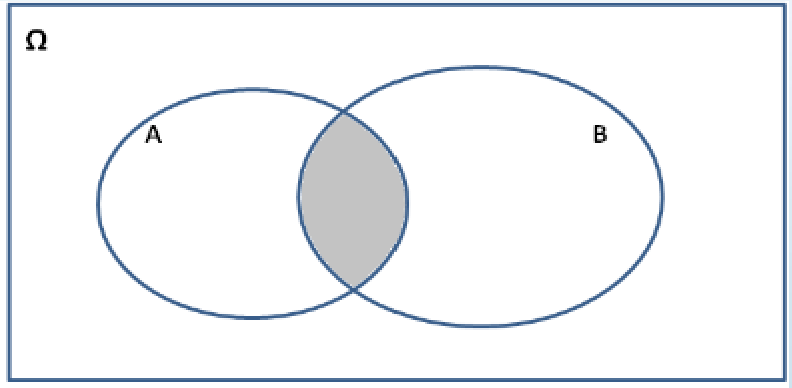


Πράξεις με Ενδεχόμενα

- **Τομή** δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω, είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ το οποίο αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των ενδεχομένων A και B.

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\omega \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \Leftrightarrow \omega \in \mathrm{A} \text{ και } \omega \in \mathrm{B}$$

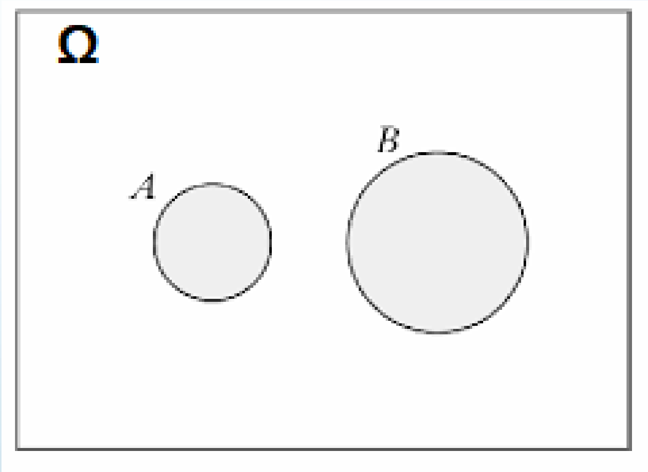


Πράξεις με Ενδεχόμενα

Αν δύο ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά στοιχεία, ισχύει δηλαδή ότι

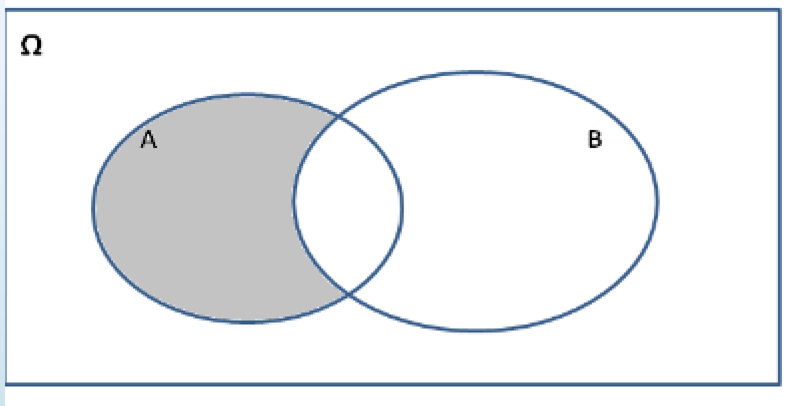
$A \cap B = \emptyset$

Τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα.



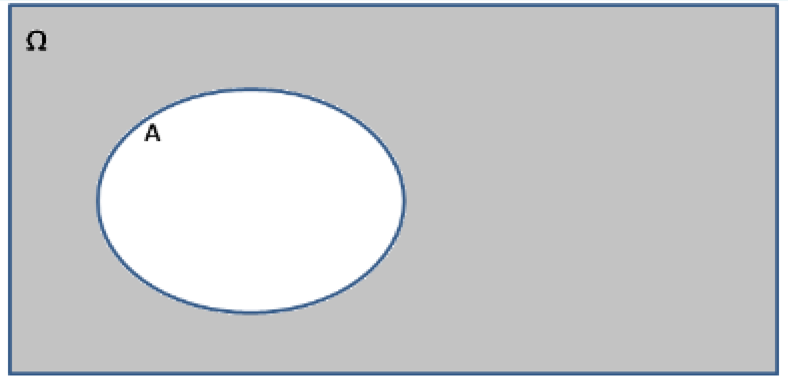
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Διαφορά δύο ενδεχομένων Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω, είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = \mathrm{A} - \mathrm{B}$ και περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που περιέχονται στο Α και δεν περιέχονται στο Β.



Πράξεις με Ενδεχόμενα

Συμπλήρωμα του ενδεχομένου A ενός δειγματικού χώρου Ω, είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = \mathrm{A}'$ ή $\Gamma = \mathrm{A}^c$ που περιλαμβάνει τα αποτελέσματα του δειγματικού χώρου Ω που δεν περιέχονται στο A.



Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:

Ρίχνουμε ένα «άμερόληπτο» νόμισμα δύο φορές. Εδώ ο δειγματικός χώρος (το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων) είναι

$$\Omega = \{\text{ΚΚ}, \text{ΚΓ}, \text{ΓΚ}, \text{ΓΓ}\}$$

Έστω A το ενδεχόμενο να έρθει Κ την πρώτη φορά και

B το ενδεχόμενο να έρθει το ίδιο αποτέλεσμα και τις δύο φορές.

Δηλαδή:

$$\text{A} = \{\text{ΚΚ}, \text{ΚΓ}\}$$

$$\text{B} = \{\text{ΚΚ}, \text{ΓΓ}\}$$

Παραδείγματα

Έχουμε επίσης ότι

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{K\Gamma}, \Gamma\Gamma\}$$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\mathrm{KK}\}$$

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{\mathrm{K\Gamma}\}$$

$$\mathrm{B} - \mathrm{A} = \{\Gamma\Gamma\}$$

$$\mathrm{A}^c = \{\Gamma\mathrm{K}, \Gamma\Gamma\}$$

$$\mathrm{B}^c = \{\mathrm{K\Gamma}, \Gamma\mathrm{K}\}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2:

Έστω τα ενδεχόμενα της ρίψης ενός ζαριού

- E_1 ={Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι άρτιος αριθμός} = $\{2, 4, 6\}$.
- E_2={Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι τέσσερα}=$\{4\}$.
- E_3 ={Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι περιττός αριθμός}= $\{1, 3, 5\}$.
- E_4 ={Το αποτέλεσμα του ζαριού αριθμός μικρότερος του 3}= $\{1, 2\}$.
- E_5= {Το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο του τέσσερα = $\{5, 6\}$

Παραδείγματα

- Το ενδεχόμενο να έχουμε αποτέλεσμα 4 ή αριθμό μικρότερο του 3 είναι το ενδεχόμενο

$$E_2 \cup E_4 = \{1,2,4\}$$

- Το ενδεχόμενο να έχουμε αποτέλεσμα άρτιο αριθμό μικρότερο του 3 είναι το ενδεχόμενο

$$E_1 \cap E_4 = \{2\}$$

- Το συμπλήρωμα του ενδεχόμενου να έχουμε άρτιο αποτέλεσμα είναι να έχουμε περιττό

$$E_1' = E_3$$

Παραδείγματα

- Το ενδεχόμενο να έχουμε περιττό αριθμό αλλά όχι μεγαλύτερο του 4 είναι το ενδεχόμενο

$$\mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_5 = \{1,3\}$$

Ιδιότητες των Πράξεων των Συνόλων

1. $\emptyset \subset A$
2. $A \cup A' = \Omega$
3. $A \cap A' = \emptyset$
4. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
5. $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
6. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
7. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Ορισμός της Πιθανότητας

Ο απλούστερος ορισμός της πιθανότητας $P(A)$ είναι ο γνωστός ως κλασσικός ορισμός, και έχει τις ρίζες του στα τυχερά παιχνίδια. Σύμφωνα με αυτόν, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως

$$P(A) = \frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N(\Omega)}}$$

Όπου:

$\mathrm{N(A)}$: πλήθος στοιχείων του ενδεχομένου A.

$\mathrm{N(\Omega)}$: πλήθος στοιχείων του ενδεχομένου Ω.

Ορισμός της Πιθανότητας

Για να ισχύει όμως ο κλασσικός ορισμός, θα πρέπει να υπάρχουν οι εξής προυποθέσεις :

- Το πείραμα τύχης που μελετάμε να έχει πεπερασμένο δειγματοχώρο.
- Όλα τα απλά (στοιχειώδη) γεγονότα να έχουν την ίδια ακριβώς δυνατότητα (ευκαιρία) να συμβούν.

Ορισμός της Πιθανότητας

<u>Παράδειγμα 1:</u>
Ρίχνουμε ένα «άμερόληπτο» νόμισμα δύο φορές. Εδώ ο δειγματικός χώρος (το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων) είναι

$$\Omega = \{\mathrm{KK}, \mathrm{K\Gamma}, \mathrm{\Gamma K}, \mathrm{\Gamma\Gamma}\}$$

Έστω A το ενδεχόμενο να έρθει K την πρώτη φορά και
B το ενδεχόμενο να έρθει αποτέλεσμα K και τις δύο φορές.
Δηλαδή:

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{KK}, \mathrm{K\Gamma}\}$$
$$\mathrm{B} = \{\mathrm{KK}\}$$

Έχουμε ότι

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$$
$$P(B) = \frac{1}{4} = 25\%$$

Ορισμός της Πιθανότητας

<u>Παράδειγμα 2:</u>

Έστω

E_1 ={Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι άρτιος αριθμός} = $\{2, 4, 6\}$.

E_2={Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι τέσσερα}=$\{4\}$.

E_3 ={Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι περιττός αριθμός}= $\{1, 3, 5\}$.

E_4 ={Το αποτέλεσμα του ζαριού αριθμός μικρότερος του 3}= $\{1, 2\}$.

E_5= {Το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο του τέσσερα = $\{5, 6\}$

Ορισμός της Πιθανότητας

Παράδειγμα 2:

Έχουμε:

$$P(E_1)=3/6=1/2,$$
$$P(E_2)=1/6,$$
$$P(E_3)=3/6=1/2,$$
$$P(E_4)=2/6=1/3,$$
$$P(E_5)=2/6=1/3$$

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov)

<u>Ορισμός:</u>

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots.\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_\iota\}, \mathrm{i} = 1,2, \ldots$ αντιστοιχίζουμε ένα πραγματικό αριθμό, τον οποίο συμβολίζουμε με $P(\omega_\iota)$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_\iota) \leq 1$, για κάθε $\mathrm{i} = 1,2, \ldots$
- $P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + \ldots = 1$

Τον αριθμό $P(\omega_\iota)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_\iota\}$

Ως πιθανότητα P(A) ενός ενδεχομένου $\mathrm{A} = \{\omega_{\iota_1}, \omega_{\iota_2}, \ldots, \omega_{\iota_\kappa}\}$ ορίζουμε

$$P(A) = \mathrm{P}(\omega_{\iota_1}) + \mathrm{P}(\omega_{\iota_2}) + \cdots + \mathrm{P}(\omega_{\iota_\kappa})$$

Βασικές Ιδιότητες των Πιθανοτήτων

- $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1}$
- $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$ για κάθε ενδεχόμενο A ενος δειγματικού χώρου Ω

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Για κάθε ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω

  - $P(A^c) = 1 - P(A)$

- Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- Έστω Α , Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$
- Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$$\mathbf{P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)}$$
- Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$\mathbf{P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)}$$

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- **Κανόνας της Πρόσθεσης για Τρία Ενδεχόμενα**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

- Ο υπολογισμός πιθανοτήτων στο excel γίνεται με την συνάρτηση

PROB

- **PROB (Συνάρτηση PROB)**

Η συνάρτηση **PROB** επιστρέφει την πιθανότητα οι τιμές μιας περιοχής να βρίσκονται μεταξύ δύο ορίων. Εάν δεν δίνεται ανώτερο_όριο, η συνάρτηση επιστρέφει την πιθανότητα οι τιμές του ορίσματος x_εύρος να είναι ίσες με το κατώτερο_όριο.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

- Σύνταξη:

PROB(x_εύρος; εύρος_πιθανοτήτων; [κατώτερο_όριο]; [ανώτερο_όριο])

Η σύνταξη της συνάρτησης PROB περιλαμβάνει τα παρακάτω ορίσματα:

- **X_εύρος** Υποχρεωτικό. Η περιοχή των αριθμητικών τιμών της μεταβλητής x για τις οποίες υπάρχουν σχετικές πιθανότητες.
- **Εύρος_πιθανοτήτων** Υποχρεωτικό. Ένα σύνολο πιθανοτήτων που σχετίζεται με τις τιμές του ορίσματος x_εύρος.
- **Κατώτερο_όριο** Προαιρετικό. Το κάτω φράγμα της τιμής για την οποία θέλετε την πιθανότητα.
- **Ανώτερο_όριο** Προαιρετικό. Το προαιρετικό άνω φράγμα της τιμής για την οποία θέλετε την πιθανότητα.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

Παρατηρήσεις:

- Εάν οποιαδήποτε τιμή του ορίσματος εύρος_πιθανοτήτων είναι ≤ 0 ή εάν οποιαδήποτε τιμή του ορίσματος εύρος_πιθανοτήτων είναι > 1, η συνάρτηση PROB επιστρέφει #ΑΡΙΘ! ή #NAME! ως τιμή σφάλματος.
- Εάν το άθροισμα των τιμών του ορίσματος εύρος_πιθανοτήτων δεν ισούται με 1, η συνάρτηση PROB επιστρέφει την τιμή #ΑΡΙΘ! ή #NAME! ως τιμή σφάλματος.
- Εάν παραλειφθεί το όρισμα ανώτερο_όριο, η συνάρτηση PROB επιστρέφει την πιθανότητα να ισούται η τιμή με το κατώτερο_όριο.
- Εάν τα ορίσματα x_εύρος και εύρος_πιθανοτήτων περιέχουν διαφορετικό αριθμό σημείων δεδομένων, η συνάρτηση PROB επιστρέφει την τιμή σφάλματος #Δ/Υ.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

Παράδειγμα:

Αντιγράψτε τα δεδομένα του παραδείγματος στον πίνακα που ακολουθεί και, στη συνέχεια, επικολλήστε τα στο κελί A1 ενός νέου φύλλου εργασίας του **Excel**. Για εμφανιστούν τα αποτελέσματα των τύπων, επιλέξτε τους, πατήστε το πλήκτρο F2 και, στη συνέχεια, πατήστε το πλήκτρο Enter. Εάν χρειάζεται, μπορείτε να ρυθμίσετε το πλάτος των στηλών για να βλέπετε ολόκληρα τα δεδομένα.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

Δεδομένα		
Τιμή του x	**Πιθανότητα**	
0	0,2	
1	0,3	
2	0,1	
3	0,4	
Τύπος	**Περιγραφή**	**Α ποτέλεσμα**
=PROB(A3:A6;B3:B6;2)	Η πιθανότητα το x να είναι 2.	0,1
=PROB(A3:A6;B3:B6;1;3)	Η πιθανότητα να κυμαίνεται το x μεταξύ του 1 και 3.	0,8

Παράδειγμα

<u>Παράδειγμα:</u>

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια διαδοχικά και καταγράφουμε το άθροισμα των ενδείξεων τους.

Να βρεθούν

α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος

β) Οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων

γ) Η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι τουλάχιστον 3 και το πολύ 7

δ) Η πιθανότητα τό άθροισμα των ενδείξεων να είναι τουλάχιστον 8

ε) Η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων να είναι το πολύ 9

Παράδειγμα

α) Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις καθώς και το αποτέλεσμα του πειράματος σε κάθε περίπτωση.

Επομένως σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Παράδειγμα

			Ζάρι 1				
		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
Ζάρι 2	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Παράδειγμα

β) Εφόσον τα ζάρια είναι «δίκαια» κάθε περίπτωση έχει την ίδια πιθανότητα να συμβεί. Επίσης συνολικά όλες οι περιπτώσεις είναι 36. Επομένως η πιθανότητα το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι ο αριθμός i, i=2,3,…12 είναι:

$$P(i) = \frac{\text{Πλήθος Περιπτώσεων όπου η ένδειξη είναι ο αριθμός } i}{36}$$

Παράδειγμα

Ο υπολογισμός των συχνοτήτων και των πιθανοτήτων των απλών ενδεχομένων γίνεται στο excel με την βοήθεια των συναρτήσεων **COUNTIF** και στην συνέχεια με απλές πράξεις.

Για παράδειγμα αν έχουμε των παρακάτω πίνακα ενδείξεων στο excel, για να υπολογίσουμε την συχνότητα της ένδειξης «6» γράφουμε

=COUNTIF(C4:H9; "6") ή **=COUNTIF(C4:H9; C8)**

Ενώ για την πιθανότητα το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι ο αριθμός «6»

Γράφουμε

=COUNTIF(C4:H9; "6")/36 ή **=COUNTIF(C4:H9; C8)/36**

Παράδειγμα

=COUNTIF(C4:H9; "6") ή =COUNTIF(C4:H9; C8)

=COUNTIF(C4:H9; "6")/36 ή =COUNTIF(C4:H9; C8)/36

		Ζάρι 1					
		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
Ζάρι 2	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Ένδειξη	Συχνότητα	Πιθανότητα
2	1	2,78%
3	2	5,56%
4	3	8,33%
5	4	11,11%
6	5	13,89%
7	6	16,67%
8	5	13,89%
9	4	11,11%
10	3	8,33%
11	2	5,56%
12	1	2,78%
Σύνολο	36	

Παράδειγμα

γ) Για τον υπολογισμό της πιθανότητας το άθροισμα των ζαριών να είναι τουλάχιστον 3 και το πολύ 7 έχουμε:

$$P(3 \leq X \leq 7) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7) = 55{,}56\%$$

Ο υπολογισμός της παραπάνω πιθανότητας γίνεται στο excel με την συνάρτηση **PROB**

Σύνταξη:

=PROB(range, prob_range, [lower_limit], [upper_limit])

Παράδειγμα

Εδώ συγκεκριμένα

=PROB(K4:K14;M4:M14;K5;K9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1				Ζάρι 1									
2													
3			1	2	3	4	5	6			Ένδειξη	Συχνότητα	Πιθανότητα
4		1	2	3	4	5	6	7			2	1	2,78%
5		2	3	4	5	6	7	8			3	2	5,56%
6	Ζάρι 2	3	4	5	6	7	8	9			4	3	8,33%
7		4	5	6	7	8	9	10			5	4	11,11%
8		5	6	7	8	9	10	11			6	5	13,89%
9		6	7	8	9	10	11	12			7	6	16,67%
10											8	5	13,89%
11											9	4	11,11%
12											10	3	8,33%
13											11	2	5,56%
14											12	1	2,78%
15											Σύνολο	36	
16													

Παράδειγμα

δ) Όμοια η πιθανότητα τό άθροισμα των ενδείξεων να είναι τουλάχιστον 8 υπολογίζεται ως εξής

$$P(X \geq 8) = P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12) = 41{,}67\%$$

Ο υπολογισμός της παραπάνω πιθανότητας θα γίνει στο excel πάλι με την συνάρτηση **PROB**

=PROB(K4:K14;M4:M14;K10;K14)

Παράδειγμα

ε) Η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων να είναι το πολύ 9 είναι

$$P(X \leq 9) = P(2) + P(3) + P(4) + \cdots + P(9) = 83{,}33\%$$

ή

$$P(X \leq 9) = 1 - P(X \geq 10) = 1 - P(10) + P(11) + P(12) = 83{,}33\%$$

Για τον υπολογισμό στο excel έχουμε

=PROB(K4:K14;M4:M14;K4;K11)

Ασκήσεις

1. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις πιθανές τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής Χ και τις πιθανότητες αυτών.

	A	B	C
1	Value x	Probability	Result
2	0	10%	
3	1	15%	
4	2	15%	
5	3	20%	
6	4	40%	

Ασκήσεις

Να βρείτε με την βοήθεια του **excel** τις πιθανότητες:

α) Η τυχαία Μεταβλητή Χ να μην πάρει την τιμή 0

β) Η τυχαία μεταβλητή Χ να πάρει την τιμή 0 ή 2 ή 4

γ) Η τυχαία μεταβλητή Χ να πάρει τιμή μεγαλύτερη του 1

δ) Η τυχαία μεταβλητή Χ να πάρει τιμή μικρότερη του 3

ε) Η τυχαία μεταβλητή Χ να πάρει τιμή τουλάχιστον 1 και το πολύ 3

Ασκήσεις

2. Οι φοιτητές ενός Μαθηματικού τμήματος επιλέγουν στο πρώτο έτος την ενότητα ΜΑΘ 1 σε ποσοστό 60% και την ΜΑΘ 2 σε ποσοστό 50%, ενώ το ποσοστό των φοιτητών που επιλέγουν και τις δύο θεματικές ενότητες είναι 30%. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν πρωτοετή φοιτητή του μαθηματικού τμήματος να βρεθούν οι πιθανότητες:

Α. Ο φοιτητής να έχει επιλέξει τουλάχιστον μία από τις παραπάνω δύο ενότητες.

Β. Ο φοιτητής να έχει επιλέξει ακριβώς μία από τις παραπάνω δύο ενότητες.

Ασκήσεις

3. Σε μια μελέτη των αιτιών καταστροφής του οδοστρώματος βρέθηκε ότι στο 8% των περιπτώσεων καταστροφής υπήρχε αστοχία υλικού, στο 85% των περιπτώσεων καταστροφής υπήρχε κατασκευαστική κακοτεχνία, ενώ στο 5% των περιπτώσεων υπήρχαν και τα δύο είδη βλάβης. Με βάση τα ποσοστά αυτά να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες ότι σε ένα συγκεκριμένο έλεγχο καταστροφής οδοστρώματος υπάρχει:

Α. Αστοχία υλικού ή κατασκευαστική κακοτεχνία.
Β. Αστοχία υλικού αλλά όχι κατασκευαστική κακοτεχνία.
Γ. Το πολύ ένα είδος από τις αναφερόμενες αιτίες.
Δ. Καμία από τις δύο αναφερόμενες αιτίες.

Βιβλιογραφία

- Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεόν
- P. Hoel, S. Port, C. Stone Εισαγωγή στην θεωρία Πιθανοτήτων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Δ. Χελιώτης Ένα Δεύτερο Μάθημα στις Πιθανότητες eBooks4Greeks, Ελεύθερη Ψυφιακή Βιβλιοθήκη
- W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley &Sons