Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Διαμέριση Δειγματικού Χώρου

Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τέτοια ώστε

- είναι ανά δύο ξένα, δηλαδή $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ Για κάθε $i, j = 1,2, \dots, n$ με $i \neq j$
- και

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i = \Omega$$

Τότε λέμε ότι τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω.

Διαμέριση Δειγματικού Χώρου

<u>Παράδειγμα 1:</u>

Αν $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, τότε τα $A_1 = \{1,3,5\}$ και $A_1 = \{2, 4,6\}$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω, αφού

- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

και

- $A_1 \cup A_2 = \Omega$.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Έστω $B_1, B_2, \ldots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , τότε αν $A \subseteq \Omega$

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\big(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)\big) =$$

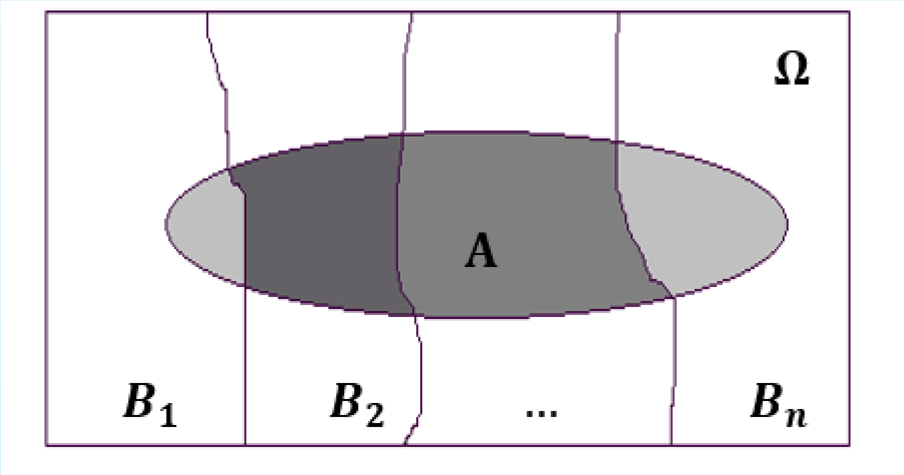
$$= P\big((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots (A \cap B_n)\big) =$$

$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Επομένως αν $B_1, B_2, \dots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ισχύει ότι

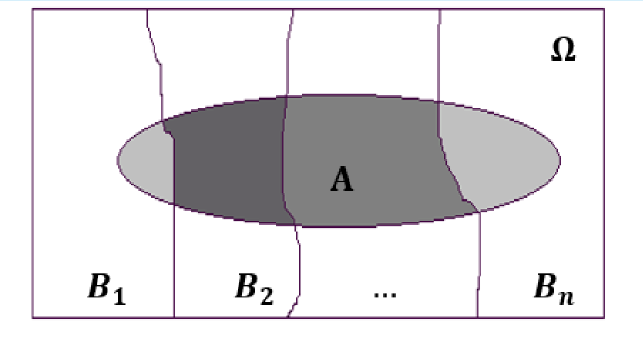
$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k)$$



Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Όμως από τον πολλαπλασιαστικό νόμο γνωρίζουμε ότι

$$P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$$



Επομένως

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν αποτελέσματα του επόμενου θεωρήματος που είναι γνωστό ως **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.**

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Αν $B_1, B_2, \dots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ισχύει ότι

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)$$

Παράδειγμα 1:

Παράδειγμα 1:

Σε μία αποθήκη είναι αποθηκευμένα εξαρτήματα του ίδιου τύπου που προέρχονται από τρεις διαφορετικούς προμηθευτές A, B, Γ σε ποσοστά $50\%, 40\%$ και 10% αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι οι προμηθευτές παράγουν A, B, Γ ελλαττωματικά εξαρτήματα $6\%, 10\%$ και 15% αντίστοιχα. Έστω ότι επιλέγουμε στην τύχη ένα εξάρτημα από την αποθήκη. Να βρεθεί η πιθανότητα το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό.

Παράδειγμα 1:

Λύση:

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή Α

Β: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή Β

Γ: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή Γ

Ε: Το εξάρτημα είναι ελλαττωματικό

Παράδειγμα 1:

- Τα ενδεχόμενα A, B, Γ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω
- Επίσης γνωρίζουμε τις πιθανότητες:

$$P(A) = 50\%, P(B) = 40\%, P(\Gamma) = 10\%,$$

$$P(E|A) = 6\%, P(E|B) = 10\%, P(E|\Gamma) = 15\%,$$

Παράδειγμα 1:

Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε ότι

$$P(\mathrm{E}) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|\Gamma)P(\Gamma)$$

Δηλαδή

$$P(\mathrm{E}) = 8{,}5\%$$

Το Θεώρημα Bayes:

- Γνωρίζουμε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου B_k, δεδομένου του Α με $P(A) > 0$, ορίζεται ως εξής:

$$P(B_k|\, A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)}$$

- Όμως από τον πολλαπλασιαστικό τύπο γνωρίζουμε ότι $P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$

Το Θεώρημα Bayes:

- Επιπλέον αν $B_1, B_2, \ldots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ισχύει ότι

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Το Θεώρημα Bayes:

- Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$P(B_k|\, A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο Θεώρημα, που είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Bayes**

Θεώρημα του Bayes

Θεώρημα του Bayes:

Αν $B_1, B_2, \dots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , με $P(B_i) > 0$ για κάθε $i = 1,2,\dots,n$, τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ με $P(\mathrm{A}) > 0$ και $k = 1,2,\dots,n$ ισχύει ότι

$$P(B_k|\,A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Παράδειγμα 2:

Παράδειγμα 2:

Σε μία αποθήκη είναι αποθηκευμένα εξαρτήματα του ίδιου τύπου που προέρχονται από τρεις διαφορετικούς προμηθευτές A, B, Γ σε ποσοστά $50\%, 40\%$ και 10% αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι οι προμηθευτές παράγουν A, B, Γ ελλαττωματικά εξαρτήματα $6\%, 10\%$ και 15% αντίστοιχα. Έστω ότι επιλέγουμε στην τύχη ένα εξάρτημα από την αποθήκη. Να βρεθεί η πιθανότητα αν το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό να προέρχεται από τον προμηθευτεί A.

Παράδειγμα 2:

Λύση:

Όπως και στο παράδειγμα 1 θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Α: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή Α

Β: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή Β

Γ: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή Γ

Ε: Το εξάρτημα είναι ελλαττωματικό

Παράδειγμα 2:

- Τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω.
- Επίσης γνωρίζουμε τις πιθανότητες:

$$P(A) = 50\%, P(B) = 40\%, P(\Gamma) = 10\%,$$

$$P(E|A) = 6\%, P(E|B) = 10\%, P(E|\Gamma) = 15\%,$$

Παράδειγμα 2:

Από το Θεώρημα του Bayes έχουμε

$$P(\mathrm{A}|\,\mathrm{E}) = \frac{P(E|\mathrm{A})P(\mathrm{A})}{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|\Gamma)P(\Gamma)}$$

Δηλαδή

$$P(\mathrm{A}|\,\mathrm{E}) = \frac{0{,}03}{0{,}085} = 0{,}35$$

Παράδειγμα 3:

<u>Παράδειγμα 3</u>

Η πιθανότητα να συμβεί μια πυρκαγιά σε μια πόλη σε ένα έτος είναι 12% και η πιθανότητα να συμβούν 2 πυρκαγιές είναι 4%, ενώ για 3 ή περισσότερες πυρκαγιές η πιθανότητα είναι μηδενική. Αν η πιθανότητα μια πυρκαγιά να προκαλέσει σοβαρές ζημιές είναι 25% και η πιθανότητα δύο πυρκαγιές στο ίδιο έτος να προκαλέσουν σοβαρές ζημιές είναι 6,25% να υπολογιστούν οι πιθανότητες :

A. Να μην προκληθούν σε ένα έτος σοβαρές ζημιές από πυρκαγιά.

B. Να προκληθούν σε ένα έτος σοβαρές ζημιές σε ένα νομό που έχει 3 πόλεις.

Παράδειγμα 3:

<u>Λύση:</u>

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Π_i: Συμβαίνουν i Πυρκαγιές στην πόλη $i = 1,2$

Z: Συμβαίνουν σοβαρές ζημιές στην πόλη από πυρκαγιά

Παράδειγμα 3:

Γνωρίζουμε τις πιθανότητες:

$$P(\Pi_1) = 12\%, P(\Pi_2) = 40\%, P(\Gamma) = 10\%,$$

$$P(\mathrm{Z}|\Pi_1) = 25\%, P(\mathrm{Z}|\Pi_2) = 6{,}25\%,$$

Α. Έχουμε: $P(Z) = P(\mathrm{Z}|\Pi_1) \cdot P(\Pi_1) + P(\mathrm{Z}|\Pi_2) \cdot P(\Pi_2)$

$$P(Z) = 0,25 \cdot 0,12 + 0,04 \cdot 0,0625 = 3{,}25\%$$

Άρα η πιθανότητα να μην συμβούν σοβαρές ζημιές είναι

$$P(Z^c) = 100\% - 3{,}25\% = 96{,}75\%$$

Παράδειγμα 3:

Β. Έστω ο νομός έχει τις πόλεις B_1, B_2, B_3

Αν B_iτο ενδεχόμενο να μην προκληθεί ζημιά από πυρκαγιά στην πόλη $i, i = 1,2,3$.

Και B το ενδεχόμενο να μην προκληθεί ζημιά στο νομό τότε,

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 \cap \mathrm{B}_3) =$$

$$= P(\mathrm{B}_1) \cdot P(\mathrm{B}_2) \cdot P(\mathrm{B}_3) = (0{,}9675)^3 = 0{,}9056$$

Παράδειγμα 3:

Η πιθανότητα να προκληθούν σε ένα έτος σοβαρές ζημιές στον νομό που έχει 3 πόλεις (δηλαδή να προκληθεί ζημιά σε τουλάχιστον μία πόλη) είναι

$$P(\mathrm{B}^c) = 1 - P(\mathrm{B}) = 1 - 0{,}9056 = 0{,}0943$$

Βιβλιογραφία

- Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεόν
- P. Hoel, S. Port, C. Stone Εισαγωγή στην θεωρία Πιθανοτήτων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Δ. Χελιώτης Ένα Δεύτερο Μάθημα στις Πιθανότητες eBooks4Greeks, Ελεύθερη Ψυφιακή Βιβλιοθήκη
- W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley &Sons
- Γ. Παπαδόπουλος, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική, Εκδόσεις Gutenberg