Διαφορικές εξισώσεις

Εισαγωγη:

Ορισμός: Διαφορική εξίσωση είναι κάθε εξίσωση που περιέχει τις παράγωγους ή μια απο τις παραγωγους μια άγνωστης συναρτησης.

Π.χ

$$y' = y + x \qquad \left(\frac{dy}{dx} = y + x\right)$$

$$4y'' + y' + y = x^2 + 5 \qquad \left(4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = x^2 + 5\right)$$

$$xy'' = y' + 5 \qquad \left(x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 5\right)$$

Ταξινομηση των Δ.Ε.

- Συνηθεις Διαφορικες Εξισωσεις
- Μερικες Διαφορικες Εξισωσεις

Συνηθεις Διαφορικες Εξισωσεις (Σ.Δ.Ε.) είναι η διαφορικη εξισωση οπου η αγνωστη συναρτηση είναι μιας μεταβλητης.

Π.χ

$$4y''(x) + 2y'(x) - y^2(x) = 0$$

- Μερικές διαφορικές εξισώσεις (Μ.Δ.Ε) είναι οι διαφορικές εξισώσεις όπου η άγνωστη συνάρτηση είναι πολλών μεταβλητών.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$, η άγνωστη συνάρτηση είναι $y(t,x)$

- Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η μεγαλύτερη τάξης παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης που εμφανίζεται στη δ.ε.

Π.χ $$y''' + y'' + y = x+1$$
είναι τρίτης τάξης δ.ε.

Λύσεις διαφορικής εξίσωσης

Λύση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι κάθε συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί τη διαφ. εξίσωση.

Π.χ $$y' - y = 0 \quad (1)$$

λυση της είναι $y(x) = e^x$

γιατί $y'(x) = e^x$ αρα

$y' - y = e^x - e^x = 0$ αρα ικανοποιείται

η εξίσωση (1).

Αν η λύση ήταν $y(x) = e^x + C$

$y'(x) = e^x$

$y' - y = e^x - e^x - C = -C = 0$

$\Rightarrow \boxed{C = 0}$

Άσκηση: Προσδιορίστε αν η $y(x) = x^2 - 1$ είναι λύση της δ.ε. $(y')^4 + y^2 = -1$

$y(x) = x^2 - 1 \Rightarrow y'(x) = 2x$

Άρα, $(y')^4 + y^2 = (2x)^4 + (x^2-1)^2 =$

$16x^4 + x^4 - 2x^2 + 1 =$

$17x^4 - 2x^2 + 1$

Θέτουμε $z = x^2$

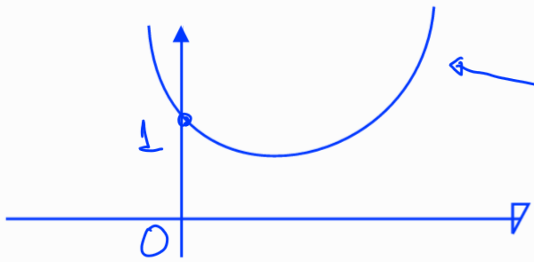
$\left.\begin{array}{l} 17x^4 - 2x^2 + 1 \\ z = x^2 \end{array}\right\} 17z^2 - 2z + 1$

Τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \geq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 17\cdot 1<0$, δεν έχουμε λύσεις



$17z^2-2z+1>0$

$17x^4-2x^2+1>0$

Άρα $17x^4-2x^2+1\neq -1$

Άρα $y=x^2-1$ δεν είναι της δ.ε.

Επειδή, $(y')^4+y^2\geq 0$ η δ.ε.

$(y')^4+y^2=-1$ δεν έχει λύσεις

Να εξετάσετε αν η $y(x)=c_1\,\eta\mu 2x+c_2\,\sigma\upsilon\nu 2x$ είναι λύση της δ.ε $y''+4y=0$

$$y'=c_1\,\sigma\upsilon\nu 2x\cdot(2x)'+c_2(-\eta\mu 2x)\cdot(2x)'$$

κανονας αλυσιδας

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$