Γραμμικές Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης

$$\boxed{y' + P(x) \cdot y = Q(x)}$$

Μορφή της γραμμικής δ.ε. $1^{ης}$ τάξης

- Βρίσκουμε τον πολ/στη Euler

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

- Πολλαπλασιάζουμε τον πολ/στη Euler με τη Δ.Ε.

$$\underbrace{e^{\int P(x)dx} y' + P(x)\, e^{\int P(x)dx} y}_{\Downarrow} = e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)$$

$$\left(e^{\int P(x)dx} y\right)' = e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)$$

- Ολοκληρώνουμε

$$\int \left(e^{\int P(x)dx} \cdot y\right)' dx = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)\,dx + C$$

$$e^{\int P(x)dx} y = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)\,dx + C$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)\,dx + C\right]$$

Παραδείγματα

1) $y' + 2y = 2$

- $e^{\int 2dx} = e^{2x}$

- $\underbrace{e^{2x} y' + 2e^{2x} y}_{\Downarrow} = 2e^{2x}$

$(e^{2x} \cdot y)' = 2e^{2x}$

- $\int (e^{2x} \cdot y)' dx = \int 2 e^{2x} dx + C_1$

$e^{2x} y = e^{2x} + C_1$

$\boxed{y = 1 + C_1 \cdot e^{-2x}}$ Γενική λύση της εξίσωσης

2) $y' + 2x y = x$

- $\mu(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

- $\underbrace{e^{x^2} y' + 2x e^{x^2} y}_{\Downarrow} = x e^{x^2}$

$$\left(e^{x^2} y\right)' = x \cdot e^{x^2}$$

- $$\int \left(e^{x^2} y\right)' dx = \int x e^{x^2} dx + C$$

$$e^{x^2} y = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}}$$

Γενικη λυση της Δ.Ε.

3) Να λυθει το προβλημα αρχικων τιμων

$$y' = \frac{x+y}{x}, \quad x > 0, \quad y(1) = 1$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{y' - \frac{1}{x} y = 1}$$ Γραμμικη

- $$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

- $$\underbrace{\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y}_{\Downarrow} = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x} y\right)' = \frac{1}{x}$$

- $$\int \left(\frac{1}{x} y\right)' dx = \int \frac{1}{x} dx + c$$

$$\frac{1}{x} y = \ln x + c$$

$$\boxed{y = x\ln x + cx}$$ Γενική λύση της δ.ε.

$$1 = 1\cdot\ln 1 + c\cdot 1 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$\boxed{y = x\ln x + x}$$ Λύση του Π.Α.Τ

4) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' + \varepsilon\varphi x\, y = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad y(\pi) = 1$$

• $$\mu(x) = e^{\int \varepsilon\varphi x\, dx} = e^{-\ln(\sigma\upsilon\nu x)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

• $$\underbrace{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} y' + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot y}_{\Downarrow} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} y\right)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

• $$\int \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} y\right)' dx = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx + c$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\, y = \varepsilon\varphi x + c$$

$$\boxed{y = \eta\mu x + c\,\sigma\upsilon\nu x}$$

Γενική λύση της δ.ε.

$$1 = \eta\mu\pi + c\,\sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

$$\boxed{y = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$$

Λύση του Π.Α.Τ.