Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός: Μια συναρτηση $f(x,y)$ με $(x,y)\in D$ λέγεται ομογενής βαθμού n αν για καθε (x,y) και $\lambda>0$ έχουμε ότι $(\lambda x,\lambda y)\in D$ και

$$\boxed{f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n} f(x,y).}$$

π.χ. $f(x,y)=x^3+y^3$

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^3+(\lambda y)^3$$
$$=\lambda^3 x^3+\lambda^3 y^3$$
$$=\lambda^3(x^3+y^3)$$
$$\Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3 f(x,y)$$

Αρα, η f είναι ομογενής $3^{ου}$ βαθμού.

Ορισμός ομογενης δ.ε.

$$y'=f(x,y)$$

... δ.ε. λέγεται ομογε-

Η παραπάνω δ.ε. λέγεται ... ομογε-
νής όταν η συνάρτηση f είναι
ομογενής $0^{ου}$ βαθμού.

Μέθοδος επίλυσης

$$y' = f(x, y)$$

- Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot u$$

$$\Rightarrow y' = u + x \cdot u'$$

- Αντικατάσταση στη δ.ε.

$$u + x \cdot u' = f(\underline{x}, \underline{x} \cdot u)$$

$$u + x u' = x^0 f(1, u)$$

$$u + x u' = f(1, u)$$

$$\boxed{x u' = f(1, u) - u} \quad (1)$$

Η δ.ε. (1) είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Π.χ. Να λυθεί η δ.ε.

$$y' = \frac{y}{x+\sqrt{x\cdot y}}.$$

Λύση Η δ.ε. είναι ομογενής γιατί η $f(x,y) = \dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$ είναι ομογενής $0^{ου}$ βαθμού αφού:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x + \sqrt{\lambda x \cdot \lambda y}}$$

$$= \lambda^0 \frac{y}{x+\sqrt{x\cdot y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 \cdot f(x,y)}$$

• Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\cdot u$$

$$y' = u + x\cdot u'$$

• Αντικαταστούμε στη δ.ε.

$$y' = \frac{x \cdot u}{x + \sqrt{xy}}$$

$$u + xu' = \frac{u}{x + \sqrt{x \cdot xu}}$$

$$u + xu' = \frac{u}{1 + \sqrt{u}}$$

$$x \cdot u' = \frac{u}{1+\sqrt{u}} - u$$

$$x \cdot u' = \frac{u - u - u\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}$$

$$x \cdot u' = -\frac{u\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}$$

$$\boxed{x \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{u\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}}$$

χωριζομένων μεταβλητών