Μη πλήρεις δ.ε. που ανάγονται σε πλήρεις.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $\mu(x,y)$ τέτοια ώστε η εξίσωση

$$\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0$$

να είναι πλήρης τότε το $\underline{\mu(x,y)}$

παράγοντας ή

λέγεται ολοκληρωτικός παράγοντας

πολλίστης Euler και η αρχική δ.ε

λέγεται μη πλήρης δ.ε που ανάγεται σε πλήρης

Πρόταση: Έστω η δ.ε.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

η οποία δεν είναι πλήρης

- αν το $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ είναι συνάρτηση του x τότε η δ.ε. ανάγεται σε πλήρης με ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx}$$

- αν το $-\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ είναι συνάρτηση του y η δ.ε. ανάγεται σε πλήρης με ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}\,dy}$$

παράδειγμα:

1. $\underbrace{xy}_{P(x,y)}\,dx + \underbrace{(1+x^2)}_{Q(x,y)}\,dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= x \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= 2x \end{aligned}\right\} \text{Μη πλήρης}$$

- Εξετάζουμε $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \dfrac{x-2x}{1+x^2} = \dfrac{-x}{1+x^2}$

$$-\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{-(x-2x)}{xy} = \frac{1}{y}$$

- Θεωρούμε τον πολ/στη

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

- $\underbrace{xy^2}_{P'(x,y)} dx + \underbrace{y(1+x^2)}_{Q'(x,y)} dy = 0$

$$\left.\frac{\partial P'(x,y)}{\partial y} = 2xy \quad\right\} \text{Πλήρης}$$

$$\frac{\partial Q'(x,y)}{\partial x} = 2xy$$

Θέλουμε να βρούμε την $F(x,y)$ ώστε

- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P'(x,y)$ • $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q'(x,y)$

- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x \cdot y^2 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx = \int x y^2\,dx + c(y)$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2}y^2 + c(y)$$

- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = y(1+x^2) \Rightarrow \dfrac{\partial\left(\frac{x^2}{2}y^2 + c(y)\right)}{\partial y} = y + yx^2$

$$\cancel{y \cdot x^2} + c'(y) = y + \cancel{yx^2}$$

$$c'(y) = y \Rightarrow \int c'(y)\,dy = \int y\,dy + c$$

$$\Rightarrow c(y) = \frac{y^2}{2} + c_1$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} \cdot y^2 + \frac{y^2}{2} + C_1$$

Η λύση της δ.ε είναι $F(x,y) = C_2$

$$\frac{x^2}{2}y^2 + \frac{y^2}{2} + C_1 = C_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\quad}{2}y \quad \frac{\quad}{2} + C_1 = C_2$$

$$\frac{x^2}{2}y^2 + \frac{y^2}{2} = C \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{C}{x^2+1} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{C}{x^2+1}}$$

2. $$\underbrace{(x^2+y^2+2x)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{2y}_{Q(x,y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 0$$

Η δ.ε δεν είναι πλήρης 1

- $$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y-0}{2y} = 1$$

ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$\mu(x) = e^{\int 1\,dx} = e^x$$

Επομένως, η δ.ε. γίνεται

$$\underbrace{e^x(x^2+y^2+2x)}_{P'(x,y)}dx + \underbrace{2y\,e^x}_{Q'(x,y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial P'(x,y)}{\partial y} = 2ye^{x} = \frac{\partial Q'(x,y)}{\partial x}$$

Θέλουμε την $F(x,y)$ τετ. ώστε

- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P'(x,y)$
- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q'(x,y)$