Ομογενείς διαφορικές Εξισώσεις 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0 \quad (1)$$

- Εξετάζουμε την αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$$

Περίπτωση 1η $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$\boxed{y_{o\mu} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$$

λύση της ομογενούς

Περίπτωση 2η $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda$ (διπλή) $\in \mathbb{R}$, τότε

$$\boxed{y_{o\mu} = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 x \cdot e^{\lambda x}}$$

λυση της ομογενους

Περίπτωση 3η $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_1 \pm \lambda_2 i$

$$\boxed{y_{o\mu} = c_1 e^{\lambda_1 x} \cdot \cos\lambda_2 x + c_2 e^{\lambda_1 x} \cdot \sin\lambda_2 x}$$

Λυση της ομογενους.

Ασκησεις

1. Να λυθεί η εξισωση $y'' + y' - 2y = 0$

- Η χαρακτηριστική εξισωση είναι.

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Άρα, η λύση της ομογενούς είναι

$$\boxed{y_{o\mu} = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{x}}$$

2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

- Η χαρακτηριστική εξισωση είναι:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

Άρα, η λύση είναι

$$y_{o\mu} = c_1 e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 0} \\ y'(0) = 1 \Rightarrow \boxed{2c_1 - 2c_2 = 1} \end{array}\right\} c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = -\frac{1}{4}$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι:

$$\boxed{y_{o\mu} = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}}$$

3. Να λυθεί η δ.ε. $y'' + 6y' + 9y = 0$

- Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda+3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -3, \text{ διπλή ρίζα}$$

Άρα, η λύση της ομογενούς είναι:

$$y_{o\mu} = c_1 e^{-3x} + c_2 x \cdot e^{-3x}$$

4. Να λυθεί η δ.ε. $y'' + 6y' + 10 = 0$

- Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = 36 - 40 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4i^2}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3 \pm i$$

Άρα, η λύση της ομογενούς είναι:

$$\boxed{y \;=\; C_1 e^{-3x} \cdot \cos x + C_2 e^{-3x} \sin x}$$

$\int_0 \mu$