Διαφορικές εξισώσεις ομογενείς 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$$

• Εξετάζουμε για λύσεις της μορφής

$\rightarrow y = e^{\lambda \cdot x}$

$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$

Άρα, $\alpha \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + \beta \lambda \cdot e^{\lambda x} + \gamma e^{\lambda x} = 0$

$(\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma) \cdot e^{\lambda x} = 0$

$$\boxed{\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma = 0}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής

Περίπτωση 1η $\Delta > 0$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, λύσεις

$$y_{o\mu} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

λύση της ομογενούς

παράδειγμα: $y'' + 5y' - 6y = 0$

• Η αντίστοιχη χαρακτηριστική της εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda + 6)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 = -6 \\ \lambda_2 = 1\end{matrix}}$$

Άρα, η λύση της ομογενούς είναι:

$$\boxed{y_{ομ} = c_1 \cdot e^{-6x} + c_2 e^{x}}$$

Περίπτωση 2η $\Delta = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda \in \mathbb{R}$ διπλή λύση

Η λύση της διαφ. εξίσωσης

$$\boxed{y_{ομ} = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x \cdot e^{\lambda x}}$$

παράδειγμα: $y'' + 2y' + y = 0$

Η αντίστοιχη χαρακτηριστική είναι: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -1$, διπλή

Άρα, η λύση της εξίσωσης είναι:

$$\boxed{y_{o\mu} = c_1 e^{-x} + c_2 x \cdot e^{-x}}$$

Περίπτωση 3η $\Delta < 0$

$\lambda_1 \pm \lambda_2 \cdot i$ λύσεις

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\boxed{y_{o\mu} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \cos(\lambda_2 x) + c_2 e^{\lambda_1 x} \sin(\lambda_2 x)}$$

παράδειγμα: $y'' + y' + y = 0$

Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = -3$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$, λύσεις της εξίσωσης

Άρα, η λύση της διαφ. εξίσωσης είναι:

$$\boxed{y_{o\mu} = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 4y = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Λύση: Η αντίστοιχη χαρακτηριστική είναι:

$$^2\_ \quad - \quad = \quad \lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = -$$

Η λύση της διαφορικής είναι:

$$\boxed{y_{o\mu} = c_1 e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x}}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) = 0 &\Rightarrow 0 = c_1 + c_2 \\ y'(0) = 1 &\Rightarrow 1 = 2c_1 - 2c_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= \tfrac{1}{4} \\ c_2 &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι:

$$\boxed{y_{o\mu} = \frac{1}{4}\cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}}$$

2. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$(1+x^2)y' + 4xy = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$y(0) = 1$$

Λύση: $y' + \frac{4x}{1+x^2} y = \frac{1}{(1+x^2)^3}$

- $\mu(x) = e^{\int \frac{4x}{1+x^2}dx} = e^{2\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}} = e^{2\ln(1+x^2)}$
$= e^{\ln(1+x^2)^2} = (1+x^2)^2$

- $\underbrace{(1+x^2)^2 y' + 4x(1+x^2)^2 y}_{\downarrow} = \frac{1}{1+x^2}$

$$\left((1+x^2)^2\cdot y\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

- $\int \left((1+x^2)^2\cdot y\right)' dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + c$

$$(1+x^2)^2\cdot y = \arctan x + c$$

$$\boxed{y = \frac{\arctan x + c}{(1+x^2)^2}}$$

$y(0)=1, \quad 1 = \dfrac{\arctan 0 + c}{(1+0^2)^2}$

$$\boxed{1 = c}$$

Άρα, η λύση του Π.Α.Τ. είναι:

$$\boxed{y = \frac{\arctan x + 1}{(1+x^2)^2}}$$

3. Να λύσετε την:

$$x \cdot y' = 2y - x$$

$$y' = \frac{2y-x}{x}$$

Η $f(x,y) = \dfrac{2y-x}{x}$ είναι ομογενής μηδενικού βαθμού

γιατί: $f(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{2\lambda y - \lambda x}{\lambda x} = f(x,y)$

άρα $y' = \dfrac{2y-x}{x}$ είναι ομογενής 1ης τάξης

- Θέτουμε $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x$

$$y' = u + x \cdot u'$$

- $u + x \cdot u' = \dfrac{2u \cdot x - x}{x} \Rightarrow$

$x \cdot u' = 2u - 1 - u \Rightarrow$

$\boxed{x \cdot u' = u - 1}$ χωριζομένων μεταβλητών

$$x\cdot\frac{du}{dx}=u-1$$

$$\frac{1}{u-1}\,du=\frac{1}{x}\,dx\quad,\ u\neq 1.$$

$$\int\frac{1}{u-1}\,du=\int\frac{1}{x}\,dx+c \Rightarrow$$

$$\ln|u-1|=\ln|x|+c \Rightarrow$$

$$e^{\ln|u-1|}=e^{\ln|x|+c} \Rightarrow$$

$$|u-1|=e^{\ln|x|}\cdot e^{c} \Rightarrow$$

$$|u-1|=C|x| \Rightarrow$$

$$u-1=C_1\cdot x \rightarrow$$

$$\frac{y}{x}-1=C_1\cdot x\quad,\quad C_1\neq 0$$

$$\boxed{y=C_1\cdot x^2-x}$$ Γενική λύση της εξίσωσης

Εξετάζουμε αν το $u=1 \Rightarrow y=x$ είναι λύση της εξίσωσης

$$y=x \Rightarrow y'=1$$

Άρα, $1=\dfrac{2x-x}{x}$

Η $y=x$ είναι ειδική λύση

Η $y = x$

4. Να λυθεί η δ.ε.:

$$\underbrace{(x^2 - x + y^2)}_{P(x,y)}dx \underbrace{- (ye^y - 2xy)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= 2y \end{aligned}\right\} \text{είναι πλήρης}$$

- Θεωρούμε την $F(x,y)$ ώστε:

- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ • $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$

- $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x^2 - x + y^2 \Rightarrow \int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx = \int (x^2 - x + y^2)dx + c(y)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + y^2 x + c(y)$$

- $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -ye^y + 2xy \Rightarrow \frac{\partial\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + y^2 x + c(y)\right)}{\partial y} = -ye^y + 2xy$$

$$\Rightarrow \cancel{2xy} + c'(y) = -ye^y \cancel{+ 2xy}$$

$\Rightarrow c'(y) = -ye^y$

$\int c'(y)\,dy = \int -ye^y + c$

$c(y) = -y \cdot e^y + \int e^y dy + c$

$c(y) = -ye^y + e^y + c$

Αρα, η λύση της διαφορικής είναι:

$$\boxed{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + y^2x - ye^y + e^y = C}$$

5. Να λυθεί η δ.ε.

$$\underbrace{(3x^4 - y)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(x - 4x^2y^3)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

- $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -1$
- $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1 - 8xy^3$

Εξετάζουμε $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \dfrac{-2 + 8xy^3}{x - 4x^2y^3}$

$$= \frac{-2(1 - 4xy^3)}{x(1 - 4xy^3)} = -\frac{2}{x}$$

Άρα, ο πολλ/της Euler είναι:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

- $(\underbrace{3x^2 - x^{-2}\cdot y}_{P'(x,y)})dx + (\underbrace{x^{-1} - 4y^3}_{Q'(x,y)})dy = 0$

- $\dfrac{\partial P'(x,y)}{\partial y} = -x^{-2}$
- $\dfrac{\partial Q'(x,y)}{\partial x} = -x^{-2}$

} πλήρης

Θέλουμε $F(x,y)$ τέτοια ώστε

- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P'(x,y)$
- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q'(x,y)$

- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - x^{-2}\cdot y \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int (3x^2 - x^{-2} y)\, dx + c(y) \Rightarrow$$

$$F(x,y) = x^3 + x^{-1} \cdot y + c(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^{-1} - 4y^3 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\left(x^3 + x^{-1} \cdot y + c(y)\right)}{\partial y} = x^{-1} - 4y^3$$

$$\cancel{x^{-1}} + c'(y) = \cancel{x^{-1}} - 4y^3$$

$$c'(y) = -4y^3$$

$$c(y) = -y^4 + C$$

Άρα, η λύση της δ.ε. είναι

$$\boxed{x^3 + x^{-1}y - y^4 = C}$$