Διαφορικές Εξισώσεις

Χωριζομένων Μεταβλητών

Β' Μαχίμων Ι
2023-2024

1. Διαφορικές εξισώσεις της μορφής $y'=f(x)$

- άγνωστη συνάρτηση $y(x)$, $f(x)$: γνωστή συνάρτηση

Επίλυση:

$$y'=f(x) \Rightarrow y(x)=\int f(x)\,dx + c,\ c\in\mathbb{R}$$

Παραδείγματα:

1. $y'=\cos x \rightarrow y(x)=\int \cos x\,dx + c,\ c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y(x) = \sin x + c,\ c\in\mathbb{R}$

Αν δινόταν: $\boxed{y'=\cos x,\ y(0)=5}$ (1)

Λύνουμε κανονικά την 1ης-τάξης Δ.Ε

$y'=\cos x \rightarrow y(x)=\sin x + c$, γενική λύση

Τώρα εφαρμόζουμε την συνθήκη $y(0)=5$

Για $x=0 \Rightarrow 5=y(0)=\sin 0 + c \Rightarrow c=5$

Επομένως η λύση του προβλήματος (1)

είναι: $y(x)=\sin x + 5$

2. $x=\tan y' \Rightarrow \arctan x = \arctan(\tan y')$

$\Rightarrow y'=\arctan x$

$\Rightarrow y(x)=\int \arctan x\,dx + c,\ c\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow y(x) = \int x' \arctan x \, dx + c$$

$$\Rightarrow y(x) = x \arctan x - \int x (\arctan x)' dx + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad *$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Παραγοντική ολοκλήρωση} \\ \int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx \end{array}}$$

$$* \Rightarrow y(x) = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx + c$$

$$\Rightarrow y(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$$

$$\Rightarrow y(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

3. $y' = \frac{1}{x}$, $x>0$ και $y(2) = -3$

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y(x) = \int \frac{1}{x}\,dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow y(x) = \ln x + c, \ c \in \mathbb{R}, \ x>0$ γενική λύση

Είναι όμως $y(2) = -3$

$x=2 \Rightarrow -3 = \ln 2 + c \Rightarrow c = -3 - \ln 2$

οπότε λύση του προβλήματος είναι:

$y(x) = \ln x - 3 - \ln 2 \ , \ x>0$

2. Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών

Γενική μορφή: $y' = f(x)\, g(y)$, $g(y) \neq 0$

ή $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

Λύση διαφορικής εξίσωσης:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$g(y) \neq 0$

$\Rightarrow dy = f(x) \cdot g(y)\, dx \quad : g(y) \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$, ολοκληρώνουμε κατά μέλη,

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Παραδείγματα

1. $y' = y^2\cos x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y^2\cos x,\ y \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{y^2}\,dy = \cos x\,dx$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \cos x\,dx + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{y} = \sin x + c$

$\Rightarrow \quad y(x) = -\dfrac{1}{\sin x + c},\quad c \in \mathbb{R}$

Αν δινόταν επιπλέον, $y(\pi) = 1$

$y \neq 0 \Rightarrow y(x) \neq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

$y(x) = -\dfrac{1}{\sin x + c} \Rightarrow 1 = -\dfrac{1}{0 + c}$

$\Rightarrow c = -1$, επομένως η λύση θα ήταν

$y(x) = -\dfrac{1}{\sin x - 1}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = xy^2 - x, \quad y(0) = 2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(y^2-1), \quad \text{για } y \neq \pm 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2-1} = x\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2-1} = \int x\,dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- $$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(y-1) + B(y+1)$$

για $y=1 \Rightarrow B = \dfrac{1}{2}$

για $y=-1 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{2}$

Άρα $\dfrac{1}{(y+1)(y-1)} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{y-1}$

Οπότε

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{y+1}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1}\,dy =$$

$$\int x\,dx + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|y+1| + \frac{1}{2}\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x^2 + \overset{c'}{2c}\ , \quad c' \in \mathbb{R}$$

Είναι όμως $y(0) = 2$

για $x = 0 \Rightarrow \ln\frac{1}{3} = c' \Rightarrow c' = \ln\frac{1}{3}$

3. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \frac{x+1}{y^4+1}\ , \quad y(0) = 1$$

$$y' = \frac{x+1}{y^4+1}, \quad y(0)=1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1} \Rightarrow (y^4+1)\,dy = (x+1)\,dx$$

$$\Rightarrow \int (y^4+1)\,dy = \int (x+1)\,dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{y^5}{5} + y = \frac{x^2}{2} + x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Δίνεται όμως $y(0)=1$, άρα

για $x=0$, $y=1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{5} + 1 = c \Rightarrow c = \frac{6}{5}$$

και λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\frac{y^5}{5} + y = \frac{x^2}{2} + x + \frac{6}{5}$$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$, $y(x)$

$\Rightarrow (y+e^{y})\,dy = (x - e^{-x})\,dx$, δεδομένου

ότι $y + e^{y} \neq 0 \Rightarrow e^{y} \neq -y \Rightarrow$

$y \neq \ln|-y|$

$\Rightarrow \int (y+e^{y})\,dy = \int (x - e^{-x})\,dx + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \frac{1}{2}y^2 + e^{y} = \frac{1}{2}x^2 + e^{-x} + c,\ c \in \mathbb{R}$, γενική λύση

6. Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y' = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{3 + 4y}$,

$y(0) = 1$

Πρέπει $3 + 4y \neq 0 \Rightarrow y \neq -\frac{3}{4} \Rightarrow$

$y(x) \neq -\frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{3 + 4y} \rightarrow (3+4y)\,dy =$

$(e^{-x} - e^{x})\,dx$

$\Rightarrow \int (3+4y)\,dy = \int (e^{-x} - e^{x})^{*}\,dx + c$

$c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 3y + \frac{4}{2}y^2 = -e^{-x} - e^{x} + c$, γενική λύση

* Γνωρίζουμε ότι $(e^{-x})' = -e^{-x}$

$= 2y^2 + 3y + e^{-x} + e^{x} - c = 0$, $c \in \mathbb{R}$

Είναι όμως $y(0) = 1$, οπότε

$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + e^{0} + e^{0} - c = 0$

$\Rightarrow c = 7$

Επομένως η λύση του Π. Α. Τ είναι

$2y^2 + 3y + e^{-x} + e^{x} - 7 = 0.$