Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

Β Μαχίμων Ι

2023-2024

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 1ης-τάξης

Γενική μορφή $\quad y' + f(x)\,y = g(x) \qquad (1)$

όπου $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση και

$f(x)$, $g(x)$ γνωστές συναρτήσεις

- αν $g(x) = 0 \xRightarrow{(1)} y' + f(x)y = 0 \quad (2)$

  είναι η αντίστοιχη ομογενής της (1)

Έχουμε $\quad y' + f(x)\,y = g(x) \qquad (1)$

Μέθοδος επίλυσης της Δ.Ε. (1)

Η μέθοδος χρησιμοποιεί τον ολοκληρώνοντα παράγοντα ή πολλαπλασιαστή Euler.

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (1) με μία κατάλληλη συνάρτηση, ώστε στο α' μέλος της νέας εξίσωσης να δημιουργηθεί παράγωγος ενός γινομένου

Πολλαπλασιαστής Euler $\mu(x)$

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}}$$

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η Δ.Ε $y' - 2xy = x$ (1)

Η (1) είναι της μορφής $y' + f(x)y = g(x)$

όπου $f(x) = -2x$, $g(x) = x$

$\boxed{\mu(x) = e^{\int f(x)dx}}$ πολλαπλασιαστής Euler

$f(x) = -2x \Rightarrow \int f(x)dx = \int -2x\,dx$

$\Rightarrow \int f(x)dx = -x^2$

Παρατήρηση

Στην ολοκλήρωση για να βρούμε τον πολλαπλασιαστή Euler $\mu(x)$ δεν βάζουμε σταθερά ολοκλήρωσης, γιατί αρκεί να βρούμε μια συνάρτηση $\mu(x)$

$\Rightarrow \int f(x)dx = -x^2 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$

$\Rightarrow \boxed{\mu(x) = e^{-x^2}}$

$y' - 2xy = x$ (1)

$\mu(x) \cdot (1) \Rightarrow e^{-x^2} \cdot y' - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2}$ (2)

Ισχυριζόμαστε ότι το α' μέλος της (2) είναι η παράγωγος $\left(e^{-x^2}\cdot y\right)'$. Είναι όμως;

$$\left(e^{-x^2}\cdot y\right)' = \left(e^{-x^2}\right)' y + e^{-x^2} y'$$

$$= e^{-x^2}\left(-x^2\right)' y + e^{-x^2} y'$$

$$= -2x e^{-x^2} y + e^{-x^2} y'$$, πράγματι είναι

Οπότε αντικαθιστούμε το α' μέλος με $\left(e^{-x^2} y\right)'$

$\Rightarrow \left(e^{-x^2} y\right)' = x e^{-x^2}$ ολοκληρώνουμε κατά μέλη

$$\Rightarrow e^{-x^2} y = \int x e^{-x^2} dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} y = -\frac{1}{2}\int \left(-2x e^{-x^2}\right) dx + c$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} y = -\frac{1}{2}\int \left(e^{-x^2}\right)' dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{1}{2} + c e^{x^2}}$$

2. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' + \frac{3}{x} y = x^2 \ (1), \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad x \neq 0$$

$$y' + \frac{3}{x} y = x^2 \rightarrow \boxed{y' + f(x) y = g(x), \ \mu(x) = e^{\int f(x)dx}}$$

Άρα η (1) είναι 1ης-τάξης γραμμική Δ.Ε

$$f(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow \int f(x)dx = \int \frac{3}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = 3\ln|x| = \ln|x|^3, \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \ln x^3$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln x^3} \Rightarrow \boxed{\mu(x) = x^3}$$

$$\boxed{e^{\ln x} = x}$$

$$\mu(x) \cdot (1) \Rightarrow \underbrace{x^3 \cdot y'}_{(x^3 y)'} + \frac{3}{x} \cdot x^3 y = x^3 \cdot x^2$$

$\Rightarrow x^3 y' + 3x^2 y = x^5$, το α' μέλος είναι η

παράγωγος $(x^3 y)'$; $\rightarrow (x^3 y)' = x^3 y' + 3x^2 y$

πράγματι είναι

$$\Rightarrow (x^3y)' = x^5 \Rightarrow x^3y = \int x^5 dx + c$$

$$\Rightarrow x^3y = \frac{x^6}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{x^3}{6} + cx^{-3}}$$, γενική λύση της (1)

Έχουμε όμως $y(1) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1^3}{6} + c\,1^{-3} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

οπότε λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}x^{-3}}$$

3. Να λυθεί η Δ.Ε. $(\cos x)y' + (\sin x)y = -\cos^2 x$ (1)

Η Δ.Ε. δεν είναι στη μορφή $y' + f(x)y = g(x)$

ώστε να βρούμε τον πολλαπλασιαστή

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int f(x)dx}}$$

Οπότε πρώτα διαιρούμε με $\cos x \neq 0$

$$(1) \Rightarrow y' + \frac{\sin x}{\cos x} y = -\cos x \; (2) \longrightarrow y' + f(x)y = g(x)$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = -\ln|\cos x| = -\ln(\cos x), ^*$$

$\cos x > 0$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln \frac{1}{\cos x}} \Rightarrow$$

$$\boxed{-\ln(\cos x) = \ln(\cos x)^{-1} = \ln \frac{1}{\cos x}}$$

$$\boxed{\mu(x) = \frac{1}{\cos x}}$$

πολλαπλασιάζουμε τη (2)

$$(2) \cdot \mu(x) \Rightarrow \frac{1}{\cos x} y' + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} y = \frac{-1}{\cos x} \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} y' + \frac{\sin x}{\cos^2 x} y = -1$$

$$\left(\frac{1}{\cos x} y\right)' = \frac{1}{\cos x} y' - \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} y \qquad = \frac{\sin x}{\cos^2 x} y$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\cos x} y\right)' = -1 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} y = -\int dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} y = -x + c \,, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = (-x + c)\cos x} \quad c \in \mathbb{R}$$

γενική λύση της Δ.Ε (2), άρα και της (1).

$$4. \quad y' + \frac{1}{x} y = e^{2x} \,, \quad x > 0 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \ln x$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)\,dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln x} \Rightarrow \mu(x) = x$$

$$\mu(x)\cdot(1) \Rightarrow x y' + \frac{1}{x}\cdot x\, y = x e^{2x}$$

$$\Rightarrow (xy)' = x e^{2x}$$

$$\Rightarrow xy = \int x e^{2x}\,dx + c, \quad ^{*} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\int x e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int x\left(e^{2x}\right)'dx \doteq \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2}\int x' e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} xy = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4x} e^{2x} + \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R},\ x > 0$$