Διαφορικές Εξισώσεις Bernoulli

Β' Μαχίμων Ι
2023-2024

Διαφορικές Εξισώσεις Bernoulli

Γενική μορφή: $y' + f(x)y = g(x)y^n, n \neq 0,1$ (1)

y^n: είναι μη γραμμικός όρος

$y(x)$: άγνωστη συνάρτηση

- αν $n=1$, τότε η (1) $\Longrightarrow y' + f(x)y = g(x)y$

$\Longrightarrow y' = y\left(g(x) - f(x)\right)$ (2), χωριζομένων μεταβλητών

- αν $n=0 \Longrightarrow y' + f(x)y = g(x)$, η οποία είναι γραμμική Δ.Ε.

Bernoulli $\boxed{y' + f(x)y = g(x)y^n}$ (1)

Αντικατάσταση:

$$y = u^{\frac{1}{1-n}}, \quad y = y(x), \quad u = u(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \left(u^{\frac{1}{1-n}}\right)' = \frac{1}{1-n} u^{\frac{1}{1-n} - 1} \frac{du}{dx}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{1-n} u^{\frac{1-1+n}{1-n}} \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \cdot u' \quad , \quad u' = \frac{du}{dx}$$

Μετά την αντικατάσταση προκύπτει γραμμική

Δ.Ε ως προς $u(x)$.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η Δ.Ε. $y' - 2xy = 2xy^{\frac{1}{2}}$ (1)

Λύση

Η Δ.Ε (1) είναι Bernoulli και $n = \frac{1}{2}$

Αντικατάσταση $y = u^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$

$$\Rightarrow \boxed{y = u^2} \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = \left(u^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y^{\frac{1}{2}} = u}$$

$$y = u^2 \Rightarrow \boxed{y' = 2uu'}$$

Αντικαθιστούμε y, y' στην (1), οπότε

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 2uu' - 2xu^2 = 2xu \longrightarrow y' + f(x)y = g(x)$$

Διαιρούμε με $2u \neq 0 \Rightarrow u(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{2uu'}{2u} - \frac{2x}{2u} u^2 = \frac{2xu}{2u}$$

$$\Rightarrow \quad u' - xu = x \qquad (2),$$

$u(x)$: άγνωστη συνάρτηση

Η (2) είναι μια γραμμική Δ.Ε ως προς $u(x)$, $f(x) = -x$,

Μετασχηματισμός $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$

$$f(x) = -x \Rightarrow \int f(x)dx = \int -x\,dx = -\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$ παράγοντας Euler

$$(2)\cdot\mu(x) \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}\left(u' - xu\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot x$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}u' - xe^{-\frac{x^2}{2}}u = xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3)$$

Το α μέλος πρέπει να είναι η παράγωγος

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}u\right)' = \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'u + e^{-\frac{x^2}{2}}u'$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{x^2}{2}\right)'u + e^{-\frac{x^2}{2}}u'$$

$$= -xe^{-\frac{x^2}{2}}u + e^{-\frac{x^2}{2}}u'$$

$$(3) \Rightarrow \left(e^{-\frac{x^2}{2}} u\right)' = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$ ολοκληρώνουμε

$$\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} u = \int \left(x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx + c$$

$$x e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{2x}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = -\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} u = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

$$\Rightarrow u(x) = -1 + c e^{\frac{x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{e^{-x}} = e^{x}$$

$\boxed{\text{Το ζητούμενο είναι η } y(x).}$

Είναι όμως $y = u^2 \Rightarrow y(x) = u^2(x)$

Επομένως

$$y(x) = \left(-1 + c e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. Να λυθεί η Δ.Ε:

$$y' - \frac{3}{x} y = x^4 y^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

$y' + f(x) y = g(x) y^n$ Bernoulli, $n = \frac{1}{3}$

$$y = u^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = u^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = \left(u^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow y' = \left(u^{\frac{3}{2}}\right)' \Rightarrow y' = \frac{3}{2} u^{\frac{3}{2}-1} u'$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} u'} \qquad \boxed{y^{\frac{1}{3}} = u^{\frac{1}{2}}}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) y, y' συναρτήσει του u και έχουμε

$$\Rightarrow \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} u' - \frac{3}{x} u^{\frac{3}{2}} = x^4 u^{\frac{1}{2}}$$, διαιρούμε

$$\Rightarrow u' - \frac{2}{x} u = \frac{2}{3} x^4 \quad (2)$$, $u(x)$: άγνωστη

γραμμική Δ.Ε ως προς $u(x)$, όπου

$y' + f(x) y = g(x)$, $\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$

$$f(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow \int f(x)dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = -2\ln|x|$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \ln\frac{1}{|x|^2} = \ln\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\ln\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}, \quad \boxed{e^{\ln x} = x}$$

$$\mu(x)\,(2) \Rightarrow \frac{1}{x^2}u' - \frac{2}{x^3}u = \frac{2}{3}x^2$$

$$\left(\frac{1}{x^2}u\right)' = \frac{1}{x^2}u' - \frac{2}{x^3}u$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(x^{-n}\right)' = -n\,x^{-n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2}u\right)' = \frac{2}{3}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}u = \frac{2}{3}\int x^2dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}u = \frac{2}{9}x^3 + c$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{2}{9}x^5 + cx^2$$

$$y(x) = u(x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y(x) = \left(\frac{2}{9}x^5 + cx^2\right)^{\frac{3}{2}}, \; c\in\mathbb{R}$$