

# Πλήρεις Διαφορικές Εξισώσεις

Β' Μαθίμων Ι  
2023 - 2024

## 2στ. Πλήρεις ή ακριβείς ή ολικού διαφορικού Διαφορικές Εξισώσεις Exact Differential Equations

$$\text{Γενική μορφή: } M(x,y) + N(x,y) y' = 0 \quad (1)$$

$M(x,y)$  και  $N(x,y)$  γνωστές πραγματικές συναρτήσεις

- Η άγνωστη συνάρτηση της (1) είναι η  $y(x)$

Παράδειγμα:

$$x^3 + 2xy + (x^2 + y^2 - 1) y' = 0$$

$$M(x,y) = x^3 + 2xy, \quad N(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

### Ορισμός

Έστω Δ.Ε  $M(x,y) + N(x,y) y' = 1 \quad (1)$

Η Δ.Ε. (1) ονομάζεται πλήρης, αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση  $F(x,y) : \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$

και  $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ . Επι πλέον δε, η γενική

λύση της (1) είναι  $F(x,y) = c, \quad c \in \mathbb{R}$

## Θεώρημα πληρότητας

Έστω η Δ.Ε (1) :  $M(x,y) + N(x,y) y' = 0$  και οι συναρτήσεις  $M(x,y), N(x,y), \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$  είναι συνεχείς στο  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  σύνολο ή σ' ένα υποσύνολό του.

Λέμε ότι η Δ.Ε (1) είναι πλήρης αν και μόνο αν ισχύει :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ ή στο υποσύνολο}$$

## Τρόπος επίλυσης πλήρων Δ.Ε.

Παράδειγμα :  $x^2 + 2xy + (x^2 + y) y' = 0 \quad (1)$   
 $M(x,y) + N(x,y) y' = 0$

Λύση:

### 1ο Βήμα

$$M(x,y) = x^2 + 2xy, \quad N(x,y) = x^2 + y$$

### 2ο Βήμα

Σύμφωνα με το Θεώρημα Πληρότητας πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2) \text{ και σύμφωνα με τον ορισμό}$$
$$\exists F(x,y) : \frac{\partial F}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

και η γενική λύση  $F(x,y) = c, c \in \mathbb{R}$

$$M(x,y) = x^2 + 2xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \text{ και}$$

$$N(x,y) = x^2 + y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x, \text{ επομένως}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ άρα η (1) είναι πλήρης}$$

### 3ο βήμα

Εφ' όσον η (1) είναι πλήρης, τότε με τον ορισμό της πλήρους Δ.Ε

$$\exists F(x,y) : \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = x^2 + 2xy \quad (2)$$

$$\text{και ταυτόχρονα } \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = x^2 + y \quad (3)$$

Εύρεση της  $F(x,y)$  από (2) και (3)

$$\begin{array}{l} F(x,y): \\ \frac{\partial F}{\partial x} = x^2 + 2xy \quad (3) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y \quad (4) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} F(x,y) = \int (x^2 + 2xy) dx \\ \quad + c(y) \quad (3) \\ c(y) \text{ συνάρτηση } y \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y \quad (4) \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + c(y)} \quad \begin{array}{l} (3) \text{ Παραγωγίζου} \\ \Rightarrow \text{ με την (3)} \\ \text{ ως προς } y \end{array}$$

και σε συνδυασμό με την (4) έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{x^3}{3} + x^2 y + c(y) \right\} = x^2 + y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + c'(y) &= x^2 + y \Rightarrow c'(y) = y \\ \Rightarrow c(y) &= \int y \, dy + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow c(y) = \frac{y^2}{2} + c_1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } F(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y + \frac{y^2}{2} + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

και από τον ορισμό η γενική λύση της (1)

$$\text{είναι } F(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y + \frac{y^2}{2} + c_1 = C$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3} + x^2 y + \frac{y^2}{2} + c_1 = C$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3} + x^2 y + \frac{y^2}{2} = C' \quad (5) \quad C' = C - c_1 \in \mathbb{R}$$

$y(x)$  άγνωστη, δεν χρειάζεται να επιλύσουμε ως προς  $y(x)$ , γιατί από την (5) η λύση δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή.

$$2. \frac{y}{x+y} dx + \left( \frac{y}{x+y} + \ln(x+y) \right) dy = 0 \quad (1)$$

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0, \quad x+y > 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x+y} + \left( \frac{y}{x+y} + \ln(x+y) \right) y' = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

• Έλεγχος πληρότητας

Ελέγχουμε αν  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , όπου

$$M(x, y) = \frac{y}{x+y} \quad \text{και}$$

$$N(x, y) = \left( \frac{y}{x+y} + \ln(x+y) \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x+y} \right) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1(x+y) - y \cdot 1}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{y}{x+y} + \ln(x+y) \right) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-y \cdot 1}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y} = \frac{x}{(x+y)^2}$$

$$\text{Άρα } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow (1) \text{ πλήρης}$$

Εφ' όσον η (1) πλήρης, υπάρχει  $F(x, y)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = \frac{y}{x+y} \quad (2) \text{ και}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = \left( \frac{y}{x+y} + \ln(x+y) \right) \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow F(x, y) = \int \frac{y}{x+y} dx + c(y)$$

$$\Rightarrow F(x, y) = y \ln(x+y) + c(y) \quad (4), x+y > 0$$

$$(3), (4) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (y \ln(x+y) + c(y)) =$$

$$\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \ln(x+y) + y \frac{1}{x+y} \cdot 1 + c'(y) =$$

$$\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)$$

$$\Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

Επομένως  $F(x, y) = y \ln(x+y) + C$

και η γενική λύση  $F(x, y) = C, C \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y \ln(x+y) = C - C_1 = C' \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{y \ln(x+y) = C'}$$

3. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\left( x - \frac{y}{x^2} \right) + \left( y + \frac{1}{x} \right) y' = 0, (1), x \neq 0, y(1) = 3$$

Λύση

$$\begin{array}{l} M(x, y) = x - \frac{y}{x^2} \\ N(x, y) = y + \frac{1}{x} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \end{array}$$

Ελέγχουμε αν  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , που ισχύει

άρα η Δ.Ε (1) είναι πλήρης, οπότε θα βρούμε

την  $F(x, y)$ :  $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$  και  $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$ ,

διότι έτσι θα πάρουμε τη γενική λύση

της (1),  $F(x, y) = C, C \in \mathbb{R}$ .



$$\frac{\partial F}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y + \frac{1}{x} \quad (3)$$

Ολοκληρώνουμε την (3) ως προς  $y$

$$\Rightarrow F(x, y) = \int \left( y + \frac{1}{x} \right) dy + c(x)$$

$$\Rightarrow F(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x}y + c(x) \quad (4)$$

Παραγωγίζουμε την (4) ως προς  $x$ , επομένως από τις (2) και (4)

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x}y + c(x) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} + c'(x) = x - \frac{y}{x^2}$$

$$\Rightarrow c'(x) = x \Rightarrow c(x) = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{'Αρα } F(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x}y + \frac{x^2}{2} + C_1$$

Ξέρουμε ότι η γενική λύση είναι  $F(x, y) = C$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x}y + \frac{x^2}{2} + C_1 = C = C - C_1 = C_2$$

$C_2 \in \mathbb{R}$

Μας δίνεται  $y(1) = 3$

$$\Rightarrow \frac{3^2}{2} + 1 \cdot 3 + \frac{1^2}{2} = C_2 \Rightarrow C_2 = 8$$

$$\Rightarrow \text{λύση του Π.Α.Τ. } \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x}y + \frac{x^2}{2} = 8$$