

Διαφορικές Εξισώσεις
2ης τάξης

Β' Μαθίμων Ι
2023 - 2024

Διαφορικές Εξισώσεις 2ης-τάξης με σταθερούς συντελεστές

1. Ομογενείς

Γενική μορφή : $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ (1)

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $y(x)$: άγνωστη συνάρτηση

Για να λύσουμε την (1)

Γράφουμε την αντίστοιχη αλγεβρική χαρακτηριστική εξίσωση, δέτοντας όπου

$$y'' \longrightarrow \lambda^2$$

$$y' \longrightarrow \lambda$$

$$y \longrightarrow 1$$

Οπότε προκύπτει: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$ (2)

που είναι 2ου βαθμού αλγεβρική εξίσωση.

α. Αν $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$, η (2) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Αντίστοιχα, η γενική μορφή λύσης της ΔΕ(1)

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

β. $\Delta = 0 \Rightarrow a_1^2 - 4a_2 = 0$, η (2) έχει μία ρίζα διπλή: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a_1}{2}$.

Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση

της (1) είναι: $y(x) = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}$

γ. Αν $\Delta < 0 \Rightarrow a_1^2 - 4a_2 < 0$, τότε η (2) έχει 2 ρίζες συζυγείς μιγαδικές, έστω

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$$

και η γενική λύση της (1) είναι

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$\lambda_1 = 3 + 2i, \quad \lambda_2 = 3 - 2i$$

$$y(x) = c_1 e^{3x} \cos(2x) + c_2 e^{3x} \sin(2x)$$

Παραδείγματα

Να λυθούν οι κάτωθι Δ.Ε.

$$1. \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

Βρίσκουμε τη Χ.Ε.

$$\begin{array}{l} y'' \longrightarrow \lambda^2 \\ y' \longrightarrow \lambda \\ y \longrightarrow 1 \end{array} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{array} \right.$$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Αν } y(1) = -1, \quad y(0) = 2$$

$$\text{Για } y(1) = -1 \Rightarrow -1 = c_1 e^2 + c_2 e$$

$$c_1 e^2 + c_2 e = -1 \Rightarrow c_1 e + c_2 = -\frac{1}{e}$$

$$\text{Για } y(0) = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 2$$

$$\Rightarrow c_1(e-1) = -\frac{1}{e} - 2 \Rightarrow c_1 = -\frac{1+2e}{e(e-1)}$$

$$\text{κολ } c_2 = 2 + \frac{1+2e}{e(e-1)} \Rightarrow c_2 = \frac{2e^2 - 2e + 1 + 2e}{e(e-1)}$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{2e^2 + 1}{e(e-1)}$$

$$2. \quad y'' - 6y' + 9y = 0 \quad y'' \rightarrow \lambda^2 \quad y' \rightarrow \lambda \quad y \rightarrow 1$$

$$x \in : \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$$

$$\text{Γενική λύση } y(x) = c_1 e^{3x} + x c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$x \in : \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm 2i}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 2+i & \lambda_1 = a+ib \\ \lambda_2 = 2-i & \lambda_2 = a-ib \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx)$$

$a=2, b=1$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x$$

Διαφορικές Εξισώσεις 2ης- τάξης

Γραμμικές με σταθερούς συντελεστές

Μη ομογενείς και ειδική μορφή 2ου μέλους

Γενική μορφή:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) (A \cos \omega x + B \sin \omega x) e^{\rho x}$$

π.χ. $y'' - 5y' + 3y = x^2 \cos 2x e^{-2x}$ (1)

όπου $a_1, a_2, A, B, \omega, \rho$ είναι πραγματικές σταθερές και $f(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση ως προς x .

Η (1) έχει αντίστοιχη ομογενή $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ (2)

Πώς λύνουμε την (1);

1ο Βήμα

Είναι γνωστό ότι η μορφή της γενικής λύσης της Δ.Ε. (1)

$$y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x) \quad (3)$$

όπου $y_{\text{ομ}}(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς, δηλαδή της (2) και $y_{\text{μερ}}(x)$ είναι μια μερική λύση της (1).

2ο Βήμα

Βρίσκουμε τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς : $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ (2)
γράφοντας τη Χ.Ε : $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$,
άρα βρίσκουμε την $y_{\text{ομ}}(x)$.

3ο Βήμα

Βρίσκουμε μια μερική λύση $y_{\text{μερ}}(x)$ της αρχικής Δ.Ε. (1).

Είναι γνωστό ότι η μορφή μιας μερικής λύσης της Δ.Ε. (1) είναι

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^r \left[\pi(x) \cos(\omega x) + \varphi(x) \sin(\omega x) \right] e^{\rho x} \quad (4)$$

όπου r η πολλαπλότητα της ρίζας $\rho + i\omega$ στην χαρακτηριστική εξίσωση (2)

Όταν βρούμε τη μερική λύση, την αντικαθιστούμε στην αρχική Δ.Ε (1) και έτσι την υπολογίζουμε πλήρως.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η Δ.Ε $y'' - 4y = x^2 + 1$ (1)
 $a_1 = 0, a_2 = -4, f(x) = x^2 + 1, \omega = 0, \rho = 0$

$$\begin{matrix} \omega = 0 \\ \rho = 0 \end{matrix} \Rightarrow \rho + i\omega = 0 + 0i = 0$$

Η μορφή της γενικής λύσης της (1)

$$y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x)$$

1ο Βήμα

Βρίσκουμε την λύση της αντίστοιχης ομογενούς

Παίρνουμε την αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε

της (1), δηλαδή

$$y'' - 4y = 0 \quad (2)$$

$$\begin{matrix} y'' & \longrightarrow & \lambda^2 \\ y' & \longrightarrow & \lambda \\ y & \longrightarrow & 1 \end{matrix}$$



$$\lambda^2 - 4 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } y_{\text{ομ}}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2ο βήμα

Υπολογισμός $y_{\text{μερ}}(x)$

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^r [\pi(x) \cos \omega x + \varphi(x) \sin \omega x] e^{\rho x}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1, \rho = 0$$

$$\rho + i\omega = 0$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}(x) = x^r \cdot \pi(x)$$

$r =$ η πολλαπλότητα της $\rho + i\omega = 0$

στη Χ.Ε. $\lambda^2 - 4 = 0$. Επειδή $0 \neq -2, 2$

$$\Rightarrow r = 0$$

$\pi(x)$ είναι πολυώνυμο ίδιου βαθμού με την $f(x) = x^2 + 1$, άρα δευτέρου βαθμού, οπότε

$$\pi(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Τελικά η } y_{\text{μερ}}(x) = x^0 \cdot (k_1 x^2 + k_2 x + k_3)$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3 \quad (3)$$

Όμως εφ' όσον η C_3 είναι μερική λύση της Δ. Ε. (1) πρέπει να την επαληθεύει:

$$\rightarrow y'' - 4y = x^2 + 1 \quad y_{\text{μερ}}''(x) - 4y_{\text{μερ}}(x) = x^2 + 1 \quad (4)$$

$$y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}'(x) = 2k_1 x + k_2$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}''(x) = 2k_1$$

Επομένως, αντικαθιστώντας παίρνουμε (4)

$$2k_1 - 4k_1 x^2 - 4k_2 x - 4k_3 = x^2 + 1$$

$$\rightarrow -4k_1 x^2 - 4k_2 x + (2k_1 - 4k_3) = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -4k_1 = 1 \\ -4k_2 = 0 \\ 2k_1 - 4k_3 = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} k_1 = -\frac{1}{4} \\ k_2 = 0 \\ 2\left(-\frac{1}{4}\right) - 4k_3 = 1 \end{array}$$

$$k_1 = -\frac{1}{4}, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = -\frac{3}{8}$$

$$\text{και } y_{\text{μερ}}(x) = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{8}$$

Συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε. (1) είναι

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{8}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Να λυθεί η Δ.Ε. : $y'' - 3y' + 2y = x e^x$ (1)

$$a_1 = -3, a_2 = 2, f(x) = x, \omega = 0, \rho = 1$$

$$\omega = 0, \rho = 1 \Rightarrow \rho + i\omega = 1 + 0i \Rightarrow \boxed{\rho + i\omega = 1}$$

$$\text{και } y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x) \quad (2)$$

1ο Βήμα

$y_{\text{ομ}}(x) = ;$ αντίστοιχη ομογενής

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$x \in \rightarrow y'' \rightarrow \lambda^2, y' \rightarrow \lambda, y \rightarrow 1$$

$$x \in : \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{\text{ομ}}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad (3), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2ο Βήμα

$$y_{\text{μερ}}(x) = ;$$

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^r \left[p(x) \cos \omega x + q(x) \sin \omega x \right] e^{\rho x}$$

r : πολλαπλότητα της ρίζας $\rho + i\omega = 1$
στη ΧΕ

Επειδή $\lambda_1 = 1$ είναι μία από τις δύο ρίζες της ΧΕ, το $r = 1$

$$\omega = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1, \sin 0 = 0$$

$$\rho = 1$$

$$\text{οπότε : } y_{\text{μερ}}(x) = x^1 (p(x) \cdot 1 + q(x) \cdot 0) e^{1x}$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}(x) = x \cdot p(x) \cdot e^x$$

με $p(x)$ πολυώνυμο ίδιου βαθμού με την $f(x) = x$, δηλαδή 1ου βαθμού, άρα $p(x) = k_1 x + k_2$
και τελικά

$$y_{\text{μερ}}(x) = x (k_1 x + k_2) e^x \quad (4)$$

Εφ' όσον η (4) είναι μια μερική λύση της (1) πρέπει να την επαληθεύει, δηλαδή

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x \quad (1),$$

$$y_{\mu\epsilon\rho}'' - 3y_{\mu\epsilon\rho}' + 2y_{\mu\epsilon\rho} = xe^x \quad (5)$$

$$y_{\mu\epsilon\rho}(x) = x(k_1x + k_2)e^x$$

Επομένως

$$y_{\mu\epsilon\rho}' = [x(k_1x + k_2)e^x]' = [(k_1x^2 + k_2x)e^x]'$$

$$\Rightarrow y_{\mu\epsilon\rho}' = (2k_1x + k_2)e^x + (k_1x^2 + k_2x)e^x$$

$$\Rightarrow y_{\mu\epsilon\rho}' = [k_1x^2 + (2k_1 + k_2)x + k_2]e^x$$

$$\Rightarrow y_{\mu\epsilon\rho}'' = (2k_1x + 2k_1 + k_2)e^x$$

$$+ [k_1x^2 + (2k_1 + k_2)x + k_2]e^x$$

$$\Rightarrow y_{\mu\epsilon\rho}'' = [k_1x^2 + (4k_1 + k_2)x + 2k_1 + 2k_2]e^x$$

Αντικαθιστώντας τις $y_{\mu\epsilon\rho}$, $y_{\mu\epsilon\rho}'$ και $y_{\mu\epsilon\rho}''$

στην (5) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 & [k_1 x^2 + (4k_1 + k_2)x + 2k_1 + 2k_2] e^x \\
 & - 3 [k_1 x^2 + (2k_1 + k_2)x + k_2] e^x \\
 & + 2x (k_1 x + k_2) e^x = x e^x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & [(4k_1 + k_2 - 6k_1 - 3k_2 + 2k_2)x + (2k_1 + 2k_2 - 3k_2)] e^x \\
 & = x e^x
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2k_1 x + 2k_1 - k_2 = x. \text{ εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & \begin{array}{l} -2k_1 = 1 \\ 2k_1 - k_2 = 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} k_1 = -\frac{1}{2} \\ k_2 = -1 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } y_{\text{μερ}}(x) = x \left(-\frac{1}{2}x - 1 \right) e^x$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x \right) e^x$$

και η γενική λύση της Δ.Ε (1) είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - x \right) e^x$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Να λυθεί η Δ.Ε: $y'' - 4y = x^2 + 1$ (1)

$$a_1 = 0, a_2 = -4, f(x) = x^2 + 1, \omega = 0, \rho = 0$$

$$\Rightarrow \rho + i\omega = 0 + i0 \Rightarrow \rho + i\omega = 0$$

1ο Βήμα $y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x)$

Βρίσκουμε την $y_{\text{ομ}}(x)$.

Γράφουμε την αντίστοιχη ομογενή της (1)

$$y'' - 4y = 0 \quad (2)$$

Για να βρούμε την $y_{\text{ομ}}(x)$, γράφουμε

την ΧΕ:

$$y'' \rightarrow \lambda^2, \quad y' \rightarrow \lambda, \quad y \rightarrow 1$$

$$\text{ΧΕ: } \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

οπότε $y_{\text{ομ}}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ (3)
 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2ο Βήμα

Βρίσκουμε μια $y_{\text{μερ}}(x)$ της (1) , με

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^r \left(p(x) \cos \omega x + q(x) \sin \omega x \right) e^{\rho x}$$

και η αρχική Δ.Ε :

$$y'' - 4y = x^2 + 1,$$

$$\omega = 0, \rho = 0, \rho + i\omega = 0, f(x) = x^2 + 1 \text{ και}$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$$

Εφ' όσον $\rho + i\omega = 0$ και $0 \neq -2, 2$, συμπεραίνουμε ότι η πολλαπλότητα $r = 0$

άρα

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^0 \left(p(x) \cos 0x + q(x) \sin 0x \right) e^{0x}$$

$$\cos 0x = 1, \sin 0x = 0$$

$p(x)$ είναι πολυώνυμο ίδιου βαθμού με

την $f(x) = x^2 + 1$, άρα 2ου βαθμού ως

$$\text{προς } x \Rightarrow p(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3,$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3} \quad (4)$$

Εφ' όσον η (4) είναι μια μερική λύση της Δ.Ε (1):

$$y'' - 4y = x^2 + 1, \quad (1)$$

τότε πρέπει να ικανοποιεί την Δ.Ε. (1)

$$y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{\text{μερ}}''(x) - 4y_{\text{μερ}}(x) = x^2 + 1} \quad (5)$$

$$y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}'(x) = 2k_1 x + k_2$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}''(x) = 2k_1$$

Αντικαθιστούμε στην (5) και παίρνουμε

$$\Rightarrow 2k_1 - 4(k_1 x^2 + k_2 x + k_3) = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2k_1 - 4k_1 x^2 - 4k_2 x - 4k_3 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow -4k_1x^2 - 4k_2x + (2k_1 - 4k_3) = x^2 + 1$$

που είναι δύο εκ ταυτότητας ίσα πολυ-
ώνυμα, άρα

$$\begin{array}{l|l} -4k_1 = 1 & k_1 = -\frac{1}{4} \\ -4k_2 = 0 & k_2 = 0 \\ 2k_1 - 4k_3 = 1 & k_3 = -\frac{3}{8} \end{array} \Rightarrow$$

Επομένως $y_{\text{μερ}}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}$ (6)

Οπότε καταλήγουμε ότι η γενική λύση της
Δ.Ε. (1) είναι η παρακάτω

$$y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8} \quad (7)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Αν είχαμε το Π.Α.Τ.

$$y'' - 4y = x^2 + 1, \quad y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y(1) = -1$$

$$\text{για } x=0, \quad y(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = C_1 + C_2 - \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$C_1 + C_2 = \frac{11}{8}$$

$$\text{για } x=1, \quad y(1) = -1$$

$$\Rightarrow -1 = C_1 e^2 + C_2 e^{-2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = -\frac{3}{8} \Rightarrow C_1 + C_2 e^{-4} = -\frac{3}{8e^2}$$

$$\Rightarrow C_2 (1 - e^{-4}) = \frac{11}{8} + \frac{3}{8e^2}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{11e^2 + 3}{8e^2(1 - e^{-4})}$$

$$C_1 = \frac{11e^6 - 3}{8e^2(1 - e^4)}$$

και έχοντας τις τιμές C_1 και C_2 , αντικαθιστούμε στην γενική λύση (7).

4. Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x \cos x$ (1)

Λύση:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) [A \cos \omega x + B \sin \omega x] e^{px}$$

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^r [p(x) \cos \omega x + q(x) \sin \omega x] e^{px}$$

$$a_1 = -5, a_2 = 6, f(x) = 2, \omega = 1, p = 1$$

$$\begin{matrix} \omega = 1 \\ p = 1 \end{matrix} \Rightarrow \rho + i\omega = 1 + i \cdot 1 = 1 + i$$

Η γενική λύση της Δ.Ε. (1) είναι

$$y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x) \quad (2)$$

1ο Βήμα

Λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\text{x.Ε. } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$y_{\text{om}}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \quad (3)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2ο Βήμα

Εύρεση μιας μερικής λύσης $y_{\text{μερ}}(x)$

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^r [\pi(x) \cos \omega x + \varphi(x) \sin \omega x] e^{\rho x}$$

$$\rho = 1, \omega = 1, \rho + i\omega = 1 + i, f(x) = 2$$

r είναι η πολλαπλότητα του $\rho + i\omega =$

$1 + i$ στη χ.Ε που έχει ρίζες $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$.

$$1 + i \neq 3, 2 \Rightarrow r = 0$$

$\pi(x)$ και $\varphi(x)$ είναι πολώνυμο ίδιου

βαθμού με την $f(x) = 2$

Επομένως $\pi(x) = k_1$, $\varphi(x) = k_2$

Τελικά

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^0 [k_1 \cos x + k_2 \sin x] e^x$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}(x) = (k_1 \cos x + k_2 \sin x) e^x$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^x \cos x \quad (1)$$

$$\Rightarrow y''_{\text{μερ}} - 5y'_{\text{μερ}} + 6y_{\text{μερ}} = 2e^x \cos x,$$

η $y_{\text{μερ}}(x)$ επαληθεύει την Δ.Ε (1)

$$y_{\text{μερ}}(x) = (k_1 \cos x + k_2 \sin x) e^x$$

$$\Rightarrow y'_{\text{μερ}}(x) = (-k_1 \sin x + k_2 \cos x) e^x + (k_1 \cos x + k_2 \sin x) e^x$$

$$\Rightarrow y''_{\text{μερ}}(x) = (-k_1 \cos x - k_2 \sin x) e^x$$

$$+ (-k_1 \sin x + k_2 \cos x) e^x + (-k_1 \sin x + k_2 \cos x) e^x$$

$$+ (k_1 \cos x + k_2 \sin x) e^x$$

οπότε

$$(-k_1 \cos x - k_2 \sin x + k_1 \sin x + k_2 \cos x - k_1 \sin x$$

$$+ k_2 \cos x + k_1 \cos x + k_2 \sin x) e^x$$

$$+ (-5k_1 \cos x + 5k_1 \sin x - 5k_2 \sin x - 5k_2 \cos x) e^x$$

$$+ (6k_1 \cos x + 6k_2 \sin x) e^x = 2e^x \cos x$$

\Rightarrow

$$(-k_1 + k_2 + k_2 + k_1 - 5k_1 - 5k_2 + 6k_1) \cos x$$

$$+ (-k_2 + k_1 - k_1 + k_2 + 5k_1 - 5k_2 + 6k_2) \sin x = 2 \cos x$$

$$\Rightarrow (k_1 - 3k_2) \cos x + (5k_1 + k_2) \sin x = 2 \cos x$$

$$\begin{array}{l} k_1 - 3k_2 = 2 \\ 5k_1 + k_2 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 16k_1 = 2 \\ \Rightarrow k_1 = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$k_2 = -\frac{5}{8}$$

$$\text{Άρα } y_{\text{μερ}}(x) = \left(\frac{1}{8} \cos x - \frac{5}{8} \sin x \right) e^x$$

Επομένως

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{8} \cos x - \frac{5}{8} \sin x \right) e^x$$

Ομογενής $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Χαρακτηριστική Εξίσωση $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

1. $\Delta > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} \rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

2. $\Delta = 0 \rightarrow$ Διπλή ρίζα, $\lambda \rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}$

3. $\Delta < 0 \rightarrow \lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$

$\hookrightarrow y(x) = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx)$

Μη ομογενής

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) [A \cos \omega x + B \sin \omega x] e^{px}$$

$$\rightarrow y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x)$$

$$y_{\text{ομ}}(x) \rightarrow y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^r [p(x) \cos \omega x + q(x) \sin \omega x] e^{px}$$

r : πολλαπλότητα της ρ+ίω σαν ρίζα της
Χ.Ε. της αντίστοιχης ομογενούς

$\Pi(x), \varphi(x)$: πολυώνυμα ίδιου βαθμού με
την $f(x)$