

ΜΕΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ – Ισορροπία Nash

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Μικτές Στρατηγικές

- Στα παραδείγματα που έχουμε αναφερθεί έως τώρα οι παίκτες αποφασίζουν στρατηγική με τρόπο ντετερμινιστικό.
- Θα επεκτείνουμε στην ενότητα αυτή την έννοια της στρατηγικής επιτρέποντας στους παίκτες να επιλέγουν στρατηγικές με στοχαστικό τρόπο.

Μεικτές Στρατηγικές

- Σε τέτοιες περιπτώσεις μια στρατηγική ενός παίκτη είναι μια κατανομή πιθανότητας με δειγματικό χώρο το σύνολο των δυνατών στρατηγικών του.
- Αυτού του είδους οι στρατηγικές ονομάζονται **μεικτές στρατηγικές**.

Μεικτές Στρατηγικές

- Έστω για παράδειγμα ο παίκτης 1 διαθέτει το σύνολο καθαρών στρατηγικών $X_1 = \{A_1, B_1\}$
- Αν ο παίκτης διαλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και τη στρατηγική B_1 με πιθανότητα $1 - p$, τότε λέμε ότι **το διάνυσμα $(p, 1 - p)$ είναι η μεικτή στρατηγική του παίκτη 1 για τις στρατηγικές του A_1, B_1 αντίστοιχα.**

Μεικτές Στρατηγικές

- Αν για παράδειγμα $p = \frac{1}{3}$ τότε η μικτή στρατηγική του παίκτη 1 είναι το διάνυσμα $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Παράδειγμα 1

- Δύο παίκτες οι 1,2 ανακοινώνουν ταυτόχρονα μία από τις δύο λέξεις. **«Κόκκινο»** ή **«Μαύρο»**.
- Αν οι ανακοινώσεις είναι ίδιες ο παίκτης 1 πληρώνει 1€ στον παίκτη 2.
- Αν οι ανακοινώσεις είναι διαφορετικές ο παίκτης 2 πληρώνει 1€ στον παίκτη 1.

Παράδειγμα 1

■ Θεωρούμε τις εξής μεικτές στρατηγικές:

➤ Παίκτης 1: $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Δηλαδή ο παίκτης 1 επιλέγει «Κόκκινο» με πιθανότητα $\frac{3}{4}$ και «Μαύρο» με πιθανότητα $\frac{1}{4}$.

Παράδειγμα 1

➤ Παίκτης 2: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Δηλαδή ο παίκτης 2 επιλέγει «Κόκκινο» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και «Μαύρο» με πιθανότητα $\frac{2}{3}$.

Παράδειγμα 1

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε σε πίνακα την αναπαράσταση του παίγνιου με μεικτές στρατηγικές.

Παράδειγμα 1

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
Παίκτης 1	«Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$	-1, 1	1, -1
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	1, -1	-1, 1

Παράδειγμα 1

- Η πιθανότητα να επιλέξουν και οι δύο παίκτες «Κόκκινο» είναι:

$$P(\text{Κόκκινο}, \text{Κόκκινο}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

- Η πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης «Κόκκινο» και ο δεύτερος «Μαύρο» είναι:

$$P(\text{Κόκκινο}, \text{Μαύρο}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
Παίκτης 1	«Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$	-1, 1	1, -1
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	1, -1	-1, 1

Παράδειγμα 1

- Η πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης «Μαύρο» και ο δεύτερος «Κόκκινο» είναι:

$$P(\text{Μαύρο}, \text{Κόκκινο}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

- Η πιθανότητα να επιλέξουν και οι δύο παίκτες «Μαύρο» είναι:

$$P(\text{Μαύρο}, \text{Μαύρο}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
Παίκτης 1	«Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$	-1, 1	1, -1
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	1, -1	-1, 1

Παράδειγμα 1

- Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1, V_1 με βάση τις παραπάνω μεικτές στρατηγικές είναι:

$$V_1 = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot (-1)$$
$$= \frac{1}{6}$$

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
Παίκτης 1	«Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$	-1, 1	1, -1
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	1, -1	-1, 1

Παράδειγμα 1

- Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 2, V_2 με βάση τις παραπάνω μεικτές στρατηγικές είναι:

$$V_2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{12} \cdot (-1) + \frac{1}{6} \cdot 1$$
$$= -\frac{1}{6}.$$

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
Παίκτης 1	«Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$	-1, 1	1, -1
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	1, -1	-1, 1

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Μεικτές στρατηγικές χρησιμοποιούμε σε παίγνια σταθερού αθροίσματος στα οποία δεν υπάρχουν ισορροπίες Nash με αμιγείς στρατηγικές.

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Μεικτές στρατηγικές χρησιμοποιούμε επίσης όταν θέλουμε να βρούμε εκτός από τις ισορροπίες που προκύπτουν με καθαρές στρατηγικές και τις ισορροπίες που προκύπτουν με μεικτές στρατηγικές.

Παράδειγμα 2 (Εύρεση Ισορροπίας Nash με Αμιγείς και Καθαρές Στρατηγικές)

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών $N = \{A, B\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη A είναι $X_A = \{A_1, A_2\}$ και του παίκτη B είναι $X_B = \{B_1, B_2\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα αποδόσεων.

Παράδειγμα 2

	B_1	B_2
A_1	2, 1	0, 0
A_2	0, 0	1, 2

Παράδειγμα 2

- Υποθέτουμε ότι ο παίκτης A επιλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και την στρατηγική A_2 με πιθανότητα $1 - p$.
- Υποθέτουμε επίσης ότι ο παίκτης B επιλέγει την στρατηγική B_1 με πιθανότητα q και την στρατηγική B_2 με πιθανότητα $1 - q$.

Παράδειγμα 2

	$B_1(q)$	$B_2(1 - q)$
$A_1(p)$	2, 1	0, 0
$A_2(1 - p)$	0, 0	1, 2

Παράδειγμα 2

- Σκοπός μας είναι στο παραπάνω παίγνιο να βρούμε όλες τις ισορροπίες (καθαρές και μεικτές).

Παράδειγμα 2

Βήμα 1:

Θα βρούμε τις βέλτιστες επιλογές για τον παίκτη 1.

Δεδομένου ότι ο παίκτης B επιλέγει την στρατηγική B_1 με πιθανότητα q και την στρατηγική B_2 με πιθανότητα $1 - q$, έχουμε:

	$B_1(q)$	$B_2(1 - q)$
$A_1(p)$	2, 1	0, 0
$A_2(1 - p)$	0, 0	1, 2

Παράδειγμα 2

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη A αν επιλέξει την στρατηγική A_1 είναι:

$$V_A(A_1, q) = 2q + 0(1 - q) = 2q$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη A αν επιλέξει την στρατηγική A_2 είναι:

$$V_A(A_2, q) = 0q + 1(1 - q) = 1 - q.$$

Παράδειγμα 2

■ Έχουμε ότι:

$$V_A(A_1, q) < V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q < \frac{1}{3}$$

$$V_A(A_1, q) > V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q > \frac{1}{3}$$

$$V_A(A_1, q) = V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$$

Παράδειγμα 2

Επομένως:

- Αν $q < \frac{1}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη Α είναι να διαλέξει την στρατηγική με A_2 με πιθανότητα $1 - p = 1$, δηλαδή έχουμε $p = 0$.
- Αν $q > \frac{1}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη Α είναι να διαλέξει την στρατηγική με A_1 με πιθανότητα $p = 1$.

Παράδειγμα 2

- Αν $q = \frac{1}{3}$ τότε επιλογή για τον παίκτη A είναι αδιάφορη, δηλαδή μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε τιμή $p \in [0,1]$.

Παράδειγμα 2

Βήμα 2:

Θα βρούμε τις βέλτιστες επιλογές για τον παίκτη 2.

Δεδομένου ότι ο παίκτης A επιλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και την στρατηγική A_2 με πιθανότητα

$1 - p$, έχουμε:

	$B_1(q)$	$B_2(1 - q)$
$A_1(p)$	2, 1	0, 0
$A_2(1 - p)$	0, 0	1, 2

Παράδειγμα 2

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη B αν επιλέξει την στρατηγική B_1 είναι:

$$V_B(B_1, p) = 1p + 0(1 - p) = p.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη B αν επιλέξει την στρατηγική B_2 είναι:

$$V_B(B_2, p) = 0p + 2(1 - p) = 2 - 2p.$$

$A_1(p)$

$A_2(1 - p)$

	$B_1(q)$	$B_2(1 - q)$
$A_1(p)$	2, 1	0, 0
$A_2(1 - p)$	0, 0	1, 2

Παράδειγμα 2

■ Έχουμε ότι:

$$V_B(B_1, p) < V_B(B_2, p) \Leftrightarrow p < \frac{2}{3}$$

$$V_B(B_1, p) > V_B(B_2, p) \Leftrightarrow p > \frac{2}{3}$$

$$V_B(B_1, p) = V_B(B_2, p) \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$$

Παράδειγμα 2

Επομένως:

- Αν $p < \frac{2}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη B είναι να διαλέξει την στρατηγική με B_2 με πιθανότητα $1 - q = 1$, δηλαδή έχουμε $q = 0$.
- Αν $p > \frac{2}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη B είναι να διαλέξει την στρατηγική με B_1 με πιθανότητα $q = 1$.

Παράδειγμα 2

- Αν $p = \frac{2}{3}$ τότε η επιλογή για τον παίκτη A είναι αδιάφορη, δηλαδή μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε τιμή $q \in [0,1]$.

Βήμα 3: Στη συνέχεια βρούμε όλες τις ισορροπίες Nash Με καθαρές και μεικτές στρατηγικές).

Παράδειγμα 2

Βέλτιστες Στρατηγικές Παίκτη 1:

- Αν $q < \frac{1}{3}$ τότε $p = 0, (1_A)$
- Αν $q > \frac{1}{3}$ τότε $p = 1, (2_A)$
- Αν $q = \frac{1}{3}$ τότε $p \in [0, 1], (3_A)$

Βέλτιστες Στρατηγικές Παίκτη 2:

- Αν $p < \frac{2}{3}$ τότε $q = 0, (1_B)$
- Αν $p > \frac{2}{3}$ τότε $q = 1, (2_B)$
- Αν $p = \frac{2}{3}$ τότε $q \in [0, 1], (3_B)$

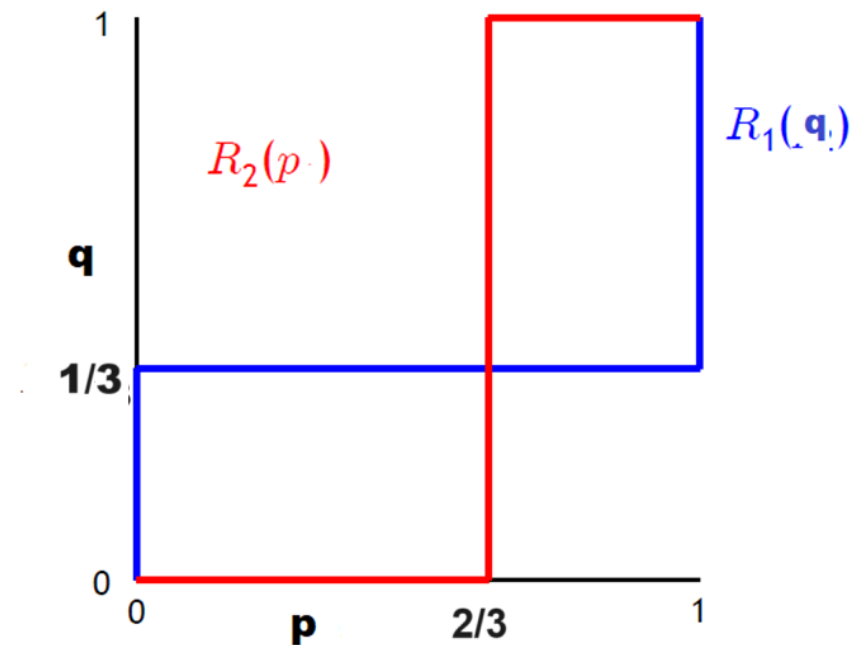
Παράδειγμα 2

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = 0, q = 0$ καθαρή στρατηγική (A_2, B_2) με πιθανότητα 1. (Από (1_A) και (1_B))
- $p = 1, q = 1$ καθαρή στρατηγική (A_1, B_1) με πιθανότητα 1. (Από (2_A) και (2_B))
- $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$ Μεικτή στρατηγική (Από (3_A) και (3_B)).

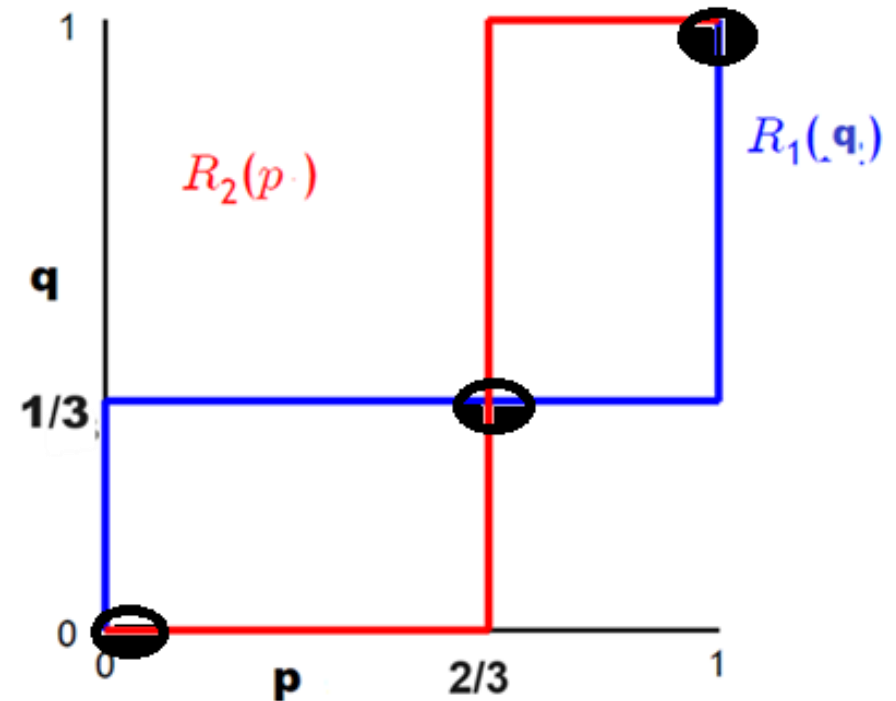
Παράδειγμα 2

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την γραφική επίλυση του παίγνιου.



Παράδειγμα 2

Τα σημεία τομής των γραμμών των βέλτιστων αντιδράσεων των δύο παικτών καταδεικνύουν τα σημεία ισορροπίας Nash με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές.



Παράδειγμα 2

Παρατήρηση:

Στην περίπτωση της ισορροπίας με μεικτές στρατηγικές $(p, q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ για τις αναμενόμενες αποδόσεις των δύο παικτών ισχύουν τα εξής:

	$B_1(q)$	$B_2(1 - q)$
$A_1(p)$	2, 1	0, 0
$A_2(1 - p)$	0, 0	1, 2

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

$$V_A = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$V_B = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Δηλαδή:

$$V_A = V_B$$

	$B_1(q)$	$B_2(1 - q)$
$A_1(p)$	2,1	0,0
$A_2(1 - p)$	0,0	1,2

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

- Αποδεικνύεται το παρακάτω πολύ βασικό Θεώρημα ύπαρξης Ισορροπίας Nash της Θεωρίας Παιγνίων.

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

Θεώρημα Ύπαρξης Ισορροπίας Nash

Κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών στο οποίο το πλήθος των στρατηγικών για τον κάθε παίκτη είναι πεπερασμένο έχει τουλάχιστον μία ισορροπία Nash με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές.

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

Παρατηρήσεις

- Το Θεώρημα ύπαρξης ισορροπίας Nash δεν μας δίνει καμία πληροφορία για τον τρόπο με τον οποίο οι παίκτες μπορούν να καταλήξουν σε ισορροπία Nash ή έναν εύκολο τρόπο να φτάσουν σε αυτήν.
- Σε σύνθετα παίγνια η εύρεση σημείου ισορροπίας Nash μπορεί να είναι μια υπολογιστικά εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία.

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

Παρατηρήσεις

- Η ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο λειτουργεί καλύτερα όταν είναι μοναδική, αφού σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μία και μοναδική επιλογή για τους λογικούς παίκτες του παιχνίτου.

Μεικτές Στρατηγικές – Αρχή Αδιαφορίας

- Για την εύρεση Ισορροπίας Nash σε μεικτές στρατηγικές μπορούμε να ακολουθήσουμε και την ακόλουθη μέθοδο η οποία είναι γνωστή ως «**Αρχή Αδιαφορίας**».

Μικτές Στρατηγικές – Αρχή Αδιαφορίας

Αρχή της Αδιαφορίας

Η στρατηγική ισορροπίας με μικτές στρατηγικές για τον κάθε παίκτη μπορεί να βρεθεί αν εξισώσουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις του άλλου παίκτη από τις καθαρές στρατηγικές.

Άσκηση 1

Να βρείτε όλες τις ισορροπίες που υπάρχουν στο παίγνιο του πρώτου παραδείγματος.

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» (q)	«Μαύρο» ($1 - q$)
Παίκτης 1	«Κόκκινο» (p)	$-1, 1$	$1, -1$
	Μαύρο ($1 - p$)	$1, -1$	$-1, 1$

Άσκηση 1 – Λύση

Παρατηρούμε ότι το παίγνιο δεν έχει ισορροπία Nash με καθαρές στρατηγικές.

Για μεικτές στρατηγικές θα εφαρμόσουμε την Αρχή Αδιαφορίας.

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» (q)	«Μαύρο» ($1 - q$)
Παίκτης 1	«Κόκκινο» (p)	-1, 1	1, -1
	Μαύρο ($1 - p$)	1, -1	-1, 1

Άσκηση 1 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική K_1 είναι:

$$V_1(K_1, q) = 1 - 2q.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική M_1 είναι:

$$V_1(M_1, q) = 2q - 1.$$

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» (q)	«Μαύρο» ($1 - q$)
Παίκτης 1	«Κόκκινο» (p)	-1, 1	1, -1
	Μαύρο ($1 - p$)	1, -1	-1, 1

Άσκηση 1 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 1 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_1(K_1, q) = V_1(M_1, q)$$

Δηλαδή

$$1 - 2q = 2q - 1$$

Ή

$$q = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 1 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική K_2 είναι:

$$V_2(K_2, p) = 2p - 1.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική M_2 είναι:

$$V_2(M_2, p) = 1 - 2p$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική K_2 είναι:

$$V_2(K_2, p) = 2p - 1.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική M_2 είναι:

$$V_2(M_2, p) = 1 - 2p$$

Άσκηση 1 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 2 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_2(K_2, p) = V_2(M_2, p)$$

Δηλαδή

$$1 - 2p = 2p - 1$$

Ή

$$p = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 1 – Λύση

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$ Μεικτή στρατηγική.

Άσκηση 2

Να βρείτε τυχόν ισορροπίες με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές που υπάρχουν στο παρακάτω παίγνιο.

	A_2	B_2
A_1	2, 0	1, 1
B_1	3, 4	1, 2

Άσκηση 3

Να βρείτε τυχόν ισορροπίες με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές που υπάρχουν στο παρακάτω παίγνιο.

	A_2	B_2
A_1	$1, -1$	$0, 0$
B_1	$0, 0$	$0, 6$

Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά
Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.

Αλιπράντης, Χ., Chakrabarti, S. (2004). Παίγνια και λήψη
αποφάσεων. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Μαγείρου, Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις – Μια
εισαγωγική προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική.

Μηλολιδάκης, Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων – Μαθηματικά
Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας. Εκδόσεις
«Σοφία».

Βιβλιογραφία