

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΘΕΜΑΤΑ

Διδάσκων: Κ. Ι. Παπαχρήστου

1. Σωματίδιο εκτελεί ομαλή καμπυλόγραμμη κίνηση. Ναδειχθεί ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσής του συνδέονται με τη σχέση: $v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z = 0$.
2. Εξηγήστε γιατί η κίνηση ενός βλήματος στο πεδίο βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης λαμβάνει χώρα σε σταθερό κατακόρυφο επίπεδο. (Αγνοούμε την αντίσταση του αέρα.)
3. Είναι δυνατόν ένα σώμα να βρεθεί σε θέση ισορροπίας χωρίς να είναι ακίνητο; Να βρεθεί σε ακινησία χωρίς να είναι σε θέση ισορροπίας; Δώστε παραδείγματα.
4. Να διατυπωθεί ο νόμος της αδράνειας και να δοθεί ο ορισμός της έννοιας ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς.
5. Επιλέξτε τις προτάσεις που κατά τη γνώμη σας είναι σωστές, και δικαιολογήστε τις επιλογές ή μη-επιλογές σας:
 - α. Ένας αδρανειακός παρατηρητής δεν υπόκειται σε καμία απολύτως αλληλεπίδραση με τον υπόλοιπο κόσμο.
 - β. Ένας αδρανειακός παρατηρητής κινείται με σταθερή ταχύτητα.
 - γ. Δύο αδρανειακοί παρατηρητές δεν επιταχύνονται ο ένας ως προς τον άλλον.
6. Βρισκόμαστε μέσα σε ένα κινούμενο δωμάτιο. Το δωμάτιο είναι κλειστό (χωρίς παράθυρα) και κενό από αέρα, και μέσα σ' αυτό κινείται ελεύθερα ένα αβαρές σωματίδιο. Πώς θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε αν το δωμάτιο ορίζει ή όχι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς; Εξηγήστε αναλυτικά.
7. Ένα κιβώτιο είναι τοποθετημένο πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο μεταβλητής γωνίας θ . Οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ κιβωτίου και επιπέδου είναι μ και μ' , αντίστοιχα. (α) Βρείτε τις τιμές της γωνίας θ για τις οποίες το κιβώτιο δεν ολισθαίνει. (β) Βρείτε την τιμή της θ για την οποία το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω στο επίπεδο.
8. Με δεδομένο τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, να αποδειχθεί αναλυτικά η αρχή διατήρησης της στροφορμής για ένα σημειακό σωματίδιο.
9. Σωματίδιο εκτελεί ομαλή καμπυλόγραμμη κίνηση πάνω σε σταθερό επίπεδο, κάτω από την επίδραση ολικής δύναμης σταθερού μέτρου. Δείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου είναι ομαλή κυκλική.
10. Οι συντεταγμένες της θέσης ενός σωματιδίου μάζας m στο χώρο δίνονται σαν συναρτήσεις του χρόνου από τις εξισώσεις $\{x=A \cos \omega t, y=A \sin \omega t, z=\lambda t\}$, όπου A, ω, λ θετικές σταθερές. Δείξτε ότι η ολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι εξ ολοκλήρου κεντρομόλος, και βρείτε το μέτρο της δύναμης καθώς και την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς.

11. Τι είδους κίνηση εκτελεί ένα σωματίδιο αν η ολική δύναμη που δρα πάνω του είναι (α) εξ ολοκλήρου επιτρόχια; (β) εξ ολοκλήρου κεντρομόλος;
12. Στην αρχή O των συντεταγμένων του χώρου μας (ο οποίος είναι κενός από αέρα και βρίσκεται έξω από το πεδίο βαρύτητας) είναι σταθερά τοποθετημένο ένα ηλεκτρικό φορτίο Q , ενώ ένα άλλο φορτίο q κινείται ελεύθερα στο χώρο. Να εξεταστεί αν η στροφορμή τού q ως προς το σημείο O μένει σταθερή κατά την κίνηση του φορτίου. Θα αλλάξει η απάντησή σας αν θεωρήσετε τη στροφορμή τού q ως προς ένα διαφορετικό σημείο O' ; (Το Q παραμένει στο αρχικό σημείο O !)
13. Φορτισμένο σωματίδιο q κινείται έξω από το πεδίο βαρύτητας και κάτω από την επίδραση της δύναμης Coulomb που του ασκεί φορτίο Q σταθερά τοποθετημένο στο σημείο $O \equiv (0, 0, 0)$ του συστήματος συντεταγμένων (x, y, z) . Τη χρονική στιγμή $t=0$ το φορτίο q βρίσκεται στο σημείο $(1, -1, 0)$ και η ορμή του είναι $(-1, 3, 0)$ (σε μονάδες S.I.). Βρείτε τη στροφορμή τού q ως προς το O τη χρονική στιγμή $t=3$.
14. (α) Να οριστεί η έννοια μιας συντηρητικής δύναμης και ναδειχθεί ότι, κάτω από την επίδραση μιας τέτοιας δύναμης, η ολική μηχανική ενέργεια ενός σωματιδίου μένει σταθερή. Τι ισχύει όταν στο σωματίδιο, εκτός από τις συντηρητικές δυνάμεις, δρουν και μη-συντηρητικές; (β) Δείξτε αναλυτικά ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι συντηρητική. (Θεωρήστε, για ευκολία, το πεδίο βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης.) Όμοια, δείξτε ότι η ελαστική δύναμη, καθώς και η δύναμη Coulomb, είναι συντηρητικές. (γ) Εξηγήστε γιατί η κινητική τριβή δεν μπορεί να είναι συντηρητική δύναμη.
15. (α) Ισχύει το ΘΜΚΕ όταν στο σύστημα επενεργούν και μη-συντηρητικές δυνάμεις; (β) Υπάρχουν περιορισμοί στη χρήση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, ή θα πρέπει να τη θεωρούμε σαν μια θεμελιώδη γενική αρχή που ισχύει σε κάθε περίπτωση; (γ) Για τη μελέτη της κίνησης ενός εκκρεμούς χρησιμοποιούμε συχνά την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Πληρούνται οι προϋποθέσεις για κάτι τέτοιο; Εξηγήστε αναλυτικά.
16. Δύο σφαιρίδια με μάζες m και $2m$ απέχουν μεταξύ τους απόσταση a . (α) Πού βρίσκεται το κέντρο μάζας του συστήματος; (β) Πώς θα τροποποιηθεί η θέση του σημείου αυτού ως προς το σύστημα των σωματιδίων αν μετατοπίσουμε την αρχή των συντεταγμένων μας από το σημείο $(0, 0, 0)$ στο σημείο $(1, -1, 2)$;
17. Ναδειχθεί αναλυτικά ότι η μεταβολή της ολικής ορμής ενός συστήματος σωματιδίων οφείλεται αποκλειστικά στις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο σύστημα.
18. Δύο μάζες m_1 και m_2 είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με ελατήριο και τοποθετημένες πάνω σε λεία, οριζόντια επιφάνεια. Συμπιέζουμε το ελατήριο και στη συνέχεια αφήνουμε τις μάζες ελεύθερες. (α) Πώς θα κινηθεί το κέντρο μάζας του συστήματος; (β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία οι δύο μάζες θα κινούνται στην ίδια κατεύθυνση;
19. Δύο μάζες m_1 και $m_2=m_1/2$ είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με ελατήριο και τοποθετημένες πάνω σε λεία, οριζόντια επιφάνεια. Συμπιέζουμε το ελατήριο και στη συνέχεια αφήνουμε τις μάζες ελεύθερες. Μετά από $t=3s$, η μάζα m_1 έχει αποκτήσει

ταχύτητα \vec{v}_1 . Να βρεθεί (α) η ταχύτητα \vec{v}_2 της m_2 , και (β) η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος, τη στιγμή $t=3s$. Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία οι δύο μάζες θα κινούνται στην ίδια κατεύθυνση;

20. Σε μία γωνία ενός δωματίου, το οποίο είναι κενό από αέρα και έξω από το πεδίο βαρύτητας, βρίσκεται σταθερά τοποθετημένο ένα φορτίο Q . Ένα σύστημα φορτίων q_1, q_2, q_3, \dots κινείται μέσα στο δωμάτιο. Να εξεταστεί η χρονική μεταβολή της ολικής στροφορμής του κινούμενου συστήματος φορτίων ως προς τη γωνία αυτή του δωματίου, καθώς και ως προς μια οποιαδήποτε άλλη γωνία (στην οποία δεν βρίσκεται το Q).

21. Ένα σύστημα φορτισμένων σωματιδίων κινείται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Να εξεταστεί ποια από τα παρακάτω φυσικά μεγέθη μένουν σταθερά κατά την κίνηση του συστήματος:

- α. Ολική ορμή
- β. Ταχύτητα κέντρου μάζας
- γ. Ολική στροφορμή ως προς την αρχή O των συντεταγμένων του επιπέδου
- δ. Ολική στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας
- ε. Ολική κινητική ενέργεια
- ζ. Ολική μηχανική ενέργεια

Πώς τροποποιείται η απάντησή σας αν το σύστημα των φορτίων βρίσκεται μέσα στο πεδίο Coulomb που δημιουργείται από ένα εξωτερικό φορτίο τοποθετημένο σταθερά στο σημείο O του επιπέδου;

22. Ποια φυσικά μεγέθη μένουν πάντα σταθερά κατά τη διάρκεια μιας κρούσης, και ποιο μένει σταθερό υπό προϋποθέσεις; Εξηγήστε αναλυτικά.

23. Δείξτε αναλυτικά ότι στην πλαστική κρούση (όπου τα συγκρουόμενα σώματα δημιουργούν συσσωμάτωμα) είναι αδύνατη η διατήρηση της ολικής κινητικής ενέργειας. Πώς εξηγείται αυτό με βάση το ΘΜΚΕ;

24. (α) Δείξτε ότι, κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων με ίσες μάζες, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. (β) Μια μικρή μπάλα, φτιαγμένη από σκληρό υλικό, προσκρούει κάθετα σε έναν τοίχο και ανακλάται. Συγκρίνετε τις ταχύτητες της μπάλας αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση.

25. Δείξτε ότι η θέση του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωματιδίων ως προς το σύστημα είναι ανεξάρτητη από την (αυθαίρετη) επιλογή της αρχής των συντεταγμένων του χώρου μας. [Υπόδειξη: Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο με την οποία αποδείξαμε (στο Παράρτημα Α του βιβλίου) μια παρόμοια πρόταση για το κέντρο παράλληλων και ομόροπων δυνάμεων.]

26. (α) Έστω σύστημα αποτελούμενο από N σωματίδια με μάζες m_1, m_2, \dots, m_N . Έστω C το κέντρο μάζας του συστήματος. Δείξτε ότι, αν τοποθετήσουμε ένα νέο σωματίδιο, μάζας m , στο σημείο C , το κέντρο μάζας του συστήματος των $(N+1)$ σωματιδίων θα βρίσκεται και πάλι στο C . (β) Θεωρούμε σύστημα N σωματιδίων με μάζες m_1, m_2, \dots, m_N . Η θέση του σωματιδίου m_N συμπίπτει με το κέντρο μάζας C του συστήματος. Αφαιρούμε τώρα το σωματίδιο αυτό από το σύστημα. Δείξτε ότι το κέντρο μάζας του συστήματος των $(N-1)$ σωματιδίων που απομένουν θα βρίσκεται και πάλι στο σημείο C .

27. Έστω O η αρχή των συντεταγμένων του αδρανειακού συστήματος αναφοράς μας, και έστω C το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων. Δείξτε ότι η στροφορμή \vec{L} του συστήματος ως προς το O , και η στροφορμή \vec{L}_C του συστήματος ως προς το C , συνδέονται με τη σχέση $\vec{L} = \vec{L}_C + M(\vec{r}_C \times \vec{v}_C)$, όπου M η ολική μάζα του συστήματος και \vec{r}_C, \vec{v}_C το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα, αντίστοιχα, του C ως προς το O . [Υπόδειξη: Ως προς το κέντρο μάζας, $\sum_i m_i \vec{r}_{i,C} = 0, \sum_i m_i \vec{v}_{i,C} = 0$ (γιατί;.)]

28. Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια E_k ενός συστήματος σωματιδίων ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς μας, και η κινητική ενέργεια $E_{k,C}$ του συστήματος των σωματιδίων ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας C , συνδέονται με τη σχέση $E_k = E_{k,C} + \frac{1}{2} M v_C^2$, όπου M η ολική μάζα του συστήματος και \vec{v}_C η ταχύτητα του κέντρου μάζας C ως προς το σύστημα αναφοράς μας. [Υπόδειξη: Ως προς το κέντρο μάζας, $\sum_i m_i \vec{v}_{i,C} = 0$ (γιατί;.)]

29. Αποδείξτε ότι η θεμελιώδης σχέση $d\vec{L}/dt = \vec{T}_{εξ}$ ανάμεσα στην ολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων και την ολική εξωτερική ροπή που δρα στο σύστημα, ισχύει πάντοτε ως προς το κέντρο μάζας C του συστήματος (ακόμα και αν το C επιταχύνεται ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς μας). [Υπόδειξη: Ένας τρόπος είναι να παραγωγίσετε τη σχέση $\vec{L} = \vec{L}_C + M(\vec{r}_C \times \vec{v}_C)$, που αποδείχθηκε σε προηγούμενο ερώτημα, και να λάβετε υπόψη ότι $\vec{F}_{εξ} = \sum_i \vec{F}_i = M \vec{a}_C$, καθώς και ότι η σχέση $d\vec{L}/dt = \vec{T}_{εξ} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ ισχύει ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς μας.]

30. Να οριστεί η έννοια του κέντρου βάρους ενός στερεού σώματος και ναδειχθεί ότι το σημείο αυτό συμπίπτει με το κέντρο μάζας του σώματος. (Θεωρήστε, για ευκολία, ότι το σώμα συντίθεται από ένα πλήθος σωματιδίων των οποίων οι σχετικές θέσεις και αποστάσεις μένουν σταθερές.) Πώς μεταβάλλεται η θέση του σημείου αυτού ως προς το σώμα αν μετατοπίσουμε την αρχή των συντεταγμένων του χώρου μας;

31. Εξηγήστε γιατί ένα σώμα περιστρέφεται ευκολότερα γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, σε σύγκριση με οποιονδήποτε άλλο παράλληλο άξονα που δεν διέρχεται από το σημείο αυτό.

32. Θα έχετε παρατηρήσει ότι οι αθλητές των καταδύσεων «μαζεύουν» το σώμα τους προκειμένου να αυξήσουν τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής τους όταν είναι στον αέρα. Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

33. Σε δύο διαφορετικά σημεία ενός στερεού σώματος ενσωματώνουμε ηλεκτρικά φορτία $+q$ και $-q$, και στη συνέχεια τοποθετούμε το σώμα ανάμεσα στις πλάκες ενός επίπεδου πυκνωτή (το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του πυκνωτή είναι ομογενές). Το σύστημα βρίσκεται έξω από το πεδίο βαρύτητας. Εξετάστε αν μεταβάλλονται ή όχι με το χρόνο (α) η ορμή του σώματος, (β) η ταχύτητα του κέντρου μάζας του, (γ) η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του γύρω από το κέντρο μάζας του, και (δ) η κινητική ενέργεια του σώματος.

34. Μια μπάλα του μπάσκετ βρίσκεται στον αέρα κατά τη διάρκεια ενός αγώνα. Εξετάστε αν μεταβάλλονται ή όχι με το χρόνο (α) η ορμή της μπάλας, (β) η ταχύτητα του κέντρου μάζας της, (γ) η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γύρω από το κέντρο μάζας της, και (δ) η κινητική και η ολική μηχανική ενέργεια της μπάλας.

35. Δείξτε ότι η δυναμική ενέργεια ενός στερεού σώματος που κινείται στο πεδίο βαρύτητας δίνεται από τη σχέση $E_p = Mgy_C$, όπου M η μάζα του σώματος και y_C η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου μάζας του από ένα οριζόντιο επίπεδο αναφοράς. (Θεωρήστε, για ευκολία, ότι το σώμα συντίθεται από ένα πλήθος σωματιδίων των οποίων οι σχετικές θέσεις και αποστάσεις μένουν σταθερές. Η έκφραση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ενός σημειακού σωματιδίου θεωρείται γνωστή.)

36. (α) Δείξτε ότι η καθαρή κύλιση ενός κυλίνδρου πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο είναι αδύνατη αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και του επιπέδου είναι μηδέν. Ισχύει το συμπέρασμά σας αν το επίπεδο κύλισης είναι οριζόντιο; (β) Θα χρησιμοποιούσατε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να μελετήσετε την κύλιση πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο; (Θυμηθείτε την παρουσία στατικής τριβής.)

37. Σε προβλήματα κύλισης πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, η σχέση στροφορμής–ροπής εφαρμόζεται ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας C του σώματος. Όμως, το C επιταχύνεται ως προς το επίπεδο, άρα δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αρχή των συντεταγμένων ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Υπάρχει κάποιο λάθος στην προσέγγιση τέτοιων προβλημάτων;

38. Έχει βρεθεί πειραματικά ότι η υδροστατική πίεση μέσα στη θάλασσα αυξάνει κατά περίπου μία ατμόσφαιρα για κάθε 10 μέτρα βάθους. Μπορείτε να το αποδείξετε; Θεωρήστε ότι $g=9.8 \text{ m/s}^2$ και $\rho=1.03 \text{ g/cm}^3$ (πυκνότητα θαλασσινού νερού).

39. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί θεωρητικά η αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις ισχύει;

40. Να διατυπωθούν και να αποδειχθούν θεωρητικά οι αρχές των Pascal και Αρχιμήδη.

41. Να περιγραφεί η αρχή λειτουργίας (α) του ανοιχτού μανομέτρου, (β) του υδραυλικού πιεστηρίου.

42. Ποιο σώμα δέχεται μεγαλύτερη άνωση όταν είναι ολόκληρο βυθισμένο στο νερό: (α) Μια συμπαγής μεταλλική σφαίρα ή ένας λεπτός μεταλλικός φλοιός με την ίδια ακτίνα; (β) Μια συμπαγής μεταλλική σφαίρα ή μια συμπαγής ξύλινη σφαίρα με την ίδια ακτίνα; (γ) Μια μικρή μεταλλική σφαίρα ή μια μεγάλη ξύλινη σφαίρα;

43. Ένα κομμάτι ξύλου όταν επιπλέει σε νερό βυθίζεται κατά τα $2/3$ του όγκου του, ενώ μέσα σε λάδι βυθίζεται κατά τα $9/10$ του όγκου του. Αν η πυκνότητα του νερού είναι $\rho_v=1 \text{ g/cm}^3$, να βρεθεί η πυκνότητα ρ_λ του λαδιού.

44. Ένα παγάκι επιπλέει σε ένα ποτήρι νερό. Θα μεταβληθεί ή όχι η στάθμη του νερού όταν λιώσει το παγάκι;

45. Ο νόμος του Bernoulli αποτελεί θεμελιώδη αρχή της Μηχανικής, ή είναι απλά ένα θεώρημα που μπορεί να αποδειχθεί με βάση άλλες, πιο θεμελιώδεις αρχές; Ποια είναι η φυσική σημασία του νόμου αυτού;
46. Με δεδομένο το νόμο του Bernoulli, να αποδειχθεί η θεμελιώδης εξίσωση της Υδροστατικής.
47. Να δειχθεί ότι: (α) Κατά μήκος οριζόντιας φλέβας με σταθερή διατομή, η υδροστατική πίεση είναι σταθερή. (β) Σε οριζόντια ροή, η πίεση είναι μέγιστη εκεί όπου η διατομή της φλέβας είναι μέγιστη.
48. Θεωρούμε οριζόντιο σωλήνα μεταβλητής διατομής, μέσα στον οποίο ρέει υγρό πυκνότητας ρ . Έστω A_1 και A_2 οι διατομές σε δύο σημεία του σωλήνα, όπου $A_1 > A_2$. Η διαφορά πιέσεων ($P_1 - P_2$) στα σημεία αυτά μετρήθηκε και βρέθηκε ίση με ΔP . (α) Να συγκριθούν οι πιέσεις P_1 και P_2 . (β) Να υπολογιστεί η παροχή της φλέβας.
49. Δύο πανομοιότυπα βαρέλια που βρίσκονται σε ένα σαλούν είναι γεμάτα το ένα με νερό και το άλλο με ούισκι. Ένας καουμπού που εισέρχεται στο σαλούν πυροβολεί και τα δύο βαρέλια κοντά στους πάτους τους. Ελπίζει πως, από τις ταχύτητες εκροής των υγρών από τις τρύπες που άνοιξαν οι σφαίρες, θα μπορέσει να ξεχωρίσει το νερό απ' το ούισκι. Πώς κρίνετε τις γνώσεις του στην Υδροδυναμική;
50. Θα έχετε παρατηρήσει ότι η ροή νερού ή λαδιού από μια βρύση γίνεται στενότερη καθώς το υγρό πέφτει προς τα κάτω. Μπορείτε να το εξηγήσετε αυτό με βάση τους νόμους της Υδροδυναμικής;