Έργο μιας χρονικά μεταβαλλόμενης δύναμης

Κ. Ι. Παπαχρήστου

Τομέας Φυσικών Επιστημών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

papachristou@snd.edu.gr

Θα συζητήσουμε μερικά λεπτά σημεία που αφορούν το έργο ενός χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου δυνάμεων. Ειδικότερα, θα εξηγήσουμε γιατί ένα τέτοιο πεδίο δεν μπορεί να είναι συντηρητικό, ακόμα κι αν είναι αστρόβιλο.

1. Εισαγωγή

Σε ένα πρόσφατο άρθρο [1] συζητήσαμε μια λανθασμένη αντίληψη που εμφανίζεται συχνά στη βιβλιογραφία του Ηλεκτρομαγνητισμού σε σχέση με την *ηλεκτρεγερτική δύναμη* (ΗΕΔ). Συγκεκριμένα, εξηγήσαμε γιατί είναι λάθος να *ορίζουμε* γενικά την ΗΕΔ σαν έργο (ανά μονάδα φορτίου). Με απλά λόγια, η ΗΕΔ ορίζεται πάντα *για μια δεδομένη χρονική στιγμή*, ενώ για τον υπολογισμό του έργου μιας δύναμης πάνω σε ένα σωμάτιο (εδώ, ένα ηλεκτρικό φορτίο) που κινείται στο χώρο, ο χρόνος δεν μένει στατικός αλλά «ρέει» κατά τη διάρκεια της κίνησης.

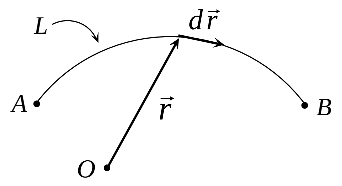
Βέβαια, υπάρχουν κάποιες εξαιρετικές περιπτώσεις όπου *η τιμή* της ΗΕΔ ενός κυκλώματος συμπίπτει με αυτήν του έργου ανά μονάδα φορτίου για μια πλήρη περιφορά πάνω στο κύκλωμα. Όπως έχουμε εξηγήσει [1], αναγκαία συνθήκη για να συμβεί κάτι τέτοιο είναι τόσο η ΗΕΔ, όσο και το έργο, να είναι χρονικά ανεξάρτητες ποσότητες.

Από τη σκοπιά της Κλασικής Μηχανικής, εν τούτοις, η περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων δυνάμεων και του έργου τους παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Θα μελετήσουμε κάποιες πτυχές του προβλήματος, εστιάζοντας την προσοχή μας σε δυσκολίες που προκύπτουν όταν φεύγουμε από την περιοχή των στατικών πεδίων δυνάμεων. Αν και το ζήτημα το θίγουν πολλά σημαντικά εκπαιδευτικά συγγράμματα στη Μηχανική (βλ, π.χ., [2-5]), έχουμε την αίσθηση ότι απαιτείται λεπτομερέστερη ανάλυση για να γίνει πλήρως κατανοητό το πρόβλημα.

Αφού ορίσουμε το έργο ενός χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου δυνάμεων πάνω σε ένα σωμάτιο και συζητήσουμε κάποια λεπτά σημεία του ορισμού, θα αναφερθούμε στη σχέση ανάμεσα στα *αστρόβιλα* και τα *συντηρητικά* πεδία και θα εξηγήσουμε γιατί ένα χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο δυνάμεων δεν μπορεί να είναι συντηρητικό και να οδηγεί στη διατήρηση της ολικής μηχανικής ενέργειας του σωματιδίου, ακόμα κι αν το πεδίο αυτό είναι αστρόβιλο.

2. Έργο κατά μήκος καμπύλης στο χώρο

Θεωρούμε σωμάτιο μάζας m κινούμενο σε κάποια περιοχή του χώρου, κάτω από την επίδραση ενός πεδίου δυνάμεων $\vec{F}$. Η τροχιά του σωματιδίου στο χώρο είναι μια καμπύλη L που εκτείνεται από το σημείο A ως το σημείο B. Καλούμε $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης τού m πάνω στην L τη χρονική στιγμή t, ως προς την αρχή O ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς, και συμβολίζουμε με $d\vec{r}$ τη στοιχειώδη μετατόπιση του m κατά μήκος τής L σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα dt.



Το *έργο* του πεδίου $\vec{F}$ πάνω στο m από το A ως το B είναι

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{1}$$

Για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στη σχέση (1) θα πρέπει να έχουμε κάποια μαθηματική περιγραφή της καμπύλης L. Βέβαια, η καμπύλη μπορεί να οριστεί παραμετρικά κάνοντας χρήση οποιασδήποτε βολικής παραμέτρου της οποίας οι τιμές αντιστοιχούν στα διάφορα σημεία $\vec{r}$ της L. Εν τούτοις, όπως θα δούμε σύντομα, μια απλή γεωμετρική περιγραφή τής L ενδέχεται να μην είναι αρκετή για να προσδιορίσουμε το έργο W, αφού ίσως είναι σημαντικό να λάβουμε υπόψη τη *χρονική στιγμή* κατά την οποία το σωματίδιο m διέρχεται από οποιοδήποτε δοσμένο σημείο της καμπύλης. Έτσι, η πιο πιστή παραμετροποίηση της L δίνεται από την *εξίσωση κίνησης* του m, μέσω της οποίας η θέση $\vec{r}$ του σωματιδίου συνδέεται με τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το σωμάτιο διέρχεται από αυτή τη θέση.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η κίνηση του m κατά μήκος της τροχιάς L περιγράφεται μαθηματικά ως εξής:

$$\vec{r} = \phi(t) \ , \quad t_0 \le t \le t_1 \quad \text{όπου} \quad \phi(t_0) = \vec{r}_A \ , \ \phi(t_1) = \vec{r}_B \tag{2}$$

Τότε, $d\vec{r} = d\phi(t) = \phi'(t)\,dt$. Η πολυπλοκότητα της παραγώγισης (1) εξαρτάται τώρα από τη φύση του πεδίου δυνάμεων $\vec{F}$, και ειδικά, από το αν το πεδίο αυτό είναι ή όχι συνάρτηση του χρόνου.

Για ένα *στατικό* (χρονικά αμετάβλητο) πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r})$ έχουμε ότι

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\left(\phi(t)\right) \cdot \phi'(t)\,dt \tag{3}$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι *ανεξάρτητη της παραμετροποίησης* της καμπύλης L, δηλαδή, ανεξάρτητη από την ειδική συναρτησιακή σχέση (2) που συνδέει το $\vec{r}$ με το t. Πράγματι, η αντικατάσταση $\phi(t) = \vec{r}$ μετασχηματίζει το ολοκλήρωμα (3) στη μορφή

$$W = \int_A^B F(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{4}$$

Όπως βλέπουμε, το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της καμπύλης L, όχι από την όποια παραμετροποίηση της καμπύλης αυτής. Συμπεραίνουμε ότι

> *σε ένα στατικό πεδίο δυνάμεων, το έργο είναι μια καλά καθορισμένη ποσότητα που εξαρτάται από τη διαδρομή του σωματιδίου μέσα στο πεδίο.*

Τα πράγματα περιπλέκονται σημαντικά στην περίπτωση ενός *χρονικά μεταβαλλόμενου* πεδίου δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r},t)$. Το έργο πάνω στο σωμάτιο *m*, κατά μήκος της καμπύλης *L*, γράφεται:

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r} \tag{5}$$

Προσέξτε ιδιαίτερα ότι, μέσα στο ολοκλήρωμα, οι μεταβλητές $\vec{r}$ και *t* *δεν* είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού η πρώτη είναι συνάρτηση της δεύτερης μέσω της παραμετροποίησης (2) της *L*, δηλαδή, σύμφωνα με την εξίσωση κίνησης του *m* πάνω στην *L*. Η σχέση (5) γράφεται:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\left(\phi(t),t\right) \cdot \phi'(t)\,dt \tag{6}$$

Αυτή τη φορά, η αντικατάσταση $\phi(t) = \vec{r}$ δεν μπορεί να απαλείψει το χρόνο *t* προς όφελος του $\vec{r}$. Έτσι, το έργο *W* δεν είναι πια ανεξάρτητο της παραμετροποίησης της καμπύλης *L* μέσω της εξίσωσης κίνησης του *m*. Η γεωμετρία τής *L* δεν είναι από μόνη της αρκετή για τον προσδιορισμό τού *W*!

Για να το καταλάβουμε καλύτερα, θεωρούμε το στοιχειώδες έργο $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Στην περίπτωση στατικού πεδίου δυνάμεων, αυτό γράφεται: $dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. Για δοσμένη εξίσωση κίνησης της μορφής (2), το *dW* εξαρτάται μόνο *έμμεσα* από το *t* μέσω της σχέσης $\vec{r} = \phi(t)$. Έτσι, για μια δοσμένη στοιχειώδη μετατόπιση του σωματιδίου κατά μήκος τής *L*, το *dW* εξαρτάται μόνο από τη θέση $\vec{r}$ του *m* πάνω στην καμπύλη, όχι από τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σωμάτιο διέρχεται από αυτή τη θέση. Καθώς το *t* μεταβάλλεται από t_0 ως t_1, το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ διαγράφει όλα τα σημεία της καμπύλης από *A* ως *B*. Τελικά, το ολικό έργο *W* που δίνεται από τη σχέση (4) έχει καλά καθορισμένη τιμή, ανεξάρτητη από την παραμετροποίηση της *L*. Αυτή η τιμή του έργου εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της τροχιάς *L* που συνδέει τα *A* και *B*.

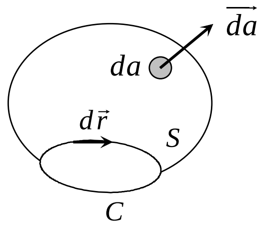
Από την άλλη μεριά, στην περίπτωση ενός χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου δυνάμεων, το στοιχειώδες έργο είναι της μορφής $dW = \vec{F}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r}$. Εδώ, το *dW* εξαρτάται *απευθείας* από το *t*. Έτσι, για δοσμένη στοιχειώδη μετατόπιση πάνω στην *L*, το *dW* εξαρτάται όχι μόνο από τη θέση του σωματιδίου στην *L* αλλά επίσης από τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σωματίδιο διέρχεται από αυτή τη θέση. Αυτό, με τη σειρά του, εξαρτάται από την εξίσωση κίνησης $\vec{r} = \phi(t)$ ή, με άλλα λόγια, από την παραμετροποίηση της *L*. Βλέπουμε λοιπόν ότι το ολικό έργο (5) δεν είναι μια μονοσήμαντα καθορισμένη ποσότητα αλλά εξαρτάται από την εξίσωση κίνησης πάνω στην *L*.

3. Συντηρητικά και αστρόβιλα πεδία

Έστω $\vec{F}(\vec{r})$ ένα στατικό πεδίο δυνάμεων. Γενικά μιλώντας, το πεδίο αυτό είναι *συντηρητικό* αν το έργο που κάνει πάνω σε ένα σωμάτιο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής του σωματίου από ένα σταθερό σημείο σε ένα άλλο, ή ισοδύναμα, αν

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \tag{7}$$

για κάθε κλειστή διαδρομή *C*.



Έστω *S* μια ανοιχτή επιφάνεια με όριο μια δοσμένη κλειστή καμπύλη *C*. Από το θεώρημα του Stokes και τη σχέση (7), έχουμε ότι

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \overrightarrow{da} = 0 \tag{8}$$

Για να ισχύει αυτό για κάθε επιφάνεια *S* με όριο την *C*, το πεδίο $\vec{F}(\vec{r})$ θα πρέπει να είναι *αστρόβιλο*:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \tag{9}$$

Αντίστροφα, ένα αστρόβιλο πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r})$ θα είναι και συντηρητικό σε μια περιοχή του χώρου που είναι *απλά συνεκτική* (βλ. [6]). Πράγματι, για κάθε κλειστή καμπύλη *C* σε μια τέτοια περιοχή, είναι δυνατό να βρούμε μια ανοιχτή επιφάνεια *S* που να έχει ως όριο την *C*. Έτσι, αν ισχύει η (9), η δύναμη θα είναι συντηρητική λόγω της (8).

Δοθέντος ενός συντηρητικού πεδίου $\vec{F}(\vec{r})$, υπάρχει συνάρτηση $U(\vec{r})$ (*δυναμική ενέργεια* του σωματιδίου *m*) τέτοια ώστε

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \tag{10}$$

Όπως είναι γνωστό (και όπως θα δείξουμε αναλυτικά λίγο αργότερα) η *ολική μηχανική ενέργεια* του *m* είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης του σωματιδίου μέσα στο πεδίο. Η ενέργεια αυτή είναι το άθροισμα $E=T+U$ της κινητικής ενέργειας $T=mv^2/2$ (όπου *v* το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου) και της δυναμικής ενέργειας *U*.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r},t)$ σε μια απλά συνεκτική περιοχή *Ω* του χώρου. Υποθέτουμε ότι το πεδίο αυτό είναι αστρόβιλο για κάθε χρονική στιγμή *t*:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0 \tag{11}$$

Θα μπορούσαμε άραγε να συμπεράνουμε ότι το πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό;

Είναι εύκολο να παρασυρθούμε στον ακόλουθο *λανθασμένο* τρόπο σκέψης: Έστω *C* μια αυθαίρετη κλειστή καμπύλη στην περιοχή *Ω*. Επειδή η *Ω* είναι απλά συνεκτική, υπάρχει πάντα μια ανοιχτή επιφάνεια *S* με όριο την *C*. Από το θεώρημα του Stokes,

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r},t)\cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\overrightarrow{da} = 0 \tag{12}$$

για κάθε τιμή τού *t*. Αυτό *φαίνεται* να σημαίνει ότι το πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό. Δεν είναι έτσι, όμως, για τον εξής λόγο: Για κάθε δοσμένη τιμή τού *t*, το ολοκλήρωμα

$$I(t) = \oint_C \vec{F}(\vec{r},t)\cdot d\vec{r}$$

δεν παριστά έργο. Πράγματι, το *I*(*t*) εκφράζει την ολοκλήρωση μιας συνάρτησης δύο *ανεξάρτητων* μεταβλητών, $\vec{r}$ και *t*, ως προς μία από αυτές τις μεταβλητές (το $\vec{r}$), ενώ η άλλη μεταβλητή (το *t*) παίζει το ρόλο μιας «παραμέτρου» της ολοκλήρωσης, η οποία (παράμετρος) μένει σταθερή. Τούτο σημαίνει ότι το *I*(*t*) υπολογίζεται *για μια δοσμένη χρονική στιγμή t* και όλες οι τιμές τού $\vec{F}$, στα διάφορα σημεία τής *C*, θα πρέπει να μετρηθούν *ταυτόχρονα* τη στιγμή αυτή.

Αντίθετα, στο ολοκλήρωμα που παριστά το έργο,

$$W = \oint_C \vec{F}(\vec{r},t)\cdot d\vec{r} \ ,$$

ο χρόνος υποτίθεται ότι *ρέει* καθώς το σωμάτιο *m* κινείται κατά μήκος της κλειστής καμπύλης *C*. Σε αυτή την περίπτωση, τα $\vec{r}$ και *t* δεν είναι πλέον ανεξάρτητα μεταξύ τους αλλά συνδέονται μέσω της εξίσωσης κίνησης του *m* πάνω στην *C*, η οποία εξίσωση αντιπροσωπεύει μια δεδομένη παραμετροποίηση της *C*. Αυτή η δυσκολία δεν εμφανίζεται ποτέ στην περίπτωση των στατικών πεδίων, όπως είδαμε νωρίτερα. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι:

1. Ένα πεδίο δυνάμεων που είναι ταυτόχρονα στατικό και αστρόβιλο σε μια απλά συνεκτική περιοχή του χώρου, είναι συντηρητικό.

2. Ένα χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο δυνάμεων δεν μπορεί να είναι συντηρητικό, ακόμα κι αν είναι αστρόβιλο και η περιοχή της δράσης του είναι απλά συνεκτική.

Τέλος, ας εξηγήσουμε γιατί ένα χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο δυνάμεων δεν οδηγεί στη διατήρηση της ολικής μηχανικής ενέργειας. Θεωρούμε και πάλι ένα αστρόβιλο πεδίο $\vec{F}(\vec{r},t)$ [βλ. σχέση (11)] σε μια απλά συνεκτική περιοχή *Ω*. Όπως αποδεικνύεται, μπορεί τότε να οριστεί μια χρονικά μεταβαλλόμενη δυναμική ενέργεια $U(\vec{r},t)$ του *m*, τέτοια ώστε, για κάθε τιμή τού *t*,

$$\vec{F}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r},t) \tag{13}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το $\vec{F}(\vec{r},t)$ παριστά την *ολική* (συνισταμένη) δύναμη στο *m*. Από το Νόμο του Νεύτωνα, τότε,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla}U = 0$$

(όπου $\vec{v} = d\vec{r}\,/\,dt$). Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το $\vec{v}$, έχουμε:

$$m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}U=0\ .$$

Όμως,

$$\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2)\quad (v=|\vec{v}|)$$

και

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}U=\frac{\vec{\nabla}U\cdot d\vec{r}}{dt}=\frac{dU-\dfrac{\partial U}{\partial t}dt}{dt}=\frac{dU}{dt}-\frac{\partial U}{\partial t}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $dU(\vec{r},t)=\vec{\nabla}U\cdot d\vec{r}+\dfrac{\partial U}{\partial t}dt$. Έτσι, τελικά,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+\frac{dU}{dt}-\frac{\partial U}{\partial t}=0\ \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(T+U)=\frac{\partial U}{\partial t}\tag{14}$$

Σύμφωνα με την (14), η ολική μηχανική ενέργεια (T+U) του m δεν μένει σταθερή, εκτός αν $\partial U/\partial t=0$, δηλαδή, εκτός αν το πεδίο δυνάμεων είναι *στατικό*.

4. Περίληψη

Ας θυμηθούμε τα βασικά συμπεράσματα στα οποία έχουμε καταλήξει:

1. Σε ένα *στατικό* πεδίο δυνάμεων, το έργο πάνω σε ένα σωμάτιο είναι μια καλά καθορισμένη ποσότητα που εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της τροχιάς του σωματιδίου μέσα στο πεδίο.
2. Σε ένα *χρονικά μεταβαλλόμενο* πεδίο δυνάμεων, η γεωμετρία της τροχιάς δεν επαρκεί για να υπολογίσουμε το έργο: θα πρέπει επίσης να γνωρίζουμε την ακριβή εξίσωση κίνησης του σωματιδίου πάνω στην τροχιά, η οποία (εξίσωση) συνδέει τη θέση του σωματιδίου με το χρόνο. Έτσι, το έργο δεν είναι μια μονοσήμαντα καθορισμένη ποσότητα.
3. Ένα *στατικό* πεδίο δυνάμεων που είναι *αστρόβιλο* σε μια *απλά συνεκτική* περιοχή του χώρου, είναι *συντηρητικό*.
4. Ένα *χρονικά μεταβαλλόμενο* πεδίο δυνάμεων *δεν* μπορεί να είναι συντηρητικό, ακόμα κι αν είναι αστρόβιλο και η περιοχή δράσης του είναι απλά συνεκτική.
5. Τα χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία δυνάμεων είναι ασύμβατα με τη διατήρηση της ολικής μηχανικής ενέργειας.

Αναφορές

1. C. J. Papachristou, A. N. Magoulas, *Does the electromotive force (always) represent work?*, Advanced Electromagnetics, Vol 4, No 1 (2015), pp. 10-15, http://www.aemjournal.org/index.php/AEM/article/view/257/pdf_44 .
2. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd edition (Addison-Wesley, 1980).
3. K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd edition (Addison-Wesley, 1971).
4. J. B. Marion, S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 4th edition (Saunders College, 1995).
5. J. R. Taylor, *Classical Mechanics* (University Science Books, 2005).
6. Κ. Ι. Παπαχρήστου, *Ολοκληρώσιμα Διαφορικά Συστήματα* (Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, 2015) (βλ. https://eclass.snd.edu.gr/).