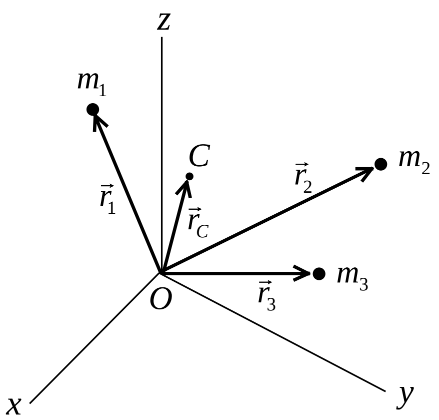
Κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων

Κ. Ι. Παπαχρήστου

Τομέας Φυσικών Επιστημών
Σχολή Ναυτικών Δοκίμων
papachristou@hna.gr

1. Ορισμός του κέντρου μάζας

Έστω σύστημα σωματιδίων με μάζες m_1, m_2, m_3,... Μία δεδομένη χρονική στιγμή τα σωματίδια βρίσκονται σε σημεία του χώρου με αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \cdots,$ ως προς σημείο αναφοράς O το οποίο έχουμε επιλέξει ως αρχή ενός αδρανειακού[1] συστήματος αναφοράς.



Η ολική μάζα του συστήματος είναι

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = \sum_i m_i \tag{1}$$

Ως *κέντρο μάζας* του συστήματος ορίζεται το σημείο C του χώρου με διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots) = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \tag{2}$$

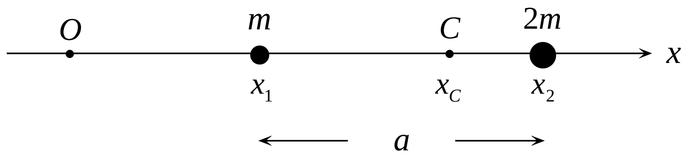
Στη σχέση (2) τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων και του κέντρου μάζας ορίζονται ως προς την σταθερή αρχή O του συστήματος συντεταγμένων μας. Αν διαλέξουμε ένα διαφορετικό σημείο αναφοράς O', όλα τα διανύσματα θέσης προφανώς θα διαφοροποιηθούν. Εν τούτοις, όπως θα δείξουμε πιο κάτω, η θέση του κέντρου μάζας C *ως προς το σύστημα των σωματιδίων* θα παραμείνει ίδια, ανεξάρτητα από την επιλογή του σημείου αναφοράς.

[1] *Αδρανειακό σύστημα αναφοράς*: Ένα σύστημα συντεταγμένων (ή αξόνων) ως προς το οποίο ένα *ελεύθερο* σωμάτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα (ευθύγραμμα και ομαλά).

Αν (x_i , y_i , z_i) και (x_C , y_C , z_C) είναι οι συντεταγμένες των m_i και C, αντίστοιχα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την διανυσματική σχέση (2) με τρεις αλγεβρικές εξισώσεις:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \ , \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \ , \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i \qquad (3)$$

Σαν παράδειγμα, θεωρούμε δύο σωματίδια με μάζες $m_1=m$ και $m_2=2m$, τοποθετημένα στα σημεία x_1 και x_2 του άξονα x. Καλούμε $a = x_2 - x_1$ την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων.



Η ολική μάζα του συστήματος είναι $M=m_1+m_2=3m$. Από τις σχέσεις (3) προκύπτει ότι το κέντρο μάζας C του συστήματος βρίσκεται πάνω στον άξονα x, αφού $y_i=z_i=0$ (i=1,2) έτσι ώστε $y_C=z_C=0$ (οι άξονες y και z δεν έχουν σχεδιαστεί). Επίσης,

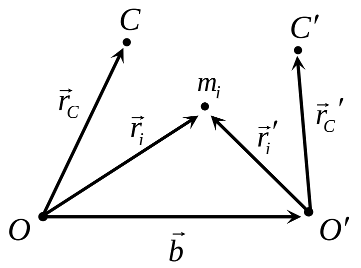
$$x_C = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2) = x_1 + \frac{2}{3}a$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $x_2= x_1+a$. Άρα, το κέντρο μάζας C βρίσκεται σε απόσταση $2a/3$ από το m. Προσέξτε ότι η θέση τού C *ως προς το σύστημα των σωματιδίων* δεν εξαρτάται από την εκλογή του σημείου αναφοράς O ως προς το οποίο προσδιορίζονται οι συντεταγμένες των σωματιδίων.

Όπως μας δείχνει το πιο πάνω παράδειγμα, η θέση του κέντρου μάζας δεν συμπίπτει αναγκαία με τη θέση κάποιου σωματιδίου του συστήματος. (Δώστε παραδείγματα συστημάτων όπου το C συμπίπτει με κάποιο από τα σωματίδια, καθώς και συστημάτων όπου δεν συμπίπτει.)

2. Ανεξαρτησία από το σημείο αναφοράς

Θα δείξουμε τώρα ότι η θέση του κέντρου μάζας C στον χώρο δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου αναφοράς O. Ας υποθέσουμε προς στιγμήν, εν τούτοις, ότι η θέση τού C *εξαρτάται* από την εκλογή σημείου αναφοράς. Έτσι, ας ονομάσουμε C και C' δύο διαφορετικές θέσεις του κέντρου μάζας, σε αντιστοιχία με τα σημεία αναφοράς O και O'. Καλούμε $\vec{r}_C$ και $\vec{r}_C\,'$ τα διανύσματα θέσης των C και C' ως προς τα O και O', αντίστοιχα, και καλούμε $\vec{r}_i$ και $\vec{r}_i\,'$ τα διανύσματα θέσης του σωματιδίου m_i ως προς O και O'. Για λόγους ευκολίας, ονομάζουμε $\vec{b}$ το διάνυσμα $\overrightarrow{OO'}$.



Η σχέση (2), εκφρασμένη διαδοχικά για *O* και *O΄*, γράφεται:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \quad , \qquad \vec{r}_C{}' = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i{}'$$

όπου $\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{b}$. Τώρα,

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C'} = -\vec{r}_C + \vec{b} + \vec{r}_C{}' \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{CC'} = -\frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i + \vec{b} + \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = \vec{b} - \frac{1}{M}\sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_i{}')$$

$$= \vec{b} - \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{b} = \vec{b} - \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i\right)\vec{b} = \vec{b} - \frac{1}{M} M\vec{b} = 0$$

πράγμα που υποδηλώνει ότι τα σημεία *C* και *C΄* *συμπίπτουν*. Συμπεραίνουμε ότι το κέντρο μάζας του συστήματος είναι ένα μονοσήμαντα προσδιοριζόμενο σημείο του χώρου, ανεξάρτητο από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων μας.

3. Κέντρο μάζας και νόμοι του Νεύτωνα

Η *ολική ορμή* ενός συστήματος σωματιδίων τη χρονική στιγμή t, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των σωματιδίων τη στιγμή t:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{4}$$

Έστω $\vec{F}_i$ η ολική *εξωτερική* δύναμη που δρα στο m_i τη στιγμή *t*. Η δύναμη αυτή οφείλεται σε αλληλεπιδράσεις με σώματα που *δεν* ανήκουν στο θεωρούμενο σύστημα σωματιδίων. Η *ολική εξωτερική δύναμη* πάνω στο σύστημα τη στιγμή *t* είναι

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i \ .$$

Κάνοντας χρήση του 2ου και του 3ου νόμου του Νεύτωνα, βρίσκουμε ότι

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \tag{5}$$

[βλ., π.χ., Papachristou (2020)]. Αποδεικνύουμε τώρα τα εξής:

1. *Η ολική ορμή ενός συστήματος σωματιδίων ισούται με την ορμή ενός υποθετικού σωματιδίου που έχει μάζα ίση με την ολική μάζα Μ του συστήματος και κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος.*
2. *Η εξίσωση κίνησης του κέντρου μάζας του συστήματος είναι ίδια με αυτήν ενός υποθετικού σωματιδίου που έχει μάζα ίση με την ολική μάζα Μ του συστήματος και υπόκειται στην ολική εξωτερική δύναμη* $\vec{F}_{\text{ext}}$ *που δρα στο σύστημα.*

Απόδειξη:

1. Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) ως προς τον χρόνο, βρίσκουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v}_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i \qquad (6)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4) και (6), έχουμε:

$$\vec{P} = M\,\vec{v}_C \qquad (7)$$

2. Παραγωγίζοντας την (7), έχουμε:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\,\vec{v}_C) = M\,\frac{d\vec{v}_C}{dt} = M\,\vec{a}_C$$

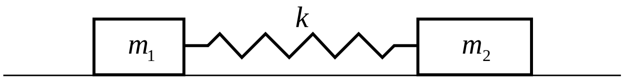
όπου $\vec{a}_C$ είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Έτσι, με βάση την (5),

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\,\vec{a}_C \qquad (8)$$

Θα ονομάζουμε ένα σύστημα σωματιδίων *«απομονωμένο»* αν η ολική εξωτερική δύναμη πάνω σε αυτό είναι μηδέν: $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$. Στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις (5) και (7) οδηγούν στα παρακάτω συμπεράσματα:

1. *Η ολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος σωματιδίων, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι χρονικά σταθερή (αρχή διατήρησης της ορμής).*
2. *Το κέντρο μάζας C ενός απομονωμένου συστήματος σωματιδίων κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.*

Σαν παράδειγμα, θεωρούμε δύο μάζες m_1 και m_2 που συνδέονται μεταξύ τους με ένα ελατήριο. Οι μάζες μπορούν να κινούνται πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Το σύστημα θεωρείται «απομονωμένο», αφού η ολική εξωτερική δύναμη πάνω σε αυτό είναι μηδέν (εξηγήστε γιατί). Έτσι, η ολική ορμή και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος μένουν σταθερές για όσο χρόνο οι δύο μάζες κινούνται πάνω στο επίπεδο. Προσέξτε ότι η *εσωτερική* δύναμη $F_{\text{int}}=k\Delta l$, όπου Δl η παραμόρφωση (επέκταση ή συμπίεση) του ελατηρίου ως προς το φυσικό του μήκος, *δεν* μπορεί να μεταβάλει την ολική ορμή και την ταχύτητα του κέντρου μάζας!

4. Κέντρο μάζας και στροφορμή

Η *ολική στροφορμή* ενός συστήματος σωματιδίων τη χρονική στιγμή t, ως προς ένα σημείο O του χώρου (αρχή των αξόνων μας), είναι το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωματιδίων ως προς το O:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i\,(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \tag{9}$$

Ειδικά, η ολική στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας C του συστήματος είναι

$$\vec{L}' = \sum_i m_i\,(\vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}') \tag{10}$$

όπου όλα τα τονούμενα μεγέθη ορίζονται ως προς C. Έχουμε:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{r}_C \quad , \quad \vec{v}_i = \vec{v}_i{}' + \vec{v}_C \ .$$

Αντικαθιστώντας τις πιο πάνω σχέσεις στην (9) και κάνοντας χρήση των (1) και (10), παίρνουμε:

$$\vec{L} = \vec{L}' + M\,(\vec{r}_C \times \vec{v}_C) + \left[\left(\sum_i m_i\,\vec{r}_i{}'\right) \times \vec{v}_C\right] + \left[\vec{r}_C \times \sum_i m_i \vec{v}_i{}'\right] .$$

Όμως, $\Sigma m_i\,\vec{r}_i{}' = 0$ και $\Sigma m_i \vec{v}_i{}' = 0$, αφού οι ποσότητες στα αριστερά μέλη είναι ανάλογες του διανύσματος θέσης και της ταχύτητας, αντίστοιχα, του κέντρου μάζας C ως προς το ίδιο το C (εξηγήστε γιατί). Έτσι, τελικά,

$$\vec{L} = \vec{L}' + M\,(\vec{r}_C \times \vec{v}_C) \tag{11}$$

Η σχέση (11) μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής:

> *Η ολική στροφορμή του συστήματος, ως προς ένα σημείο Ο, είναι το άθροισμα της στροφορμής του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του («στροφορμή spin») και της στροφορμής, ως προς Ο, ενός υποθετικού σωματιδίου το οποίο έχει μάζα ίση με την ολική μάζα του συστήματος, και του οποίου η θέση κάθε στιγμή συμπίπτει με τη θέση του κέντρου μάζας («τροχιακή στροφορμή»).*

Υποθέτουμε, τώρα, ότι το *O* είναι η αρχή ενός *αδρανειακού* συστήματος αναφοράς. Έστω $\vec{F}_i$ η ολική εξωτερική δύναμη που δρα στο σωματίδιο m_i τη χρονική στιγμή *t*. Η *ολική εξωτερική ροπή* στο σύστημα σωματιδίων τη στιγμή *t*, ως προς το σημείο *O*, δίνεται από τη σχέση

$$\vec{T}_{\mathrm{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{12}$$

Με την υπόθεση ότι όλες οι *εσωτερικές* δυνάμεις στο σύστημα είναι *κεντρικές* (η δύναμη ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο σωματίδια διευθύνεται κατά μήκος της γραμμής που τα ενώνει), ισχύει η ακόλουθη σχέση ανάμεσα στην ολική στροφορμή και την ολική εξωτερική ροπή ως προς το *ίδιο* σημείο *O* [βλ., π.χ., Papachristou (2020)]:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}_{\mathrm{ext}} \tag{13}$$

Η σχέση (13) ισχύει αυστηρά ως προς την αρχή *O* ενός *αδρανειακού* συστήματος αναφοράς (αφού για την απόδειξή της γίνεται χρήση των νόμων του Νεύτωνα). Αν το σύστημα των σωματιδίων είναι *απομονωμένο* (βλ. Ενότητα 3), το κέντρο μάζας *C* κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το *O*, άρα το *C* μπορεί να είναι αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Έτσι, το *C* μπορεί κι αυτό να χρησιμοποιηθεί σαν σημείο αναφοράς για τη διανυσματική σχέση (13). Δηλαδή, η σχέση (13) ισχύει ως προς το κέντρο μάζας *C* ενός απομονωμένου συστήματος σωματιδίων. Όμως, τι θα μπορούσαμε να πούμε αν το σύστημα των σωματιδίων *δεν* είναι απομονωμένο (υπάρχει μη-μηδενική ολική εξωτερική δύναμη); Στην περίπτωση αυτή το *C επιταχύνεται* ως προς το *O* και *τείνουμε*, έτσι, να συμπεράνουμε ότι η σχέση (13) δεν ισχύει ως προς *C*. Και όμως, κάτι άλλο συμβαίνει στ' αλήθεια:

> *Η σχέση (13) ισχύει <u>πάντα</u> ως προς το κέντρο μάζας C, ακόμα και αν το C επιταχύνεται (δηλαδή, ακόμα κι αν το σύστημα των σωματιδίων δεν είναι απομονωμένο)!*

Πράγματι, παραγωγίζοντας την (11) ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιώντας τις (13), (12) και (8), έχουμε:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + M(\vec{r}_C \times \vec{a}_C) \ \big(+M(\vec{v}_C \times \vec{v}_C), \text{που ειναι μηδεν}\big) \ \Rightarrow$$

$$\vec{T}_{\mathrm{ext}} \equiv \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d\vec{L}'}{dt} + (\vec{r}_C \times \vec{F}_{\mathrm{ext}}) \ \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \left(\vec{r}_C \times \sum_i \vec{F}_i\right) = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_C) \times \vec{F}_i$$

$$= \sum_i \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i = \vec{T}_{\mathrm{ext}}\,'$$

όπου $\vec{T}_{\mathrm{ext}}\,'$ η ολική εξωτερική ροπή ως προς το κέντρο μάζας.

Αυτή η παρατήρηση δικαιολογεί τη χρήση της σχέσης (13) για να αναλύσουμε, π.χ., την κύλιση μιας σφαίρας ή ενός κυλίνδρου πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, παίρνοντας τις στροφορμές και τις ροπές ως προς το *επιταχυνόμενο* κέντρο μάζας του κυλιόμενου σώματος.

5. Κέντρο μάζας και κινητική ενέργεια

Η *ολική κινητική ενέργεια* ενός συστήματος σωματιδίων, ως προς έναν παρατηρητή O, είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωματιδίων ως προς τον O:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{14}$$

Η ολική κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας C του συστήματος είναι

$$E_k{}' = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \tag{15}$$

(τονούμενα μεγέθη θεωρείται ότι ορίζονται ως προς C). Έχουμε:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i{}' + \vec{v}_C \;\;\Rightarrow\;\; v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = v_i'^2 + v_C^2 + 2\vec{v}_i{}' \cdot \vec{v}_C \ .$$

Αντικαθιστώντας στην (14) και χρησιμοποιώντας τις (1) και (15), παίρνουμε:

$$E_k = E_k{}' + \frac{1}{2} M v_C^2 + \left(\sum_i m_i \vec{v}_i{}' \right) \cdot \vec{v}_C \ .$$

Όμως, όπως είχαμε σημειώσει νωρίτερα, το άθροισμα στον τελευταίο όρο είναι μηδέν καθώς είναι ανάλογο της ταχύτητας του κέντρου μάζας C ως προς το ίδιο το C. Άρα, τελικά,

$$E_k = E_k{}' + \frac{1}{2} M v_C^2 \tag{16}$$

Αυτό δέχεται την εξής ερμηνεία:

Η ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων, ως προς έναν παρατηρητή Ο, είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του, και της κινητικής ενέργειας, ως προς τον Ο, ενός υποθετικού σωματιδίου που έχει μάζα ίση με την ολική μάζα του συστήματος και κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

6. Προσθέτοντας ή αφαιρώντας ένα σωματίδιο στο κέντρο μάζας

Θα αποδείξουμε τώρα τις εξής δύο προτάσεις:

(*a*) Έστω σύστημα N σωματιδίων με μάζες m_1 , m_2 , ... , m_N , και έστω C το κέντρο μάζας του συστήματος. Αν ένα *καινούργιο* σωματίδιο, μάζας m , τοποθετηθεί στο C, το κέντρο μάζας του διευρυμένου συστήματος των (N+1) σωματιδίων θα είναι και πάλι το C.

(*b*) Έστω σύστημα N σωματιδίων με μάζες m_1 , m_2 , ... , m_N . Υποθέτουμε ότι η θέση ενός εκ των σωματιδίων, ας πούμε του m_N , συμπίπτει με το κέντρο μάζας C του συστήματος. Αν τώρα αφαιρέσουμε αυτό το σωματίδιο από το σύστημα, το κέντρο μάζας του συστήματος των (N–1) σωματιδίων που απομένουν θα είναι και πάλι το C.

Απόδειξη:

(*a*) Η ολική μάζα του αρχικού συστήματος των N σωματιδίων είναι $M=m_1+m_2+...+m_N$. Το κέντρο μάζας του συστήματος βρίσκεται στο σημείο C με διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\,(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N)$$

ως προς κάποιο σταθερό σημείο αναφοράς O. Για το πρόσθετο σωματίδιο, το οποίο ονομάζουμε m_{N+1} , δίνεται ότι $m_{N+1}=m$ και $\vec{r}_{N+1} = \vec{r}_C$. Η ολική μάζα του διευρυμένου συστήματος των (N+1) σωματιδίων m_1 , m_2 , ... , m_N , m_{N+1} είναι $M' = M+m$, και το κέντρο μάζας αυτού του συστήματος έχει διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_C{}' = \frac{1}{M'}\,(m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_N\vec{r}_N + m\vec{r}_C)$$

ως προς το O. Όμως, $m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_N\vec{r}_N = M\vec{r}_C$, έτσι ώστε

$$\vec{r}_C{}' = \frac{1}{M+m}\,(M\vec{r}_C + m\vec{r}_C) = \vec{r}_C \ .$$

(*b*) Αν και η πρόταση αυτή είναι, προφανώς, συμπέρασμα της πρότασης (*a*), θα την αποδείξουμε ανεξάρτητα. Εδώ μας δίδεται ότι $\vec{r}_N = \vec{r}_C$. Έτσι,

$$\frac{1}{M}\,(m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_N\vec{r}_N) = \vec{r}_N \ .$$

Η μάζα του μικρότερου συστήματος των (N–1) σωματιδίων m_1 , m_2 , ... , m_{N-1} είναι $M' = M - m_N$, ενώ το κέντρο μάζας αυτού του συστήματος έχει διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_C{}' = \frac{1}{M'}\,(m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_{N-1}\vec{r}_{N-1}) \ .$$

Όμως, $m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_{N-1}\vec{r}_{N-1} + m_N\vec{r}_N = M\vec{r}_N \quad \Rightarrow$

$$m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_{N-1}\vec{r}_{N-1} = (M - m_N)\,\vec{r}_N = M'\vec{r}_N \ .$$

Άρα, τελικά,

$$\vec{r}_C{}' = \frac{1}{M'}M'\vec{r}_N = \vec{r}_N = \vec{r}_C \ .$$

7. Κέντρο μάζας μιας συνεχούς κατανομής ύλης

Ένα *στερεό σώμα* είναι φυσικό αντικείμενο που δομείται με συνεχή κατανομή ύλης. Ένα τέτοιο αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί σαν σύστημα αποτελούμενο από τεράστιο (πρακτικά άπειρο) πλήθος σωματιδίων με απειροστές μάζες dm_i , τα οποία είναι τοποθετημένα με τέτοιον τρόπο ώστε η απόσταση ανάμεσα σε δύο γειτονικά σωματίδια να είναι μηδέν. Η ολική μάζα του σώματος είναι

$$M = \sum_i dm_i = \int dm$$

όπου αντικαταστήσαμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα λόγω του ότι τα dm_i είναι απειροστά και η κατανομή της μάζας είναι συνεχής.

Ένα σημείο του στερεού σώματος προσδιορίζεται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ή τις συντεταγμένες του (x, y, z) ως προς την αρχή O ενός συστήματος αναφοράς. Έστω dV ένας στοιχειώδης όγκος γύρω από το σημείο $\vec{r} \equiv (x, y, z)$, και έστω dm το στοιχείο της μάζας που περιέχεται στο dV. Η *πυκνότητα* ρ του σώματος στο σημείο $\vec{r}$ ορίζεται:

$$\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV} \; .$$

Τότε,

$$dm = \rho(\vec{r})\, dV$$

και η ολική μάζα του σώματος γράφεται:

$$M = \int \rho(\vec{r})\, dV$$

όπου η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα σε όλο τον όγκο του σώματος. (Στην ουσία πρόκειται για *τριπλό* ολοκλήρωμα, αφού $dV=dxdydz$.) Το κέντρο μάζας C του σώματος βρίσκεται με χρήση της (2):

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_i (dm_i)\vec{r}_i = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm \quad \Rightarrow$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, dV \qquad (17)$$

όπου τα $\vec{r}$ και $\vec{r}_C$ μετρούνται ως προς την αρχή O του συστήματος συντεταγμένων μας. (Θυμηθείτε, όμως, ότι η θέση τού C *ως προς το σώμα* είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένη, ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου αναφοράς O στον χώρο.)

Σε ένα *ομογενές* σώμα η πυκνότητα έχει σταθερή τιμή ρ, ανεξάρτητη από το $\vec{r}$. Στην περίπτωση αυτή,

$$M = \int \rho\, dV = \rho \int dV = \rho V$$

όπου V ο ολικός όγκος του σώματος. Επίσης, από την (17) έχουμε:

$$\vec{r}_C = \frac{\rho}{M}\int \vec{r}\, dV = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \tag{18}$$

Ας φανταστούμε τώρα ότι, αντί μίας κατανομής ύλης στον χώρο, έχουμε μια *γραμμική* κατανομή (π.χ., μία λεπτή ράβδο) κατά μήκος του άξονα *x*. Ορίζουμε την *γραμμική πυκνότητα* της κατανομής με τη σχέση

$$\rho(x) = \frac{dm}{dx} \ .$$

Η ολική μάζα της κατανομής είναι

$$M = \int dm = \int \rho(x)\, dx \ .$$

Η θέση του κέντρου μάζας της κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$x_C = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int x\, \rho(x)\, dx \tag{19}$$

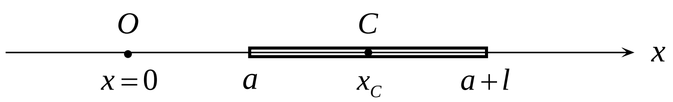
Αν η γραμμική πυκνότητα ρ είναι σταθερή, ανεξάρτητη από το x, τότε

$$M = \int \rho\, dx = \rho \int dx = \rho\, l$$

όπου l το ολικό μήκος της κατανομής. Επί πλέον,

$$x_C = \frac{\rho}{M}\int x\, dx = \frac{1}{l}\int x\, dx \tag{20}$$

Σαν παράδειγμα, θεωρούμε μία λεπτή ομογενή ράβδο μήκους l, τοποθετημένη κατά μήκος του άξονα x από το $x=a$ ως το $x=a+l$, όπως στο σχήμα:



Από τη σχέση (20),

$$x_C = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} x\, dx = \frac{1}{2l}\left[(a+l)^2 - a^2\right] = a + \frac{l}{2} \ .$$

Δηλαδή, το κέντρο μάζας C της ράβδου βρίσκεται στο μέσο της ράβδου. Προσέξτε ότι η θέση τού *C ως προς την ράβδο* προσδιορίζεται μονοσήμαντα, ανεξάρτητα από την εκλογή της αρχής O του άξονα x (παρόλο που η τιμή της συντεταγμένης x_C εξαρτάται, προφανώς, από την εκλογή αυτή).

8. Κέντρο μάζας και κέντρο βάρους

Όπως έχουμε δει, το κέντρο μάζας C ενός συστήματος σωματιδίων κινείται στον χώρο σαν να πρόκειται για ένα σωματίδιο που έχει μάζα ίση με την ολική μάζα M του συστήματος, και πάνω στο οποίο ασκείται η ολική εξωτερική δύναμη που δρα στο σύστημα. Το ίδιο ισχύει για ένα στερεό σώμα. Ας υποθέσουμε ότι οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο σύστημα (ή στο στερεό σώμα) είναι εκείνες που οφείλονται στη βαρύτητα. Η ολική εξωτερική δύναμη, τότε, ισούται με το *ολικό βάρος* του συστήματος:

$$\vec{w} = \sum_i \vec{w}_i = \sum_i (m_i \vec{g}) = \left(\sum_i m_i \right) \vec{g} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{w} = M\vec{g} \quad \text{όπου} \quad M = \sum_i m_i \ .$$

Η *επιτάχυνση της βαρύτητας* $\vec{g}$ είναι σταθερή σε μία περιοχή του χώρου όπου το πεδίο βαρύτητας μπορεί να θεωρείται ομογενές.

Προσέξτε ότι το $\vec{w}$ παριστά άθροισμα δυνάμεων που δρουν σε διαφορετικά σωματίδια (ή στοιχειώδεις μάζες dm_i στην περίπτωση στερεού σώματος) τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χώρου. Αναρωτιόμαστε τώρα αν υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο σημείο εφαρμογής του ολικού βάρους $\vec{w}$ ενός συστήματος και, ειδικότερα, ενός στερεού σώματος. Μία λογική υπόθεση είναι πως το σημείο αυτό θα μπορούσε να είναι το κέντρο μάζας C του σώματος, δοθέντος ότι, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, το σημείο C συμπεριφέρεται σαν να συγκεντρώνει την ολική μάζα M του σώματος και την ολική εξωτερική δύναμη που δρα σε αυτό. Και, στην περίπτωσή μας, το $\vec{w}$ είναι πράγματι η ολική εξωτερική δύναμη, που οφείλεται αποκλειστικά στη βαρύτητα.

Υπάρχει όμως ένα λεπτό σημείο: Σε αντίθεση με ένα σημειακό σωματίδιο, το οποίο απλά αλλάζει θέση στον χώρο, ένα στερεό σώμα εκτελεί μία πιο σύνθετη κίνηση που είναι συνδυασμός μεταφοράς και περιστροφής. Η *μεταφορική* κίνηση του σώματος υπό την επίδραση της βαρύτητας πράγματι αντιπροσωπεύεται από την κίνηση του κέντρου μάζας C, αν θεωρήσουμε αυτό το σημείο σαν «σωματίδιο» μάζας M πάνω στο οποίο εφαρμόζεται η ολική δύναμη $\vec{w}$ που δρα στο σώμα. Για την *περιστροφική* κίνηση του σώματος, όμως, υπεύθυνες είναι οι *ροπές* των εξωτερικών δυνάμεων, παρά οι δυνάμεις καθαυτές. Πού θα πρέπει να τοποθετήσουμε την ολική δύναμη $\vec{w}$ έτσι ώστε η στροφική κίνηση που προκαλεί στο σώμα να είναι ίδια με αυτήν που προκαλείται από την ταυτόχρονη δράση όλων των στοιχειωδών βαρυτικών δυνάμεων $d\vec{w}_i = (dm_i)\vec{g}$; Ισοδύναμα, πού θα τοποθετήσουμε το $\vec{w}$ ώστε η ροπή του *ως προς οποιοδήποτε σημείο* O να ισούται με την ολική ροπή των $d\vec{w}_i$ ως προς το O;

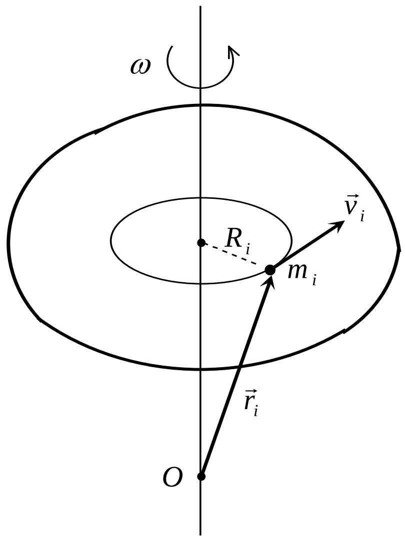
Ίσως το μαντέψατε ήδη: στο κέντρο μάζας C ! [Βλ., π.χ., Papachristou (2020).] Συμπέρασμα:

> *Τοποθετώντας το ολικό βάρος $\vec{w}$ του σώματος στο κέντρο μάζας C, επιτυγχάνουμε να περιγράψουμε όχι μόνο την μεταφορική αλλά και την περιστροφική κίνηση του σώματος κάτω από την επίδραση της βαρύτητας.*

Γι' αυτό τον λόγο το C συχνά ονομάζεται και *κέντρο βάρους* του σώματος. Σημειώνουμε ότι το σημείο C δεν ανήκει απαραίτητα στο ίδιο το σώμα (σκεφτείτε, για παράδειγμα, την περίπτωση ενός δαχτυλιδιού, ή ενός σφαιρικού φλοιού).

9. Μηχανική ενέργεια στερεού σώματος

Θεωρούμε στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από κάποιο σταθερό σημείο O του χώρου:



Κατά τη διάρκεια της περιστροφικής κίνησης, κάθε στοιχειώδης μάζα m_i στο σώμα κινείται κυκλικά γύρω από τον άξονα περιστροφής, με γωνιακή ταχύτητα ω. Αν R_i είναι η κάθετη απόσταση του m_i από τον άξονα (άρα, η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς τού m_i), η γραμμική ταχύτητα αυτού του στοιχείου μάζας είναι $v_i = R_i\,\omega$. Η ολική *κινητική ενέργεια περιστροφής* είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών όλων των στοιχειωδών μαζών m_i που περιέχονται στο σώμα:

$$E_{k,rot} = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i R_i^2 \quad \Rightarrow$$

$$E_{k,rot} = \frac{1}{2} I\,\omega^2 \tag{21}$$

όπου

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

είναι η *ροπή αδρανείας* του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής.

Η σχέση (21) παριστά την ολική κινητική ενέργεια του σώματος όταν αυτό εκτελεί περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα. Ένα γενικότερο είδος κίνησης αποτελεί η περιστροφή γύρω από άξονα ο οποίος μετακινείται στον χώρο. Ειδικά, θεωρήστε ότι ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας C του σώματος, ενώ το ίδιο το C κινείται στον χώρο με ταχύτητα $\vec{v}_C$. Το σώμα, έτσι, εκτελεί σύνθετη κίνηση αποτελούμενη από *μεταφορά* του κέντρου μάζας C και *περιστροφή* γύρω από το C. Σύμφωνα με τη σχέση (16), η ολική κινητική ενέργεια του σώματος είναι το άθροισμα δύο ποσοτήτων: μίας *κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς*,

$$E_{k,trans} = \frac{1}{2} M v_C^{\,2}$$

(όπου M η μάζα του σώματος και v_C η ταχύτητα του κέντρου μάζας C), και μίας *κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής ως προς C*,

$$E_{k,rot} = \frac{1}{2} I_C\, \omega^2$$

(όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από άξονα που διέρχεται από το C, και όπου I_C η ροπή αδρανείας του σώματος ως προς τον άξονα αυτόν[2]). Έτσι, η ολική κινητική ενέργεια του σώματος είναι

$$E_k = E_{k,trans} + E_{k,rot} = \frac{1}{2} M v_C^{\,2} + \frac{1}{2} I_C\, \omega^2 \tag{22}$$

Αν το σώμα υπόκειται σε εξωτερικές δυνάμεις που είναι συντηρητικές, μπορούμε να ορίσουμε μία *εξωτερική δυναμική ενέργεια* E_p , καθώς και μία *ολική μηχανική ενέργεια* E η οποία μένει σταθερή κατά την κίνηση του σώματος:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} M v_C^{\,2} + \frac{1}{2} I_C\, \omega^2 + E_p = const. \tag{23}$$

Για παράδειγμα, αν το σώμα κινείται κάτω από την επίδραση της βαρύτητας και μόνο, η δυναμική του ενέργεια είναι

$$E_p = M g\, y_C$$

όπου y_C η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου μάζας C από ένα αυθαίρετο οριζόντιο επίπεδο αναφοράς. Πράγματι, λόγω της σχέσης (3),

$$y_C = \frac{1}{M} \sum_i m_i\, y_i$$

όπου y_i η κατακόρυφη απόσταση της στοιχειώδους μάζας m_i του σώματος από το επίπεδο αναφοράς. Η ολική βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος, ίση με το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών όλων των στοιχειωδών μαζών m_i , είναι τότε:

$$E_p = \sum_i (m_i\, g\, y_i) = g \sum_i m_i\, y_i = M g\, y_C \ .$$

Η ολική μηχανική ενέργεια του σώματος είναι σταθερή και ίση με

$$E = \frac{1}{2} M v_C^{\,2} + \frac{1}{2} I_C\, \omega^2 + M g\, y_C \ .$$

[2] Η ροπή αδρανείας I ως προς έναν άξονα παράλληλο προς τον άξονα αυτόν δίνεται από το *θεώρημα των παραλλήλων αξόνων* [βλ., π.χ., Papachristou (2020)]. Συγκεκριμένα, $I=I_C+Ma^2$, όπου a η κάθετη απόσταση ανάμεσα στους δύο άξονες.

Βιβλιογραφία

1. M. Alonso, E. J. Finn, *Fundamental University Physics:* Volume 1, *Mechanics* (Addison-Wesley, 1967).
2. M. Alonso, E. J. Finn, *Physics* (Addison-Wesley, 1992).
3. R. Resnick, D. Halliday, K. S. Krane, *Physics:* Volume 1, 5th Edition (Wiley, 2002).
4. K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd Edition (Addison-Wesley, 1971).
5. J. B. Marion, S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 4th Edition (Saunders College, 1995).
6. J. R. Taylor, *Classical Mechanics* (University Science Books, 2005).
7. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd Edition (Addison-Wesley, 1980).
8. C. J. Papachristou, *Introduction to Mechanics of Particles and Systems* (Springer, 2020).[3]
9. C. J. Papachristou, *Foundations of Newtonian Dynamics: An Axiomatic Approach for the Thinking Student*, Nausivios Chora, Vol. 4 (2012) 153.[4]

[3] http://metapublishing.org/index.php/MP/catalog/book/68

[4] https://nausivios.snd.edu.gr/docs/2012C2.pdf , νεότερη έκδοση https://arxiv.org/abs/1205.2326