Κ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ

ΘΕΩΡΙΑΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Θεώρημα Stokes (Γενική Μορφή):

$$\int_{\text{Χωρος}} \text{"Παραγωγος" Πεδιου} \;=\; \int_{\substack{\text{Οριο}\\ \text{Χωρου}}} \text{Πεδιο}$$

Παραδείγματα:

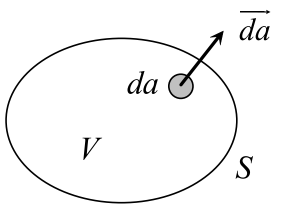
1. Θεώρημα Newton-Leibniz (ο «χώρος» είναι ευθύγραμμο τμήμα *ab*, και το όριό του τα σημεία *a* και *b*):

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = \left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a)$$

Γενίκευση για επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (ο «χώρος» είναι ανοιχτή καμπύλη *ab* στον R^3, και το όριό του τα σημεία *a* και *b*):

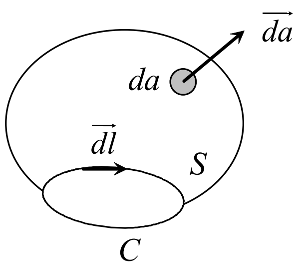
$$\int_a^b (\vec{\nabla}\Phi)\cdot\overrightarrow{dl} = \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a)$$

2. Θεώρημα Gauss (ο «χώρος» είναι όγκος *V* που έχει ως όριο κλειστή επιφάνεια *S*):



$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,dv = \oint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{da}$$

3. Θεώρημα Stokes, *ειδική* μορφή (ο «χώρος» είναι ανοιχτή επιφάνεια *S* που περατούται σε κλειστή καμπύλη *C*):



$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\overrightarrow{da} = \oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}$$

(Προσοχή στη *σχετική* φορά των $\overrightarrow{dl}$ και $\overrightarrow{da}$!)

Ειδικοί Τύποι Πεδίων:

Αστρόβιλο Πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$	**Σωληνωτό Πεδίο** $\vec{B}(\vec{r})$
$\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$
$\exists\,\Phi(\vec{r})$: $\vec{A}=\vec{\nabla}\Phi$	$\exists\,\vec{A}(\vec{r})$: $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$
$\int_a^b \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}$ *ανεξάρτητο του δρόμου που συνδέει τα σημεία a και b*	$\int_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{da}$ *εξαρτάται μόνο από το όριο (κλειστή καμπύλη) της επιφάνειας* S, *όχι από την ίδια την S*
$\oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}=0$ (C=κλειστή καμπύλη)	$\oint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{da}=0$ (S=κλειστή επιφάνεια)
Ανοιχτές (όχι κλειστές) δυναμικές γραμμές που ξεκινούν και καταλήγουν στις «πηγές» του πεδίου (π.χ., φορτία)	*Κλειστές* δυναμικές γραμμές (χωρίς αρχή και τέλος) - Όχι μεμονωμένες σημειακές πηγές (πόλοι)

Συντηρητικό Πεδίο Δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r})$
Έργο πάνω σε υπόθεμα: $W_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}$ *ανεξάρτητο του δρόμου AB*
$W=\oint_C \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}=0$ για *κλειστή* διαδρομή C
$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ (*αστρόβιλο*)
$\exists\,U(\vec{r})$: $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$, $W_{AB}=U(\vec{r}_A)-U(\vec{r}_B)\equiv U_A-U_B$ (U = *δυναμική ενέργεια υποθέματος*)
$E=E_{\kappa\iota\nu}+U=\sigma\tau\alpha\theta.$ (*διατήρηση μηχανικής ενέργειας*)

ΣΤΑΤΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Το ηλεκτρικό πεδίο ($\vec{E}$) παράγεται από ηλεκτρικά φορτία και επιδρά σε *όλα* τα φορτία, ανεξάρτητα από την κίνησή τους. Το μαγνητικό πεδίο ($\vec{B}$) παράγεται από *κινούμενα* ηλεκτρικά φορτία και επιδρά μόνο σε *κινούμενα* φορτία (ή, ηλεκτρικά ρεύματα). Τα πεδία αυτά μπορεί να είναι *στατικά* (χρονικά-αμετάβλητα) ή *χρονικά-μεταβαλλόμενα*. Γενικά, ένα πεδίο $\vec{A}$ είναι στατικό αν $\partial \vec{A} / \partial t = 0$, έτσι ώστε $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$, ενώ είναι χρονικά-μεταβαλλόμενο αν έχει τη μορφή $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$.

Τα στατικά ηλεκτρικά πεδία διέπονται από το νόμο του Coulomb, ενώ τα στατικά μαγνητικά πεδία από το νόμο Biot-Savart. Οι νόμοι αυτοί οδηγούν σε ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων που μπορούν να γραφούν σε διαφορική ή σε ολοκληρωτική μορφή, ως εξής:

$$(\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = Q_{in} / \varepsilon_0$$

$$(\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$

$$(\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

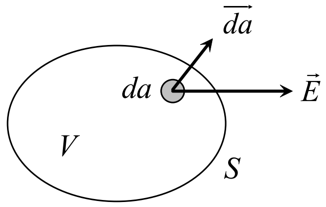
$$(\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{in}$$

Οι (α) και (γ) αφορούν το *ηλεκτροστατικό* πεδίο και είναι συνέπειες του νόμου του Coulomb, ενώ οι (β) και (δ) αφορούν το *στατικό* μαγνητικό πεδίο και είναι συνέπειες του νόμου Biot-Savart. Ειδικά, σύμφωνα με την (γ), το ηλεκτρο*στατικό* πεδίο είναι *αστρόβιλο* και έχει *ανοιχτές* δυναμικές γραμμές που ξεκινούν και καταλήγουν σε ηλεκτρικά φορτία. Επί πλέον, σύμφωνα με την (β), το μαγνητικό πεδίο είναι *σωληνωτό* και οι δυναμικές του γραμμές είναι *κλειστές*, αφού δεν υπάρχουν μεμονωμένοι μαγνητικοί πόλοι από τους οποίους οι γραμμές αυτές θα μπορούσαν να ξεκινούν ή στους οποίους θα μπορούσαν να καταλήγουν.

Οι εξισώσεις αυτές δίνουν την λανθασμένη εντύπωση ότι υπάρχουν δύο πεδία, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό, που είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Αυτό όμως αληθεύει μόνο στην περίπτωση των *στατικών* πεδίων! Πράγματι, για χρονικά-μεταβαλλόμενα Η/Μ πεδία, οι μεν (α) και (β) εξακολουθούν να ισχύουν, οι (γ) και (δ), όμως, παίρνουν νέες μορφές που εμπεριέχουν ταυτόχρονα το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, έτσι ώστε η μεταβολή του ενός να επηρεάζει άμεσα το άλλο.

Νόμος του Gauss:

Αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του νόμου του Coulomb, αλλά εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι χρονικά-μεταβαλλόμενο:



$$\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

(όπου Q_{in} το ολικό φορτίο στο *εσωτερικό* της κλειστής επιφάνειας S). Με χρήση του θεωρήματος Gauss, η παραπάνω σχέση γράφεται σε ισοδύναμη διαφορική μορφή, ως εξής:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

όπου ρ = *πυκνότητα φορτίου*: $Q_{in} = \int_V \rho \, dv$.

Προσοχή: Το ίδιο το πεδίο $\vec{E}$ οφείλεται σε *όλα* τα φορτία, εσωτερικά *και* εξωτερικά ως προς την S, αλλά η *ροή* του πεδίου μέσα από την S (το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα) εξαρτάται μόνο από τα *εσωτερικά* φορτία!

Ηλεκτρο*στατικό* Πεδίο $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ - Ηλεκτρικό Δυναμικό:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (\textit{αστρόβιλο}\ \text{πεδίο})$$

Τότε,

$$\exists V(\vec{r}): \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad (V = \textit{ηλεκτρικό δυναμικό})$$

Η διαφορά δυναμικού (τάση) ανάμεσα σε δύο σημεία ενός ηλεκτροστατικού πεδίου είναι

$$\int_a^b \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = V_a - V_b$$

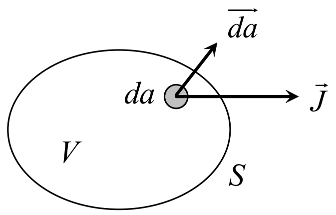
Η σχέση $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ *δεν* ισχύει στην περίπτωση ενός χρονικά-μεταβαλλόμενου Η/Μ πεδίου. Δηλαδή, το χρονικά-μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο *δεν* είναι αστρόβιλο.

Το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι *συντηρητικό*. Η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου q μέσα στο πεδίο αυτό είναι

$$U(\vec{r}) = q\, V(\vec{r})$$

Πυκνότητα Ρεύματος $\vec{J}$:

Μπορεί να οριστεί με βάση τη σχέση



$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{da}$$

όπου η επιφάνεια S μπορεί να είναι ανοιχτή ή κλειστή, και όπου I είναι η ολική ένταση ρεύματος (ολικό φορτίο ανά μονάδα χρόνου) που διαπερνά την S. Η πυκνότητα ρεύματος και η πυκνότητα *κινούμενου* φορτίου συνδέονται με τη σχέση

$$\vec{J} = \rho_\kappa \vec{\upsilon}$$

(όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα κίνησης του φορτίου).

Εξίσωση Συνεχείας:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (\text{όπου } \rho = \textit{πυκνότητα } \underline{\textit{ολικού}} \textit{ φορτίου})$$

Φυσική σημασία: Εκφράζει τη *διατήρηση του φορτίου*.

Νόμος του Ohm για Αγώγιμο Υλικό:

Αποτελεί προσεγγιστικό νόμο που ισχύει υπό προϋποθέσεις (σχετικά μικρές τιμές του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$), και δεν αποτελεί ακριβή νόμο του ηλεκτρομαγνητισμού.

Γενική μορφή: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (όπου σ = *ειδική αγωγιμότητα υλικού μέσου*)

Για μεταλλικό σύρμα αντίστασης R, υπό τάση ΔV στα άκρα του,

$$I = \frac{\Delta V}{R} \qquad (\text{ειδική μορφή})$$

Νόμος του Gauss για το Μαγνητισμό:

Έχει γενική ισχύ, ακόμα και στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ δεν είναι στατικό.

Ολοκληρωτική μορφή: $$\oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$

(όπου S κλειστή επιφάνεια). Με χρήση του θεωρήματος Gauss, βρίσκουμε την ισοδύναμη ......

Διαφορική μορφή: $$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ (*σωληνωτό* πεδίο)

Φυσική σημασία:

1. Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι *κλειστές* (δεν έχουν αρχή και τέλος).
2. Δεν υπάρχουν ελεύθεροι (μεμονωμένοι) μαγνητικοί πόλοι («μαγνητικά φορτία»).
3. Η μαγνητική ροή μέσα από *ανοιχτή* επιφάνεια S εξαρτάται μόνο από το περίγραμμα (κλειστή καμπύλη) C της επιφάνειας, και είναι ίδια για όλες τις επιφάνειες που έχουν κοινό περίγραμμα C.

Νόμος του Ampère για *Στατικό* Μαγνητικό Πεδίο:

Ολοκληρωτική μορφή: $$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{in}$$

[όπου I_{in} το ολικό ρεύμα που διέρχεται μέσα από την κλειστή καμπύλη (βρόχο) C]. Με χρήση του θεωρήματος Stokes, βρίσκουμε την ισοδύναμη ......

Διαφορική μορφή: $$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

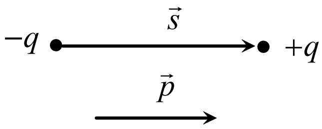
Προσοχή: Το ίδιο το πεδίο $\vec{B}$ οφείλεται σε *όλα* τα ρεύματα, εσωτερικά *και* εξωτερικά ως προς την C, αλλά το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{B}$ εξαρτάται μόνο από τα *εσωτερικά* ρεύματα!

Ο νόμος αυτός *δεν* ισχύει στη μορφή που τον γράψαμε στην περίπτωση ενός *χρονικά-μεταβαλλόμενου* Η/Μ πεδίου.

ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΣΤΗΝ ΥΛΗ

Ηλεκτρικό Δίπολο - Ηλεκτρική Διπολική Ροπή:

Ένα *ηλεκτρικό δίπολο* αποτελείται από δύο αντίθετα φορτία $-q$ και $+q$ σε απόσταση s μεταξύ τους. Καλούμε $\vec{s}$ το διάνυσμα *από το* $-q$ *στο* $+q$. Η *ηλεκτρική διπολική ροπή* $\vec{p}$ του συστήματος ορίζεται ως εξής:

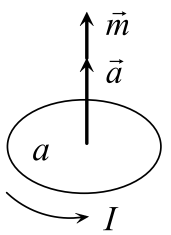


$$\vec{p} = q\,\vec{s}$$

Όταν ένα ηλεκτρικό δίπολο βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, το πεδίο τείνει να στρέψει το σύστημα έτσι ώστε η διπολική του ροπή $\vec{p}$ να ευθυγραμμιστεί με το $\vec{E}$.

Μαγνητικό Δίπολο - Μαγνητική Διπολική Ροπή:

Με τον όρο «μαγνητικό δίπολο» εννοούμε απλά έναν κλειστό ρευματικό βρόχο. Θεωρούμε ένα μικρό, επίπεδο βρόχο εμβαδού a, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I. Ορίζουμε ένα διάνυσμα $\vec{a}$, μέτρου a, κάθετο στο επίπεδο του βρόχου, με φορά συμβατή με τη φορά του ρεύματος και καθοριζόμενη σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η *μαγνητική διπολική ροπή* $\vec{m}$ του βρόχου ορίζεται ως εξής:



$$\vec{m} = I\,\vec{a}$$

Όταν ένα μαγνητικό δίπολο βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, το πεδίο τείνει να στρέψει το σύστημα έτσι ώστε η διπολική του ροπή $\vec{m}$ να ευθυγραμμιστεί με το $\vec{B}$.

Διηλεκτρικά Μέσα (Μονωτές):

Όταν ένα διηλεκτρικό (μονωτικό) μέσο βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, υφίσταται *ηλεκτρική πόλωση* (δημιουργία προσανατολισμένων ηλεκτρικών διπόλων στο εσωτερικό του υλικού). Λόγω του φαινομένου αυτού, στο εσωτερικό καθώς και στην επιφάνεια του διηλεκτρικού εμφανίζεται ένα νέο είδος φορτίων που καλούνται *φορτία πόλωσης* και η πυκνότητά τους συμβολίζεται ρ_b. Σε αντίθεση με τα ελεύθερα φορτία των αγωγών, τα φορτία πόλωσης είναι *δέσμια* σε συγκεκριμένα άτομα και δεν μπορούν να μετακινηθούν μέσα στο υλικό. Αν στο εσωτερικό ή την επιφάνεια του διηλεκτρικού υπάρχουν και άλλα φορτία *που δεν οφείλονται στην πόλωση*, τούτα καλούνται *ελεύθερα φορτία* και η πυκνότητά τους συμβολίζεται ρ_f. Τα φορτία αυτά μπορεί να είναι, π.χ., ηλεκτρόνια στις πλάκες ενός πυκνωτή που είναι σε επαφή με το διηλεκτρικό, επιπρόσθετα εξωτερικά φορτία τοποθετημένα με κάποιον τρόπο μέσα στο υλικό, ιόντα Na^+ και Cl^- μέσα σε διάλυμα NaCl σε H_2O, κλπ. Η ολική πυκνότητα φορτίου στο υλικό είναι το άθροισμα $\rho = \rho_f + \rho_b$.

Στην περίπτωση ενός διηλεκτρικού, ο νόμος του Gauss μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\oint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = Q_{f,in} \qquad <=> \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$$

όπου $\vec{D}$= *ηλεκτρική μετατόπιση* (το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται στα *ελεύθερα* φορτία μόνο). Για *γραμμικό* μέσο (στο οποίο η πόλωση είναι ανάλογη της έντασης του *ολικού* ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ που οφείλεται σε *όλα* τα φορτία), ισχύει ότι

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \text{όπου} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

(ε = *διηλεκτρικότητα του μέσου* , χ_e = *ηλεκτρική επιδεκτικότητα*). Καλούμε

$$\kappa_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e$$ (*σχετική διηλεκτρικότητα* ή *διηλεκτρική σταθερά* του μέσου) .

Για όλα τα υλικά ισχύει ότι $\chi_e \geq 0,\ \varepsilon \geq \varepsilon_0,\ \kappa_e \geq 1$. Για το *κενό*, $\chi_e = 0,\ \varepsilon = \varepsilon_0,\ \kappa_e = 1$.

Μαγνητικά Μέσα (θεωρητικά, *όλα* τα υλικά):

Όταν ένα υλικό βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο, υφίσταται *μαγνητική πόλωση* ή *μαγνήτιση* (δημιουργία προσανατολισμένων μαγνητικών διπόλων στο εσωτερικό του υλικού). Λόγω του φαινομένου αυτού, στο εσωτερικό καθώς και στην επιφάνεια του υλικού εμφανίζεται ένα νέο είδος ρευμάτων που καλούνται *ρεύματα μαγνήτισης* (πυκνότητα $\vec{J}_b$). Σε αντίθεση με τα ρεύματα ελεύθερων φορτίων που διαρρέουν τους αγωγούς, τα ρεύματα μαγνήτισης είναι *δέσμια*, με την έννοια ότι δεν συνιστούν μετακίνηση φορτίου σε μεγάλες αποστάσεις αλλά είναι αθροιστικά (μακροσκοπικά) φαινόμενα, αποτελούμενα από συνεισφορά πολλών μικροσκοπικών ρευμάτων που είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένα με άτομα του υλικού. Αν στο εσωτερικό ή την επιφάνεια του μαγνητικού μέσου υπάρχουν και άλλα ρεύματα *που δεν οφείλονται στη μαγνήτιση*, τούτα καλούνται *ελεύθερα ρεύματα* (διότι γενικά οφείλονται σε πραγματική μετακίνηση φορτίου στο χώρο) και η πυκνότητά τους συμβολίζεται $\vec{J}_f$. Τα ρεύματα αυτά μπορεί, π.χ., να ρέουν μέσα σε σύρματα που διαπερνούν το υλικό (ή μέσα στο ίδιο το υλικό εφόσον αυτό είναι αγωγός), να οφείλονται σε κίνηση ιόντων μέσα σε κάποιο υγρό, κλπ. Η ολική πυκνότητα ρεύματος στο υλικό είναι $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b$.

Στην περίπτωση ενός μαγνητικού υλικού, ο νόμος του Ampère μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{f,in} \qquad <=> \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_f$$

όπου $\vec{H}$ = *βοηθητικό πεδίο* (το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στα *ελεύθερα* ρεύματα μόνο). Για *γραμμικό* μέσο (στο οποίο η μαγνήτιση είναι ανάλογη της έντασης του *ολικού* μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ που οφείλεται σε *όλα* τα ρεύματα), ισχύει ότι

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} \qquad \text{όπου} \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m)$$

(μ = *μαγνητική διαπερατότητα του μέσου* , χ_m = *μαγνητική επιδεκτικότητα*). Καλούμε

$$\kappa_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1+\chi_m \qquad (\textit{σχετική διαπερατότητα} \text{ του υλικού})\ .$$

Για όλα τα υλικά ισχύει ότι $|\chi_m|<1$, έτσι ώστε $\kappa_m>0$. Ειδικά, $\chi_m>0$ και $\kappa_m>1$ για τα *παραμαγνητικά* μέσα, ενώ $\chi_m<0$ και $\kappa_m<1$ για τα *διαμαγνητικά* μέσα. Για το *κενό*, $\chi_m=0$, $\mu=\mu_0$, $\kappa_m=1$.

Εφαρμογές:

1. Η τοποθέτηση διηλεκτρικού ανάμεσα στις πλάκες ενός πυκνωτή έχει σαν αποτέλεσμα την *ελάττωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου* στο εσωτερικό του πυκνωτή, την *ελάττωση της τάσης* ανάμεσα στις πλάκες, και την *αύξηση της χωρητικότητας* του πυκνωτή.

2. Η τοποθέτηση *παραμαγνητικού* υλικού στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς επιφέρει *αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου*. Αντίθετα, η παρουσία *διαμαγνητικού* υλικού προκαλεί *ελάττωση* του μαγνητικού πεδίου.

ΧΡΟΝΙΚΑ-ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ Η/Μ ΠΕΔΙΑ

Ηλεκτρεγερτική «Δύναμη» Κυκλώματος:

Με τον όρο «κύκλωμα» εννοούμε έναν κλειστό βρόχο μέσα σε Η/Μ πεδίο. Ως *ηλεκτρεγερτική «δύναμη»* (ΗΕΔ) ενός κυκλώματος C τη χρονική στιγμή t, ορίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot \overrightarrow{dl}$$

όπου $\vec{f}$ η δύναμη ανά μονάδα φορτίου κατά μήκος του κυκλώματος τη στιγμή αυτή, και $\overrightarrow{dl}$ ένα στοιχειώδες τμήμα του κυκλώματος. Προσέξτε ότι το πρόσημο της ΗΕΔ αντιστρέφεται αν αντιστρέψουμε τη φορά διαγραφής του βρόχου.

Ειδικές περιπτώσεις:

- Για *σταθερό* κύκλωμα μέσα σε *στατικό* Η/Μ πεδίο, ισχύει ότι $\mathcal{E} = 0$.

- Για σταθερό κύκλωμα μέσα σε *χρονικά-μεταβαλλόμενο* Η/Μ πεδίο, έχουμε ότι

  $$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

  όπου $\vec{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (προσέξτε ότι το χρονικά-μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο *δεν* είναι αστρόβιλο).

- Σε κύκλωμα με αντίσταση και πηγή (μπαταρία) τάσης V, η ΗΕΔ ισούται με $\mathcal{E} = V$.

- Για κινούμενο πλαίσιο C μέσα σε *στατικό* μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, η ΗΕΔ είναι

  $$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{dl}$$

  όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του στοιχείου $\overrightarrow{dl}$ του κυκλώματος (η ταχύτητα αυτή μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος του πλαισίου αν αυτό περιστρέφεται).

Η ΗΕΔ έχει διαστάσεις ηλεκτρικού δυναμικού (ή τάσης).

Εξισώσεις του Maxwell:

1. Σε ολοκληρωτική μορφή:

$$(\alpha) \quad \oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = Q_{in} / \varepsilon_0$$

$$(\beta) \quad \oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$

$$(\gamma) \quad \oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{da}$$

$$(\delta) \quad \oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{in} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{da}$$

2. Σε διαφορική μορφή [1] :

$$(\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

3. Εναλλακτική διαφορική μορφή (κατάλληλη για Η/Μ πεδία μέσα στην ύλη):

$$(\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad (\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

όπου $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$ (για γραμμικό μέσο).

Φυσική σημασία: Οι (α) και (β) εκφράζουν το νόμο του Gauss για τον Ηλεκτρισμό και το Μαγνητισμό, αντίστοιχα: η (α) αντιστοιχεί στο νόμο του Coulomb, ενώ η φυσική ερμηνεία τής (β) είναι η απουσία ελεύθερων μαγνητικών πόλων. Η (γ) αποτελεί το νόμο των Faraday-Henry (*νόμος της Η/Μ επαγωγής*), σύμφωνα με τον οποίο ένα χρονικά-μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο συνοδεύεται από ηλεκτρικό πεδίο, και η (δ) το νόμο των Ampère-Maxwell (ο οποίος είναι γενίκευση του νόμου του Ampère), σύμφωνα με τον οποίο ένα χρονικά-μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο συνοδεύεται από μαγνητικό πεδίο. Οι πυκνότητες $\rho(\vec{r},t)$ και $\vec{J}(\vec{r},t)$ *περιλαμβάνουν όλα τα φορτία και όλα τα ρεύματα αδιακρίτως* (π.χ., ελεύθερα φορτία και ρεύματα, δέσμια φορτία πόλωσης, δέσμια ρεύματα μαγνήτισης, κλπ.), ενώ τα $\rho_f(\vec{r},t)$ και $\vec{J}_f(\vec{r},t)$ παριστούν πυκνότητες *ελεύθερου* φορτίου και ρεύματος, αντίστοιχα, μέσα σε ένα υλικό. Τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ οφείλονται σε *όλους* τους φορείς (ελεύθερους *και* δέσμιους), ενώ τα πεδία $\vec{D}$ και $\vec{H}$ οφείλονται σε *ελεύθερους* φορείς μόνο.

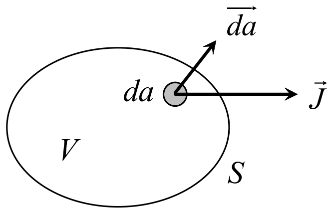
[1] Προκύπτουν από την αντίστοιχη ολοκληρωτική μορφή με χρήση των θεωρημάτων Gauss και Stokes.

Εξίσωση Συνεχείας – Διατήρηση του Φορτίου:

Άμεση συνέπεια των διαφορικών εξισώσεων του Maxwell είναι η εξίσωση συνεχείας:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Σε ολοκληρωτική μορφή,



$$\frac{d}{d\,t} \int_V \rho \, dv = - \oint_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{da}$$

Αυτό γράφεται:

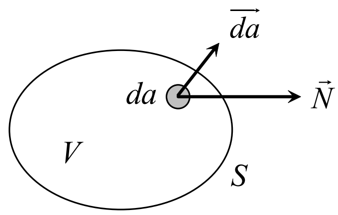
$$\frac{d}{d\,t} Q_{in}(t) = - I_{out}(t) \ , \quad \text{όπου} \quad \int_V \rho \, dv = Q_{in}(t) \ , \quad \oint_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{da} = I_{out}(t) \ ,$$

και εκφράζει τη *διατήρηση του φορτίου*.

Διάνυσμα Poynting:

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Φυσική σημασία: Εκφράζει ροή ενέργειας του Η/Μ πεδίου ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας, κατά τον ίδιο τρόπο που η πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ εκφράζει ροή ηλεκτρικού φορτίου ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας.



S = κλειστή επιφάνεια

Ολική ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που *εξέρχεται* από την $S = \oint_S \vec{N} \cdot \overrightarrow{da}$.

Η/Μ ΚΥΜΑΤΑ - Η/Μ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

Κύματα (Γενικά):

Γενικά, *κύμα* ονομάζεται κάθε φυσική κατάσταση που, παραγόμενη σε ένα σημείο του χώρου, διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα και γίνεται αργότερα αντιληπτή σε άλλα σημεία του χώρου (έχοντας ενδεχομένως υποστεί στο μεταξύ και κάποια αλλοίωση). Αυτό που βασικά διαδίδεται είναι η *διαταραχή* (μεταβολή) σε ένα υπάρχον πεδίο το οποίο εκφράζει μια φυσική ιδιότητα, όπως π.χ. ένα Η/Μ πεδίο, η παραμόρφωση ενός ελατηρίου, η πίεση σε ένα αέριο, η κάθετη απομάκρυνση σε μια χορδή, η συμπίεση σε ένα στερεό, κλπ. Η μαθηματική έκφραση

$$\xi = \xi(x,t) = f\,(x \pm \upsilon\, t)$$

περιγράφει μια φυσική κατάσταση που διαδίδεται χωρίς παραμόρφωση κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα (μέτρου) υ. Η έκφραση αυτή επαληθεύει την *κυματική εξίσωση*

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Ειδικά, για ένα *αρμονικό κύμα*,

$$\xi(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \alpha)$$

όπου $\omega = k\upsilon$ <=> $\upsilon = \omega / k$. Πιο γενικά, η έκφραση

$$\xi(\vec{r}, t) = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

παριστά ένα *επίπεδο αρμονικό κύμα πλάτους* A, που διαδίδεται στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{k}$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon=\omega/k$, όπου $k=|\vec{k}|$. Το $\vec{k}$ καλείται *κυματοδιάνυσμα*, και το ω *κυκλική συχνότητα* του κύματος. (Ο όρος «επίπεδο κύμα» σχετίζεται με την παρατήρηση ότι, για κάθε χρονική στιγμή t, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου το πεδίο ξ έχει σταθερή τιμή είναι επίπεδη επιφάνεια κάθετη στο διάνυσμα $\vec{k}$.) Σε μιγαδική μορφή, γράφουμε:

$$\xi(\vec{r}, t) = A\exp\{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\} \equiv A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

(όπου $A=|A|e^{i\alpha}$ μιγαδικό πλάτος). Τα κύματα αυτής της μορφής ικανοποιούν την κυματική εξίσωση

$$\nabla^2\xi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Εξισώσεις Maxwell στο Κενό ($\rho = 0,\ \vec{J} = 0$)**:**

$$(\alpha)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad\qquad (\gamma)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(\beta)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad\qquad (\delta)\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Όλες οι λύσεις $(\vec{E},\vec{B})$ του συστήματος των εξισώσεων αυτών ικανοποιούν επίσης την ......

Εξίσωση Η/Μ Κύματος στο Κενό:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

όπου $\vec{A} = \vec{E}$ ή $\vec{B}$, και $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ (*ταχύτητα διαδόσεως*)

Φυσική σημασία: Το χρονικά-μεταβαλλόμενο Η/Μ πεδίο έχει κυματική συμπεριφορά. Τούτο σημαίνει ότι, μια μεταβολή (*διαταραχή*) του Η/Μ πεδίου σε μια περιοχή του χώρου, μια δεδομένη χρονική στιγμή, δεν γίνεται ταυτόχρονα αντιληπτή και στα άλλα σημεία του χώρου αλλά διαδίδεται στο χώρο με τη μορφή κύματος που «ταξιδεύει» με ταχύτητα c (στο κενό). Ειδικά, το φως είναι μια Η/Μ διαταραχή που διαδίδεται σαν Η/Μ κύμα με την ταχύτητα αυτή. Όπως βρίσκεται, $c = 3\times 10^8\ m/s$.

Γενικά, η ταχύτητα διαδόσεως ενός Η/Μ κύματος σε ένα υλικό μέσο εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες του μέσου (π.χ., αγωγιμότητα, διηλεκτρικότητα, κλπ.) και είναι πάντα μικρότερη από το c.

Ιδιότητες Επίπεδου Η/Μ Κύματος:

Σε ένα *επίπεδο* Η/Μ κύμα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου το Η/Μ πεδίο έχει σταθερή τιμή είναι επίπεδη επιφάνεια κάθετη στη διεύθυνση διαδόσεως. Το κύμα αυτό έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος (*εγκάρσιο κύμα*), και ταλαντώνονται σε φάση.
2. Τα μέτρα των στιγμιαίων τιμών των $\vec{E}$ και $\vec{B}$ συνδέονται με τη σχέση $E = cB$.
3. Το διάνυσμα Poynting $\vec{N} = (1/\mu)\vec{E}\times\vec{B}$ (που εκφράζει ροή ενέργειας) είναι στην κατεύθυνση διαδόσεως του κύματος.
4. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνεισφέρουν εξίσου στην ενέργεια του κύματος.

Πρόσπτωση και Διάδοση Η/Μ Κύματος σε Αγώγιμο Μέσο:

Το Η/Μ κύμα υφίσταται μερική *ανάκλαση* στην επιφάνεια του αγωγού, και μερική *απορρόφηση* μέχρι κάποιο βάθος *Δ* που καλείται *επιδερμικό βάθος* και εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά τόσο του κύματος (συχνότητα), όσο και του αγώγιμου υλικού. Για σχετικά χαμηλόσυχνα Η/Μ κύματα, το επιδερμικό βάθος *ελαττώνεται* με την αύξηση της συχνότητας. Έτσι, *τα πιο χαμηλόσυχνα κύματα είναι και πιο διεισδυτικά*. Επί πλέον, όσο πιο αγώγιμο είναι το υλικό, τόσο πιο μεγάλη είναι η ανακλαστική του ικανότητα, καθώς και η απορροφητικότητά του (το επιδερμικό βάθος *ελαττώνεται* με την αύξηση της αγωγιμότητας). Για «άπειρη» (πάρα πολύ μεγάλη) αγωγιμότητα, θα έχουμε ολική ανάκλαση του Η/Μ κύματος.

Τα παραπάνω φαινόμενα εξηγούν γιατί η χρήση του radar δεν είναι πρακτικά δυνατή για τον εντοπισμό υποβρυχίων που βρίσκονται σε σχετικά μεγάλο βάθος, καθώς και γιατί τα ίδια τα υποβρύχια δεν χρησιμοποιούν το radar για τον εντοπισμό αντικειμένων (η θάλασσα είναι αγωγός λόγω των ιόντων των αλάτων που περιέχει, με αποτέλεσμα να απορροφά τα Η/Μ κύματα).

Η/Μ Ακτινοβολία:

Είναι η διάδοση της ενέργειας του Η/Μ πεδίου μέσω Η/Μ κυμάτων. Παράγεται:

- από *επιταχυνόμενα* (όχι απλά κινούμενα!) *ηλεκτρικά φορτία*, ή
- από *χρονικά-μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά ρεύματα*.

Παραδείγματα:

- Ακτινοβολία παλλόμενου ηλεκτρικού ή μαγνητικού διπόλου.
- Ακτινοβολία σύγχροτρου (στους κυκλικούς επιταχυντές σωματίων).
- Ακτινοβολία επιβράδυνσης (*bremsstrahlung*) – παραγωγή ακτίνων X.

Φάσμα της Η/Μ Ακτινοβολίας:

Είναι η συνολική περιοχή συχνοτήτων την οποία καλύπτει η Η/Μ ακτινοβολία που απαντάται στη Φύση. Για πρακτικούς λόγους, το φάσμα της ακτινοβολίας υποδιαιρείται στις εξής επί μέρους περιοχές (με αυξανόμενη συχνότητα):

1. Ραδιοκύματα
2. Μικροκύματα
3. Υπέρυθρη ακτινοβολία
4. Ορατό φως
5. Υπεριώδης ακτινοβολία
6. Ακτίνες X
7. Ακτίνες γ

Συχνότητα Πλάσματος Αγώγιμου Μέσου:

Είναι η ελάχιστη συχνότητα ακτινοβολίας ω_p για την οποία ένα αγώγιμο μέσο γίνεται «διαφανές». Δηλαδή, για συχνότητες *μικρότερες* από ω_p , η ακτινοβολία υφίσταται μερική ανάκλαση στην επιφάνεια του υλικού, καθώς και απορρόφηση στο εσωτερικό του (όπως έχουμε ήδη αναφέρει). Όταν όμως η συχνότητα της ακτινοβολίας *υπερβεί* την τιμή ω_p (χαρακτηριστική για το αγώγιμο υλικό), το επιδερμικό βάθος Δ αυξάνει απεριόριστα και η ακτινοβολία διέρχεται από το υλικό χωρίς σημαντική ανάκλαση ή απορρόφηση. Για παράδειγμα, για τα περισσότερα μέταλλα η συχνότητα πλάσματος είναι στην περιοχή της υπεριώδους ακτινοβολίας. Έτσι, ενώ ένα μέταλλο είναι αδιαφανές στο ορατό φως, καθίσταται διαφανές στην υπεριώδη ακτινοβολία.

Το φαινόμενο της ανάκλασης των Η/Μ κυμάτων στις επιφάνειες αγώγιμων μέσων αξιοποιείται στις τηλεπικοινωνίες για τη διάδοση ραδιοκυμάτων ΑΜ σε μεγάλες αποστάσεις. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω ανάκλασης στην *ιονόσφαιρα*, δεδομένου ότι η συχνότητα πλάσματος της τελευταίας υπερβαίνει τις συχνότητες των ΑΜ. Αντίθετα, τα ραδιοκύματα FM, τα μικροκύματα, η υπέρυθρη ακτινοβολία, το ορατό φως, κλπ., διαπερνούν την ιονόσφαιρα με μικρές μόνο απώλειες λόγω ανάκλασης ή απορρόφησης, αφού οι συχνότητές τους ξεπερνούν την ω_p της ιονόσφαιρας. Έτσι, η διάδοση υψίσυχνων σημάτων σε πολύ μεγάλες αποστάσεις πάνω στη Γη γίνεται με τη βοήθεια τηλεπικοινωνιακών δορυφόρων.

ΤΕΛΟΣ