

Κ. Ι. Παπαχρήστου - Α. Ν. Μαγουλάς

**ΗΛΕΚΤΡΕΓΕΡΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ**  
**ΕΝΑΣ ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ «ΜΠΕΡΔΕΜΕΝΟΥΣ»!**

Μετάφραση από τα Αγγλικά, του άρθρου:

***Electromotive Force:  
A Guide for the Perplexed***

(<http://arxiv.org/abs/1211.6463>)

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ - 2013



# Ηλεκτρεγερτική δύναμη: Ένας οδηγός για «μπερδεμένους»!

Κ. Ι. Παπαχρήστου \*, Α. Ν. Μαγουλάς \*\*

\* Τομέας Φυσικών Επιστημών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

E-mail: [papachristou@snd.edu.gr](mailto:papachristou@snd.edu.gr)

\*\* Τομέας Ηλεκτροτεχνίας & Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

E-mail: [aris@snd.edu.gr](mailto:aris@snd.edu.gr)

**Περίληψη.** Η έννοια της ηλεκτρεγερτικής δύναμης (ΗΕΔ) μπορεί να παρουσιαστεί με διάφορους τρόπους σε ένα προπτυχιακό μάθημα θεωρητικού ηλεκτρομαγνητισμού. Η ποικιλία των εναλλακτικών εκφράσεων για την ΗΕΔ αποτελεί συχνά αιτία σύγχυσης για τον σπουδαστή. Παρουσιάζουμε εδώ μια περίληψη των βασικών ιδεών, υιοθετώντας μια παιδαγωγική λογική που αναπτύσσεται από το γενικό προς το ειδικό. Η ΗΕΔ ενός «κυκλώματος» ορίζεται αρχικά με τον πλέον γενικό τρόπο. Με βάση τον ορισμό αυτό, υπολογίζονται στη συνέχεια οι εκφράσεις για την ΗΕΔ μερικών γνωστών ηλεκτροδυναμικών συστημάτων. Με τον τρόπο αυτό, μια ποικιλία διαφορετικών φυσικών καταστάσεων ενοποιούνται μέσα σε ένα κοινό θεωρητικό πλαίσιο.

## 1. Εισαγωγή

Η δυσκολία που συναντήσαμε στη συγγραφή αυτού του άρθρου δεν οφείλεται απλά και μόνο στο ίδιο το αντικείμενο. Θα έπρεπε πρώτα να ξεπεράσουμε κάποιες θεμελιώδεις διαφορές παιδαγωγικής φιλοσοφίας ανάμεσα σε έναν (ισχυρογνώμονα) θεωρητικό φυσικό και έναν (εξίσου –αν όχι περισσότερο– ισχυρογνώμονα) ηλεκτρολόγο μηχανικό. Επιτέλους, κάποιος συμβιβασμός βρέθηκε! Αυτό το άρθρο είναι αποτέλεσμα μιας τέτοιας «αμοιβαίας κατανόησης».

Έχοντας διδάξει μαθήματα ηλεκτροδυναμικής για προπτυχιακούς σπουδαστές επί αρκετά χρόνια, έχουμε διαπιστώσει ότι, στο μυαλό πολλών μαθητών μας, η έννοια της *ηλεκτρεγερτικής δύναμης (ΗΕΔ)* φέρει μια κάποια αύρα μυστηρίου. Τι είναι, τελικά, η ΗΕΔ; Είναι η τάση μιας ιδανικής πηγής σε ένα κύκλωμα συνεχούς ρεύματος; Είναι το έργο μιας πηγής ανά μονάδα φορτίου; Ή μήπως, σε πιο προχωρημένο επίπεδο, είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής; Και τι γίνεται στην περίπτωση που υφίσταται ένα μαγνητικό πεδίο στο χώρο, αντί ενός ηλεκτρικού;

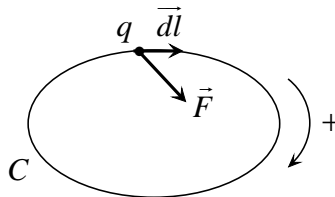
Γενικά μιλώντας, το πρόβλημα σχετικά με την ΗΕΔ έγκειται στην διαφορετικότητα των φυσικών καταστάσεων όπου η έννοια αυτή βρίσκει εφαρμογή, με αποτέλεσμα να υφίσταται μια ποικιλία εκφράσεων που ορίζουν την ΗΕΔ. Το αντικείμενο αυτό συζητείται λεπτομερώς, φυσικά, σε όλα τα καθιερωμένα διδακτικά εγχειρίδια ηλεκτρομαγνητισμού, τόσο στο ενδιάμεσο [1-9] όσο και στο προχωρημένο [10-12] επίπεδο. Στο παρόν άρθρο συγκεντρώνουμε τις βασικές ιδέες, επιλέγοντας μια παιδαγωγική προσέγγιση που αναπτύσσεται από το γενικό προς το ειδικό. Ξεκινούμε με τον ορισμό της έννοιας της ΗΕΔ ενός «κυκλώματος» με τον πλέον γενικό τρόπο. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον ορισμό αυτό σε συγκεκριμένα ηλεκτροδυναμικά συστήματα για να βρούμε τις γνώριμες εκφράσεις για την ΗΕΔ. Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης έγκειται στο ότι ένα πλήθος διαφορετικών φυσικών καταστάσεων αντιμετωπίζονται με ενοποιημένο τρόπο μέσα σε ένα κοινό θεωρητικό πλαίσιο.

Ο γενικός ορισμός της ΗΕΔ δίνεται στην Παράγραφο 2. Στις Παρ.3-5 γίνεται εφαρμογή του ορισμού σε ειδικές περιπτώσεις, όπως η ΗΕΔ λόγω κίνησης, η ΗΕΔ λόγω ενός χρονικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου, και η ΗΕΔ ενός κυκλώματος συνεχούς ρεύματος που αποτελείται από ιδανική πηγή και αντίσταση. Στην Παρ.6 εξετάζεται η σχέση ανάμεσα στην ΗΕΔ και τον νόμο του Ohm.

## 2. Ο γενικός ορισμός της ΗΕΔ

Θεωρούμε μια περιοχή του χώρου στην οποία υφίσταται ένα ηλεκτρομαγνητικό (H/M) πεδίο. Κατά την πλέον γενική έννοια, κάθε κλειστή διαδρομή  $C$  (ή βρόχος) μέσα στην περιοχή αυτή θα καλείται «κύκλωμα» (ανεξάρτητα από το αν το σύνολο ή τμήματα της καμπύλης  $C$  αποτελούνται ή όχι από υλικά μέρη όπως σύρματα, αντιστάσεις, πυκνωτές, μπαταρίες, ή οποιαδήποτε άλλα στοιχεία των οποίων η παρουσία μπορεί να επηρεάσει το H/M πεδίο).

Ορίζουμε αυθαίρετα μια θετική φορά διαγραφής του βρόχου  $C$  και θεωρούμε ένα στοιχείο  $\vec{dl}$  του  $C$  προσανατολισμένο στη θετική φορά. Φανταστείτε τώρα ένα δοκιμαστικό φορτίο  $q$  τοποθετημένο στη θέση του  $\vec{dl}$ , και έστω  $\vec{F}$  η δύναμη στο  $q$  τη χρονική στιγμή  $t$ :



Τη δύναμη αυτή ασκεί το ίδιο το H/M πεδίο καθώς και, πιθανώς, επιπρόσθετες πηγές ενέργειας (π.χ., μπαταρίες) που έχουν τη δυνατότητα ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης με το  $q$ . Η δύναμη ανά μονάδα φορτίου στη θέση που βρίσκεται το  $\vec{dl}$ , τη χρονική στιγμή  $t$ , είναι

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι η  $\vec{f}$  είναι ανεξάρτητη από το  $q$ , αφού η δύναμη τόσο από το H/M πεδίο, όσο και από τις πηγές, πάνω στο  $q$  είναι ανάλογη του φορτίου. Ειδικότερα, αντιστρέφοντας το πρόσημο του  $q$  δεν θα επηρεαστεί η  $\vec{f}$  (αν και θα αλλάξει η κατεύθυνση της  $\vec{F}$ ).

Ορίζουμε τώρα την *ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ)* του κυκλώματος  $C$  τη χρονική στιγμή  $t$  σαν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $\vec{f}$  κατά μήκος του  $C$ , κατά την θετική φορά διαγραφής της καμπύλης:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot \vec{dl} \quad (2)$$

Προσέξτε ότι το πρόσημο της ΗΕΔ εξαρτάται από την επιλογή θετικής φοράς διαγραφής της καμπύλης  $C$ : αλλάζοντας αυτή την επιλογή, το πρόσημο της  $\mathcal{E}$  αντιστρέφεται.

Παρατηρούμε επίσης ότι, στο μη-σχετικιστικό όριο, η ΗΕΔ ενός κυκλώματος  $C$  είναι ίδια για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές αφού, στο όριο αυτό, η δύναμη  $\vec{F}$  μένει αμετάβλητη κάτω από μια αλλαγή συστήματος αναφοράς.

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα εφαρμόσουμε τον ορισμό (2) σε έναν αριθμό ειδικών ηλεκτροδυναμικών καταστάσεων οι οποίες είναι σίγουρα γνώριμες στον σπουδαστή.

### 3. ΗΕΔ λόγω κίνησης σε στατικό μαγνητικό πεδίο

Θεωρούμε κύκλωμα αποτελούμενο από κλειστό μεταλλικό σύρμα  $C$ . Το σύρμα κινείται μέσα σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}(\vec{r})$ . Έστω  $\vec{v}$  η ταχύτητα του στοιχείου  $d\vec{l}$  του  $C$  ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς μας. Ένα φορτίο  $q$  (ας πούμε, ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο του σύρματος) στη θέση που βρίσκεται το  $d\vec{l}$  εκτελεί σύνθετη κίνηση, λόγω της κίνησης του ίδιου του βρόχου  $C$  ως προς το σύστημα αναφοράς μας, όπως επίσης και λόγω της κίνησης του  $q$  κατά μήκος του  $C$ . Η ολική ταχύτητα του  $q$  ως προς εμάς είναι  $\vec{v}_{tot} = \vec{v} + \vec{v}'$ , όπου  $\vec{v}'$  η ταχύτητα του  $q$  σε διεύθυνση παράλληλη προς το  $d\vec{l}$ . Η δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο στο  $q$  είναι

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q (\vec{v}_{tot} \times \vec{B}) = q (\vec{v} \times \vec{B}) + q (\vec{v}' \times \vec{B}) \Rightarrow \\ \vec{f} &= \frac{\vec{F}}{q} = (\vec{v} \times \vec{B}) + (\vec{v}' \times \vec{B})\end{aligned}$$

Από την (2), τότε, η ΗΕΔ του κυκλώματος  $C$  είναι

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \oint_C (\vec{v}' \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Όμως, δεδομένου ότι η ταχύτητα  $\vec{v}'$  είναι παράλληλη στο  $d\vec{l}$ , έχουμε ότι  $(\vec{v}' \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0$ . Έτσι, τελικά,

$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

Παρατηρούμε ότι το σύρμα δεν διατηρεί απαραίτητα σταθερό σχήμα ή προσανατολισμό κατά τη διάρκεια της κίνησης! Παρατηρήστε επίσης ότι η ταχύτητα  $\vec{v}$  μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος του κυκλώματος.

Χρησιμοποιώντας την (3), μπορεί να αποδειχθεί (βλ. Παράρτημα) ότι

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4)$$

όπου  $\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{da}$  η μαγνητική ροή δια μέσου του σύρματος  $C$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Προσέξτε ότι η σχέση (4) δεν εκφράζει κάποιον νέο φυσικό νόμο: είναι απλά άμεση συνέπεια του ορισμού της ΗΕΔ!

#### 4. ΗΕΔ λόγω ενός χρονικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου

Θεωρούμε τώρα ένα κλειστό σύρμα  $C$  που είναι ακίνητο μέσα σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Όπως δείχνει το πείραμα, μόλις το  $\vec{B}$  αρχίσει να μεταβάλλεται, στο σύρμα εμφανίζεται ηλεκτρικό ρεύμα. Αυτό φαίνεται περίεργο, δεδομένου ότι τα ελεύθερα φορτία στο (ακίνητο) σύρμα ήταν αρχικά ακίνητα. Και, όπως γνωρίζουμε, το μαγνητικό πεδίο ασκεί δυνάμεις σε κινούμενα φορτία μόνο! Παρατηρείται επίσης πειραματικά ότι, όταν το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  σταματά να μεταβάλλεται χρονικά, το ρεύμα στο σύρμα εξαφανίζεται. Το μόνο που μπορεί να θέσει σε κίνηση τα αρχικά ακίνητα φορτία και να διατηρήσει την κίνησή τους, είναι ένα ηλεκτρικό πεδίο.

Οδηγούμαστε έτσι στο συμπέρασμα ότι ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο συνοδεύεται υποχρεωτικά από ηλεκτρικό πεδίο. (Συχνά λέγεται ότι «ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο επάγει ηλεκτρικό πεδίο». Αυτό είναι κάπως παραπλανητικό γιατί δίνει την εντύπωση ότι η «πηγή» ενός ηλεκτρικού πεδίου θα μπορούσε να είναι ένα μαγνητικό πεδίο. Ας μην ξεχνάμε, όμως, ότι οι αληθινές πηγές κάθε Η/Μ πεδίου είναι τα ηλεκτρικά φορτία και τα ηλεκτρικά ρεύματα!)

Έστω, τώρα,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  το ηλεκτρικό πεδίο που συνοδεύει το χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$ . Θεωρούμε και πάλι ένα φορτίο  $q$  στη θέση του στοιχείου  $\vec{dl}$  του σύρματος. Δοθέντος ότι το σύρμα είναι τώρα ακίνητο (ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς μας), η ταχύτητα του  $q$  θα οφείλεται αποκλειστικά στην κίνηση του φορτίου κατά μήκος του σύρματος, δηλαδή σε διεύθυνση παράλληλη προς το  $\vec{dl}$ :  $\vec{v}_{tot} = \vec{v}'$  (αφού  $\vec{v} = 0$ ). Η δύναμη που ασκεί το Η/Μ πεδίο στο  $q$  είναι

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q [\vec{E} + (\vec{v}_{tot} \times \vec{B})] = q [\vec{E} + (\vec{v}' \times \vec{B})] \Rightarrow \\ \vec{f} &= \frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + (\vec{v}' \times \vec{B})\end{aligned}$$

Η ΗΕΔ του κυκλώματος  $C$  τώρα είναι

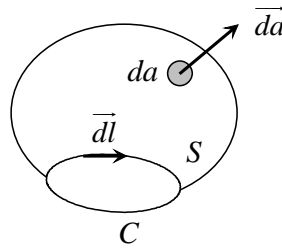
$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot \vec{dl} = \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} + \oint_C (\vec{v}' \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

Αλλά, όπως εξηγήσαμε νωρίτερα,  $(\vec{v}' \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = 0$ . Έτσι, τελικά,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad (5)$$

Η σχέση (4) εξακολουθεί να ισχύει. Αυτή τη φορά, όμως, δεν είναι μια απλή μαθηματική συνέπεια του ορισμού της ΗΕΔ, αλλά ένας αληθινός φυσικός νόμος που προκύπτει από το πείραμα! Ας εξετάσουμε τον νόμο αυτό αναλυτικά.

Σε μια περιοχή του χώρου όπου υφίσταται χρονικά μεταβαλλόμενο Η/Μ πεδίο  $(\vec{E}, \vec{B})$ , θεωρούμε μια αυθαίρετη ανοιχτή επιφάνεια  $S$  που περατώνεται σε κλειστή καμπύλη  $C$ :



(Η σχετική φορά τού  $\vec{dl}$  και του στοιχείου επιφάνειας  $\vec{da}$ , κάθετου στην  $S$ , καθορίζεται σύμφωνα με τον γνωστό κανόνα του δεξιού χεριού.) Ο βρόχος  $C$  υποτίθεται ακίνητος ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή. Έτσι, η ΗΕΔ κατά μήκος του  $C$  τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από τη σχέση (5). Η μαγνητική ροή δια μέσου της  $S$  τη στιγμή αυτή είναι

$$\Phi_m(t) = \int_S \vec{B} \cdot \vec{da}$$

(Παρατηρούμε ότι τα πρόσημα των  $\mathcal{E}$  και  $\Phi_m$  εξαρτώνται από την επιλογή θετικής φοράς για την καμπύλη  $C$ .) Επειδή το πεδίο  $\vec{B}$  είναι σωληνωτό, η τιμή της ροής  $\Phi_m$  για δοσμένο  $C$  είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της επιφάνειας  $S$ . Δηλαδή, η ίδια μαγνητική ροή περνάει από κάθε ανοιχτή επιφάνεια που έχει ως όριο την κλειστή καμπύλη  $C$ .

Σύμφωνα με τον νόμο Faraday-Henry,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (6)$$

ή αναλυτικά,

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{da} \quad (7)$$

(Το αρνητικό πρόσημο στα δεξιά μέλη των (6) και (7) εκφράζει τον κανόνα του Lenz.)

Η σχέση (7) μπορεί να εκφραστεί σε διαφορική μορφή με χρήση του θεωρήματος του Stokes,

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{da}$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιφάνεια  $S$  μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. Το αποτέλεσμα είναι:

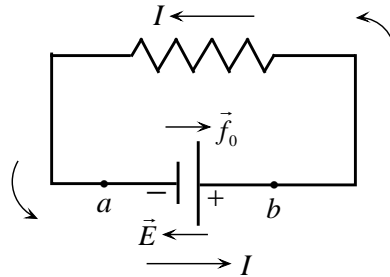
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8)$$

Παρατηρούμε ότι αν  $\partial \vec{B} / \partial t \neq 0$ , τότε αναγκαία  $\vec{E} \neq 0$ . Έτσι, όπως ήδη αναφέραμε, ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο συνοδεύεται πάντα από ηλεκτρικό πεδίο. Αν, όμως, το  $\vec{B}$  είναι στατικό ( $\partial \vec{B} / \partial t = 0$ ), τότε το  $\vec{E}$  είναι αστρόβιλο:  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , πράγμα που επιτρέπει την περίπτωση να ισχύει  $\vec{E} = 0$ .

*Πόρισμα:* Η ΗΕΔ κατά μήκος σταθερού βρόχου  $C$  μέσα σε στατικό Η/Μ πεδίο  $(\vec{E}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r}))$  είναι  $\mathcal{E} = 0$  (ο μαθητής ας το εξηγήσει αυτό).

## 5. ΗΕΔ κυκλώματος που περιέχει ιδανική πηγή και αντίσταση

Θεωρούμε κύκλωμα αποτελούμενο από ιδανική πηγή τάσης (πηγή που δεν έχει, δηλαδή, εσωτερική αντίσταση) συνδεδεμένη με εξωτερική αντίσταση. Όπως θα δείξουμε παρακάτω, η ΗΕΔ του κυκλώματος στην κατεύθυνση του ηλεκτρικού ρεύματος ισούται με την τάση  $V$  της πηγής. Επιπλέον, η ΗΕΔ σ' αυτή την περίπτωση παριστά το έργο ανά μονάδα φορτίου που προσφέρει η πηγή στο κύκλωμα.



Ας θυμηθούμε ότι, γενικά, η ΗΕΔ ενός κυκλώματος  $C$  τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

όπου  $\vec{f} = \vec{F}/q$  είναι η δύναμη ανά μονάδα φορτίου στη θέση που βρίσκεται το στοιχείο  $d\vec{l}$  του κυκλώματος, τη στιγμή  $t$ . Κατά βάση, υποθέτουμε ότι σε κάθε στοιχείο  $d\vec{l}$  έχουμε τοποθετήσει ένα δοκιμαστικό φορτίο  $q$  (αυτό θα μπορούσε να είναι, π.χ., ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο του αγωγίμου μέρους του κυκλώματος). Η δύναμη  $\vec{F}$  σε κάθε  $q$  μετριέται τότε ταυτόχρονα για όλα τα φορτία τη στιγμή  $t$ . Επειδή όμως εδώ έχουμε μια στατική (χρονικά ανεξάρτητη) κατάσταση, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα λίγο διαφορετικά: Οι μετρήσεις των δυνάμεων  $\vec{F}$  πάνω στα φορτία  $q$  δεν είναι απαραίτητο να γίνουν την ίδια χρονική στιγμή, αφού ούτως ή άλλως τίποτα δεν αλλάζει με το χρόνο. Έτσι, αντί να τοποθετήσουμε διάφορα φορτία  $q$  κατά μήκος του κυκλώματος και να μετρήσουμε τις δυνάμεις  $\vec{F}$  στο καθένα μια δεδομένη χρονική στιγμή, φανταζόμαστε ότι ένα μοναδικό φορτίο  $q$  κάνει μια πλήρη διαδρομή στο βρόχο  $C$ . Μπορούμε να υποθέσουμε, π.χ., ότι το φορτίο  $q$  είναι ένα από τα (συμβατικά θετικά) ελεύθερα ηλεκτρόνια που παίρνουν μέρος στο σταθερό ρεύμα  $I$  που ρέει στο κύκλωμα. Μετρούμε τότε τη δύναμη  $\vec{F}$  στο  $q$  σε κάθε σημείο του βρόχου  $C$ .



Υποθέτουμε λοιπόν ότι το  $q$  είναι ένα θετικό φορτίο κινούμενο στην κατεύθυνση του ρεύματος  $I$ . Υποθέτουμε επίσης ότι η φορά διαγραφής του βρόχου  $C$  είναι ίδια με τη φορά του ρεύματος (αριστερόστροφη στο σχήμα). Κατά τη διάρκεια της κίνησής του, στο  $q$  ασκούνται δύο δυνάμεις: (1) η δύναμη  $\vec{F}_0$  από την πηγή, που μεταφέρει το  $q$  από τον αρνητικό πόλο  $a$  στον θετικό πόλο  $b$  δια μέσου της πηγής, και (2) η ηλεκτροστατική δύναμη  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  λόγω του ηλεκτροστατικού πεδίου  $\vec{E}$  σε κάθε σημείο του κυκλώματος  $C$  (μέσα και έξω από την πηγή). Η ολική δύναμη στο  $q$  είναι

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_e = \vec{F}_0 + q\vec{E} \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_0}{q} + \vec{E} \equiv \vec{f}_0 + \vec{E}$$

Τότε,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{f}_0 \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{f}_0 \cdot d\vec{l} \quad (9)$$

δοθέντος ότι  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  για κάθε ηλεκτροστατικό πεδίο. Όμως, η δράση της πηγής πάνω στο  $q$  περιορίζεται στην περιοχή ανάμεσα στους πόλους της, δηλαδή στο τμήμα του κυκλώματος από το  $a$  ως το  $b$ . Έτσι,  $\vec{f}_0 = 0$  έξω από την πηγή, οπότε η (9) ανάγεται στη σχέση

$$\mathcal{E} = \int_a^b \vec{f}_0 \cdot d\vec{l} \quad (10)$$

Τώρα, επειδή το ρεύμα  $I$  είναι σταθερό, το φορτίο  $q$  κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας κατά μήκος του κυκλώματος. Αυτό σημαίνει ότι η ολική δύναμη στο  $q$  στη διεύθυνση της διαδρομής  $C$  είναι μηδέν. Στο εσωτερικό της αντίστασης, η ηλεκτροστατική δύναμη  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  εξισορροπείται από τη δύναμη στο  $q$  λόγω των συγκρούσεων του φορτίου με τα θετικά ιόντα του μετάλλου (αυτή η δύναμη δεν συνεισφέρει στην ΗΕΔ και δεν λαμβάνεται υπόψη για τον υπολογισμό της!). Στο εσωτερικό, όμως, της (ιδανικής) πηγής, όπου δεν υπάρχει αντίσταση, η ηλεκτροστατική δύναμη  $\vec{F}_e$  θα πρέπει να εξισορροπηθεί από την αντίθετη δύναμη  $\vec{F}_0$  που ασκείται από την πηγή. Έτσι, στο τμήμα του κυκλώματος ανάμεσα στο  $a$  και το  $b$ ,

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{f}_0 + \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{f}_0 = -\vec{E}$$

Η εξίσωση (10) παίρνει τότε την τελική μορφή:

$$\mathcal{E} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_b - V_a = V \quad (11)$$

όπου  $V_a$  και  $V_b$  τα ηλεκτροστατικά δυναμικά στα σημεία  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα. Δηλαδή, η ΗΕΔ ισούται με την τάση της πηγής.

Το έργο της πηγής πάνω στο  $q$  κατά τη μεταφορά του φορτίου από το  $a$  στο  $b$ , είναι

$$W = \int_a^b \vec{F}_0 \cdot d\vec{l} = q \int_a^b \vec{f}_0 \cdot d\vec{l} = q \mathcal{E} \quad (12)$$

[όπου κάναμε χρήση της (10)]. Έτσι, το έργο της πηγής ανά μονάδα φορτίου είναι  $W/q = \mathcal{E}$ . Το έργο αυτό μετατρέπεται σε θερμότητα μέσα στην αντίσταση, κι έτσι η πηγή θα πρέπει ξανά να δώσει ενέργεια ώστε να μεταφέρει τα φορτία για μια ακόμα φορά από το  $a$  στο  $b$ . Κάτι σαν το μαρτύριο του Σίσυφου στην Ελληνική μυθολογία, δηλαδή!

## 6. ΗΕΔ και νόμος του Ohm

Θεωρούμε ένα κλειστό σύρμα  $C$  μέσα σε ένα Η/Μ πεδίο. Το κύκλωμα μπορεί να περιέχει πηγές (π.χ., μπαταρία) και μπορεί επίσης να βρίσκεται σε κίνηση ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς μας. Έστω  $q$  ένα δοκιμαστικό φορτίο στη θέση που βρίσκεται το στοιχείο  $d\vec{l}$  του  $C$ , και έστω  $\vec{F}$  η ολική δύναμη στο  $q$  (εξαιτίας του Η/Μ πεδίου και/ή των πηγών) τη χρονική στιγμή  $t$ . (Όπως αναφέρθηκε στην Παρ.2, στο μη-σχετικιστικό όριο αυτή η δύναμη είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς μας.) Η δύναμη ανά μονάδα φορτίου στη θέση του  $d\vec{l}$  τη στιγμή  $t$ , τότε, είναι  $\vec{f} = \vec{F}/q$ . Σύμφωνα με τον γενικό ορισμό μας, η ΗΕΔ του κυκλώματος τη στιγμή  $t$  είναι

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l} \quad (13)$$

Τώρα, αν  $\sigma$  είναι η ειδική αγωγιμότητα του σύρματος, τότε, από τον νόμο του Ohm στη γενική του μορφή (βλ., π.χ., σελ. 285 στην αναφορά [1]) έχουμε ότι

$$\vec{J} = \sigma \vec{f} \quad (14)$$

όπου  $\vec{J}$  η πυκνότητα ρεύματος στη θέση του  $d\vec{l}$  τη στιγμή  $t$ . (Σημειώνουμε ότι η πιο συνηθισμένη έκφραση  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  είναι ειδική περίπτωση της παραπάνω σχέσης. Προσέξτε επίσης ότι το  $\vec{J}$  μετριέται ως προς το σύρμα, έτσι είναι το ίδιο για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.) Συνδυάζοντας τις (13) και (14), παίρνουμε:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sigma} \oint_C \vec{J} \cdot d\vec{l} \quad (15)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το  $\vec{J}$  είναι στη διεύθυνση του  $d\vec{l}$  σε κάθε σημείο του  $C$ , γράφουμε:

$$\vec{J} \cdot \vec{dl} = J dl = \frac{I}{S} dl$$

όπου  $S$  το σταθερό εμβαδόν διατομής του σύρματος. Με την επιπλέον υπόθεση ότι, σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , το ρεύμα  $I$  είναι σταθερό κατά μήκος του κυκλώματος (αν και μπορεί να μεταβάλλεται χρονικά), βρίσκουμε τελικά ότι

$$\mathcal{E} = \frac{l}{\sigma S} I = \frac{\rho l}{S} I = IR \quad (16)$$

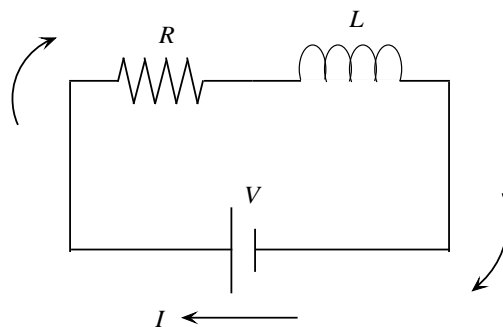
όπου  $l$  το ολικό μήκος του σύρματος,  $\rho=1/\sigma$  η ειδική αντίσταση του υλικού, και  $R$  η ολική αντίσταση του κυκλώματος. Η σχέση (16) παριστά την γνώριμη ειδική μορφή του νόμου του Ohm.

Σαν παράδειγμα, ας ξαναγυρίσουμε στο κύκλωμα της Παρ.5, αυτή τη φορά θεωρώντας μια μη-ιδανική πηγή με εσωτερική αντίσταση  $r$ . Έστω  $R_0$  η εξωτερική αντίσταση με την οποία συνδέεται η πηγή. Η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι  $R=R_0+r$ . Όπως πριν, καλούμε  $V=V_b - V_a$  τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των πόλων της πηγής, που είναι ίση με την τάση στα άκρα της εξωτερικής αντίστασης. Έτσι,  $V=IR_0$ , όπου  $I$  η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα. Η ΗΕΔ του κυκλώματος (στη φορά του ρεύματος) είναι

$$\mathcal{E} = IR = I(R_0 + r) = V + Ir$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά δυναμικού  $V$  μεταξύ των πόλων  $a$  και  $b$  ισούται με την ΗΕΔ μόνο στην περίπτωση όπου το κύκλωμα δεν διαρρέεται από ρεύμα ( $I=0$ ).

Σαν άλλο παράδειγμα, θεωρήστε ένα κύκλωμα  $C$  που περιέχει ιδανική πηγή τάσης  $V$  και έχει ολική αντίσταση  $R$  και ολική αυτεπαγωγή  $L$ :



Στην περίπτωση αυτή, η ΗΕΔ του  $C$  στην κατεύθυνση του ρεύματος είναι

$$\mathcal{E}(t) = V + V_L = V - L \frac{dI}{dt} = I(t)R$$

Για να κατανοήσουμε γιατί η ολική ΗΕΔ του κυκλώματος είναι  $V + V_L$ , σκεφτόμαστε ως εξής: Κατά την κλειστή διαδρομή του κατά μήκος του κυκλώματος, ένα δοκιμαστικό φορτίο  $q$  υπόκειται σε δύο δυνάμεις (αγνοώντας τις συγκρούσεις με τα θετικά ιόντα στο εσωτερικό του σύρματος): μια δύναμη εντός της πηγής, και μια δύναμη από το μη-συντηρητικό ηλεκτρικό πεδίο που συνοδεύει την χρονικά μεταβαλλόμενη μα-

γνητική ροή που περνάει μέσα από το κύκλωμα. Έτσι, η ολική ΗΕΔ θα είναι το άθροισμα της ΗΕΔ λόγω της (ιδανικής) πηγής (αν αυτή ήταν μόνη της) και της ΗΕΔ που εκφράζεται από τον νόμο των Faraday-Henry (6). Η δεύτερη αυτή ΗΕΔ είναι ακριβώς η  $V_L$ . Η τιμή της είναι μη-μηδενική καθόσον χρόνο το ρεύμα  $I$  μεταβάλλεται.

Μπορούμε να κάνουμε εδώ κάποιες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις που αφορούν την ενέργεια. Η ολική ισχύς που προσφέρεται στο κύκλωμα από την πηγή τη στιγμή  $t$  είναι

$$P = IV = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

Ο όρος  $I^2 R$  παριστά την ισχύ που χάνεται οριστικά υπό μορφή θερμότητας μέσα στην αντίσταση (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου, η οποία ξοδεύεται κατά την μετακίνηση των ηλεκτρονίων δια μέσου του κρυσταλλικού πλέγματος του αγωγού, και η οποία μεταβιβάζεται στα ιόντα του πλέγματος). Αυτή η ισχύς θα πρέπει να αναπληρωθεί από την πηγή έτσι ώστε να διατηρηθεί το ρεύμα ενάντια στις απώλειες μέσα στην αντίσταση. Από την άλλη μεριά, ο όρος  $LI (dI/dt)$  παριστά την ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που απαιτείται ώστε να «χτιστεί» το ρεύμα υπερνικώντας την ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής ( $V_L$ ), η οποία αντιτίθεται σε κάθε αύξηση του ρεύματος. Η ενέργεια αυτή είναι ανακτήσιμη και επιστρέφεται στην πηγή όταν το ρεύμα ελαττώνεται. Μπορούμε επίσης να την ερμηνεύσουμε σαν ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που απαιτείται ώστε να δημιουργηθεί το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στο ρεύμα. Αυτή η ενέργεια «αποθηκεύεται» στο μαγνητικό πεδίο που περιβάλλει το κύκλωμα.

## 7. Μερικές τελικές παρατηρήσεις

Κλείνοντας αυτό το άρθρο, ας ξαναθυμηθούμε μερικά σημεία που θεωρούμε σημαντικά:

1. Η ΗΕΔ ορίστηκε σαν το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της δύναμης ανά μονάδα φορτίου κατά μήκος ενός βρόχου (ή «κυκλώματος») μέσα σε Η/Μ πεδίο. Ο βρόχος μπορεί (όχι όμως απαραίτητα) να σχηματίζεται από ένα πραγματικό μεταλλικό σύρμα, και είναι δυνατό να περιέχει πηγές όπως μπαταρίες.

2. Στο κλασικό (μη-σχετικιστικό) όριο, η ΗΕΔ είναι ανεξάρτητη από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως το οποίο την μετράμε.

3. Στην περίπτωση μιας ΗΕΔ που οφείλεται αποκλειστικά σε κίνηση, ο «νόμος» του Faraday (4) είναι στην ουσία απλή συνέπεια του ορισμού της ΗΕΔ. Αντίθετα, όταν ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο είναι παρόν, η παρόμοια εξίσωση (6) είναι ένας αληθινός φυσικός νόμος (νόμος των Faraday-Henry).

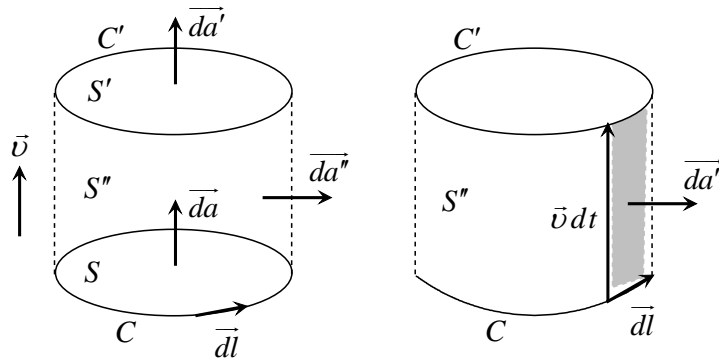
4. Σε ένα κύκλωμα συνεχούς ρεύματος, που περιέχει ιδανική πηγή, η ΗΕΔ στην κατεύθυνση του ρεύματος ισούται με την τάση της πηγής και παριστά το έργο ανά μονάδα φορτίου που προσφέρει η πηγή για μια πλήρη διαδρομή κατά μήκος του κυκλώματος.

5. Αν ο βρόχος που περιγράφει το κύκλωμα παριστά μεταλλικό σύρμα πεπερασμένης ηλεκτρικής αντίστασης, ο νόμος του Ohm μπορεί να εκφραστεί ως προς την ΗΕΔ με την εξίσωση (16).

### Παράρτημα

Ακολουθεί αναλυτική απόδειξη της σχέσης (4) της Παρ.3:

Υποθέστε ότι, τη χρονική στιγμή  $t$ , το σύρμα περιγράφει μια κλειστή καμπύλη  $C$  η οποία είναι το όριο μιας επίπεδης επιφάνειας  $S$ . Τη στιγμή  $t' = t + dt$ , το σύρμα (το οποίο έχει εν τω μεταξύ μετακινηθεί) περιγράφει μια άλλη καμπύλη  $C'$  η οποία οριοθετεί μια επιφάνεια  $S'$ . Έστω  $\vec{dl}$  ένα στοιχείο τής  $C$  στη φορά διαγραφής της καμπύλης, και έστω  $\vec{v}$  η ταχύτητα αυτού του στοιχείου ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή (η ταχύτητα των στοιχείων τής  $C$  μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος της καμπύλης):



Η φορά των στοιχείων επιφάνειας  $\vec{da}$  και  $\vec{da}'$  είναι συμβατή με την επιλεγμένη φορά του  $\vec{dl}$ , σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Το στοιχείο της πλευρικής («κυλινδρικής») επιφάνειας  $S''$  που διαγράφεται λόγω της κίνησης της καμπύλης  $C$ , δίνεται από τη σχέση

$$\vec{da}'' = \vec{dl} \times (\vec{v} dt) = (\vec{dl} \times \vec{v}) dt$$

Επειδή το μαγνητικό πεδίο είναι στατικό, μπορούμε να δούμε τη φυσική συνθήκη με έναν κάπως διαφορετικό τρόπο: Αντί να υποθέσουμε ότι η καμπύλη  $C$  μετακινείται μέσα στο χρονικό διάστημα  $dt$  έτσι ώστε τα σημεία της να συμπίψουν με τα σημεία της καμπύλης  $C'$  τη χρονική στιγμή  $t'$ , θεωρούμε δύο σταθερές καμπύλες  $C$  και  $C'$  την ίδια χρονική στιγμή  $t$ . Στην περίπτωση ενός στατικού πεδίου  $\vec{B}$ , η μαγνητική ροή δια μέσου της  $C'$  τη στιγμή  $t' = t + dt$  (σύμφωνα με την αρχική υπόθεση της κινούμενης καμπύλης) είναι ίση με τη ροή δια μέσου της ίδιας αυτής καμπύλης τη στιγμή  $t$ , δεδομένου ότι ουδεμία μεταβολή του μαγνητικού πεδίου λαμβάνει χώρα μέσα στο χρονικό διάστημα  $dt$ . Τώρα, παρατηρούμε ότι οι ανοιχτές επιφάνειες  $S_1 = S$  και  $S_2 = S' \cup S''$  έχουν ως κοινό όριο την καμπύλη  $C$ . Επειδή το μαγνητικό πεδίο είναι σοληνωτό, η ίδια μαγνητική ροή  $\Phi_m$  διέρχεται από τις  $S_1$  και  $S_2$  τη στιγμή  $t$ . Δηλαδή,

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{da}_1 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{da}_2 \Rightarrow \int_S \vec{B} \cdot \vec{da} = \int_{S'} \vec{B} \cdot \vec{da}' + \int_{S''} \vec{B} \cdot \vec{da}''$$

Αλλά, ξαναγυρνώντας στην αρχική υπόθεση μιας κινούμενης καμπύλης, παρατηρούμε ότι

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{da} = \Phi_m(t) = \text{μαγνητική ροή δια μέσου του σύρματος τη στιγμή } t$$

και

$$\int_{S'} \vec{B} \cdot \overline{da'} = \Phi_m(t+dt) = \text{μαγνητική ροή δια μέσου του σύρματος τη στιγμή } t+dt$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \Phi_m(t) &= \Phi_m(t+dt) + \int_{S''} \vec{B} \cdot \overline{da''} \Rightarrow \\ d\Phi_m &= \Phi_m(t+dt) - \Phi_m(t) = - \int_{S''} \vec{B} \cdot \overline{da''} = - dt \oint_C \vec{B} \cdot (\overline{dl} \times \vec{v}) \Rightarrow \\ - \frac{d\Phi_m}{dt} &= \oint_C \vec{B} \cdot (\overline{dl} \times \vec{v}) = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \overline{dl} = \mathcal{E} \end{aligned}$$

σε απόλυτη συνέπεια με τις (3) και (4).

## Αναφορές

1. D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3<sup>rd</sup> Edition (Prentice-Hall, 1999).
2. R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2<sup>nd</sup> Edition (Wiley, 1986).
3. J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4<sup>th</sup> Edition (Addison-Wesley, 1993).
4. W. N. Cottingham, D. A. Greenwood, *Electricity and Magnetism* (Cambridge, 1991).
5. P. Lorrain, D. R. Corson, F. Lorrain, *Electromagnetic Fields and Waves*, 3<sup>rd</sup> Edition (Freeman, 1988).
6. V. Rojansky, *Electromagnetic Fields and Waves* (Dover, 1979).
7. A. Shadowitz, *The Electromagnetic Field* (McGraw-Hill, 1975).
8. C. J. Papachristou, *Introduction to Electromagnetic Theory and the Physics of Conducting Solids*, 2<sup>nd</sup> Edition (Naval Academy of Greece Publications, 2010)<sup>1</sup>.
9. A. N. Magoulas, *Applied Electromagnetism*, 2<sup>nd</sup> Edition (Naval Academy of Greece Publications, 2012)<sup>2</sup>.
10. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3<sup>rd</sup> Edition (Wiley, 1999)<sup>3</sup>
11. W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2<sup>nd</sup> Edition (Addison-Wesley, 1962).
12. W. Greiner, *Classical Electrodynamics* (Springer, 1998).

<sup>1</sup> <http://openelectronics.snd.edu.gr/openelectronics-2.3.1/modules/document/file.php/TOM6104/EM%20Volume%20PDF.pdf>

<sup>2</sup> <http://openelectronics.snd.edu.gr/openelectronics-2.6.1/modules/document/file.php/TMD107/electromagnetics13.pdf>

<sup>3</sup> Ένας από εμάς (Κ.Ι.Π.) έχει την πεποίθηση ότι η 2η έκδοση του 1975 (δυστυχώς εξαντλημένη) ήταν κατά πολύ ανώτερη της (εδώ αναφερόμενης) αναθεωρημένης 3ης έκδοσης!