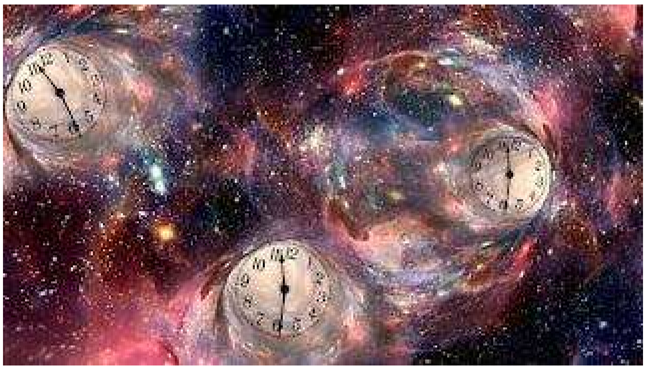
Ο διαφορικός χαρακτήρας του φυσικού νόμου

Posted on December 14, 2021 by Costas Papachristou



Γράφει: Κώστας Παπαχρήστου

> *Γιατί οι πλέον θεμελιώδεις νόμοι στην κλασική αλλά και τη σύγχρονη Φυσική εκφράζονται μαθηματικά με διαφορικές εξισώσεις; Η απάντηση βρίσκεται στο πώς το "είναι" οδηγεί στο "γίγνεσθαι", πώς το "εδώ" απλώνεται στο "παντού"…*

Τι μας διδάσκει ένα γήπεδο ποδοσφαίρου…

Ας φανταστούμε μία φωτογραφία τραβηγμένη από δεξιοτέχνη φωτογράφο σε έναν ποδοσφαιρικό αγώνα: Ένας παίκτης έχει μόλις σουτάρει ένα πέναλτι, και τη στιγμή της λήψης ο τερματοφύλακας εκτινάσσεται προς την κατεύθυνση της μπάλας. Βλέπουμε καθαρά τις εκφράσεις αγωνίας στα πρόσωπα των δύο ποδοσφαιριστών – για τους εντελώς αντίθετους λόγους, φυσικά. Πρόκειται για μία μεγαλειώδη αποτύπωση λεπτομερειών της στιγμής, οι οποίες σίγουρα θα ξέφευγαν από την προσοχή εκείνου που παρακολουθεί το παιχνίδι σε συνεχή ροή. Με μία σημαντική διαφορά: η φωτογραφία ποτέ δεν μας αποκαλύπτει τη συνέχεια της φάσης. Δεν μαθαίνουμε, δηλαδή, αν ο τερματοφύλακας απέκρουσε, τελικά, το πέναλτι, ή αν η μπάλα κατέληξε στα δίχτυα, στο δοκάρι ή στα… περιστέρια που πετούσαν πάνω από το γήπεδο!

Αφήνουμε, τώρα, τη φωτογραφική μηχανή και παίρνουμε μία βιντεοκάμερα. Για κάποιον απροσδιόριστο λόγο, την εστιάζουμε σταθερά στο κέντρο του γηπέδου. Έτσι, μπορούμε να καταγράψουμε όλες τις φάσεις στο συγκεκριμένο σημείο και μόνο, από την αρχή ως το τέλος του παιχνιδιού. Θα ήταν μία ωραία φάρσα σε έναν φίλο μας που δεν μπόρεσε να έρθει στο γήπεδο, αν του δίναμε το video για "να δει το παιχνίδι"!

Στην περίπτωση της φωτογραφίας, μπορούμε να δούμε τι συμβαίνει κάποια χρονική στιγμή σε μία περιοχή του χώρου, αλλά δεν ξέρουμε τι θα συμβεί τις επόμενες στιγμές στην περιοχή αυτή. Στην περίπτωση του σταθερά εστιασμένου video, γνωρίζουμε τη χρονική εξέλιξη των πραγμάτων σε ένα συγκεκριμένο σημείο αλλά δεν έχουμε ιδέα τι γίνεται σε άλλα σημεία. Όμως, δεν μας αρκεί το *"τώρα"*, θέλουμε να γνωρίζουμε και το *"μετά"*. Όπως και δεν μας φτάνει το *"εδώ"*, χρειάζεται να ξέρουμε και το *"εκεί"*.

Φεύγουμε από το ποδόσφαιρο και πάμε στον φυσικό κόσμο. Όλα τα φυσικά φαινόμενα που υποπίπτουν στην αντίληψή μας "απλώνονται" στον χώρο και τον χρόνο. Αν υποτεθεί ότι τα φαινόμενα αυτά ακολουθούν καθορισμένους νόμους και δεν υπόκεινται στην τυχαιότητα, οι νόμοι θα πρέπει να δίνουν απαντήσεις σε δύο βασικά ερωτήματα:

* Αν γνωρίζω τι συμβαίνει *τώρα*, πώς μπορώ να προβλέψω τι θα συμβεί *μετά*;

* Αν γνωρίζω την κατάσταση *εδώ*, πώς μπορώ να γνωρίσω την κατάσταση και οπουδήποτε *αλλού*;

Ένας μαθηματικός θα μας βεβαίωνε τώρα ότι, στη δική του γλώσσα, τα φυσικά φαινόμενα – τουλάχιστον τα πλέον θεμελιώδη – θα πρέπει να περιγράφονται με *διαφορικές εξισώσεις*!

Το κλασικό σωματίδιο στη Νευτώνεια Μηχανική

Με τους δυναμικούς νόμους του ο Νεύτωνας καθόρισε την αιτιότητα που συνδέει το *"τώρα"* με το *"μετά"*. Ας πάρουμε την απλούστερη περίπτωση ενός *σημειακού σωματιδίου* μάζας m, το οποίο υπόκειται σε ολική δύναμη $\boldsymbol{F}$ (με *bold* χαρακτήρες θα συμβολίζουμε διανυσματικά μεγέθη). Ο λεγόμενος *δεύτερος νόμος του Νεύτωνα* ορίζει τη δύναμη αυτή ως τον ρυθμό μεταβολής της ορμής $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ του σωματιδίου, όπου $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου:

$$\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p} / dt \qquad (1)$$

Η σχέση (1) μπορεί να γραφεί στην πιο οικεία μορφή

$$\boldsymbol{F} = m\, d\boldsymbol{v} / dt = m\, \boldsymbol{a} \qquad (2)$$

όπου $\boldsymbol{a}=d\boldsymbol{v}/dt$ η επιτάχυνση του σωματιδίου.

Τώρα, τους νόμους του Νεύτωνα έχει "δικαίωμα" να χρησιμοποιεί μόνο ένας *αδρανειακός* παρατηρητής, που χρησιμοποιεί ένα σύστημα αξόνων που ονομάζουμε *αδρανειακό σύστημα αναφοράς* (βλ., π.χ., [1], Παρ. 3.1). Με απλά λόγια, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ένα *ελεύθερο* σωμάτιο (το οποίο, δηλαδή, δεν υπόκειται σε αλληλεπιδράσεις με τον υπόλοιπο κόσμο) κινείται με σταθερή ταχύτητα (έχει μηδενική επιτάχυνση).

Έστω O η αρχή των αξόνων σε ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς. Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι τρισορθογώνιο, με άξονες (x,y,z) στον τρισδιάστατο χώρο μας. Η τριάδα (x,y,z) συμβολίζει και τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου Σ του χώρου. Το διάνυσμα $\boldsymbol{r}=O\Sigma$ (με κατεύθυνση από O προς Σ), με συνιστώσες τις συντεταγμένες (x,y,z), καλείται *διάνυσμα θέσης* του σημείου Σ.

Για ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται στον χώρο, το διάνυσμα θέσης του, $\boldsymbol{r}$, μεταβάλλεται με τον χρόνο: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$. Η ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t ορίζεται ως η χρονική παράγωγος $\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt$, ενώ η επιτάχυνση του σωματιδίου τη στιγμή αυτή είναι

$$\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v} / dt = d^2 \boldsymbol{r} / dt^2 \qquad (3)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το σωματίδιο m βρίσκεται μέσα σε ένα *πεδίο δυνάμεων* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ (π.χ., ένα ηλεκτροστατικό πεδίο ή ένα πεδίο βαρύτητας). Από τις (2) και (3), τότε, έχουμε:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m\, d^2 \boldsymbol{r} / dt^2 \qquad (4)$$

Αυτή είναι η μαθηματική διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στη μορφή διαφορικής εξίσωσης για το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}(t)$ του σωματιδίου m. Επειδή η εξίσωση είναι *δευτέρας* τάξεως [περιέχει μέχρι δεύτερη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης $\boldsymbol{r}(t)$], για την επίλυσή της χρειάζεται να μας δοθούν και δύο *αρχικές* *συνθήκες*. Συγκεκριμένα, η αρχική θέση ***r***(0) και η αρχική ταχύτητα ***υ***(0) του *m* τη χρονική στιγμή *t*=0. Έτσι, αν γνωρίζουμε πού ακριβώς βρίσκεται και με τι ταχύτητα κινείται το σωματίδιο τούτη τη στιγμή (*t*=0), η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (4) θα μας κάνει πρόβλεψη για τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου για κάθε επόμενη χρονική στιγμή (*t* >0).

Δυστυχώς, κατά τον 20ό αιώνα η *θεωρία του χάους* ήρθε να διαψεύσει τις απόλυτες βεβαιότητες του Νεύτωνα. Σε κάποια μηχανικά συστήματα, ακόμα και αν γνωρίζουμε τι συμβαίνει τώρα, είναι αδύνατο να προβλέψουμε τι θα συμβεί αργότερα. Μία πεταλούδα που κουνάει τα φτερά της στην Κίνα είναι δυνατό μετά από μερικές μέρες να προκαλέσει ανεμοστρόβιλο στο Τέξας! Όπως και είναι δυνατό τίποτα τέτοιο να μη συμβεί…

Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell

Το *ηλεκτρομαγνητικό πεδίο* είναι μία φυσική οντότητα που ορίζεται τόσο στον χρόνο, όσο και στον χώρο. Δηλαδή, εκτός από το *"τώρα"* και το *"μετά"*, όπως στην περίπτωση του σημειακού σωματιδίου, μας ενδιαφέρει εξίσου το *"εδώ"* και το *"εκεί"*. Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο ***E*** και το μαγνητικό πεδίο ***B*** είναι συναρτήσεις *τεσσάρων* μεταβλητών: των χωρικών συντεταγμένων (*x*,*y*,*z*) και του χρόνου *t*. Τα ***E*** και ***B*** θα ικανοποιούν τώρα ένα σύστημα *μερικών διαφορικών εξισώσεων*, στο οποίο εμφανίζονται οι *μερικές* παράγωγοι των πεδίων ως προς τις μεταβλητές (*x*,*y*,*z*,*t*). Το σύστημα αυτό είναι οι τέσσερις *εξισώσεις του Maxwell* [2]:

$$(a) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(b) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(c) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(d) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

όπου *ρ* και ***J*** οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος, αντίστοιχα, ενώ τα *ε* και *μ* είναι σταθερές. Οι εξισώσεις αυτές συνδέουν τις χωροχρονικές μεταβολές των πεδίων ***E*** και ***B*** μεταξύ τους, καθώς και με τις "πηγές" του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (τις κατανομές φορτίου και ρεύματος). Η ολοκλήρωση του συστήματος

Maxwell για δοσμένες αρχικές και οριακές συνθήκες δίνει τα ***E*** και ***B*** σαν συναρτήσεις των (x,y,z,t).

Κβαντομηχανική και σχετικότητα

Η θεμελιώδης διαφορική εξίσωση στην *κβαντομηχανική* είναι η *εξίσωση του Schrödinger* :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r},t).$$

Το τετράγωνο του μέτρου της μιγαδικής συνάρτησης $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ σχετίζεται με την *πιθανότητα* να βρεθεί ένα σωματίδιο μάζας m μέσα σε έναν στοιχειώδη όγκο γύρω από το σημείο $\boldsymbol{r}$ τη χρονική στιγμή t. Για την ολοκλήρωση της εξίσωσης πρέπει να μας δοθεί η τιμή της συνάρτησης Ψ σε κάθε σημείο $\boldsymbol{r}$ τη χρονική στιγμή $t=0$ (*αρχική συνθήκη*), καθώς και κατάλληλες *οριακές συνθήκες* που ισχύουν για κάθε χρονική στιγμή t.

Σύμφωνα με την *γενική θεωρία της σχετικότητας*, το πρόβλημα της βαρύτητας ανάγεται στην υπόθεση της καμπύλωσης του χωροχρόνου λόγω της παρουσίας της ύλης. Η γεωμετρία του χωροχρόνου καθορίζεται από τον *μετρικό τανυστή* $g_{\mu\nu}$ ($\mu,\nu=0,1,2,3$), που είναι συνάρτηση των χωροχρονικών συντεταγμένων (t,x,y,z). Η σχέση ανάμεσα στη γεωμετρία του χωροχρόνου και την ύλη που την διαμορφώνει δίνεται από τις *εξισώσεις του Einstein*, που είναι σύστημα διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως για τις χωροχρονικές συναρτήσεις $g_{\mu\nu}$.

Υπάρχουν, όμως, και μη-διαφορικοί φυσικοί νόμοι!

Οι θεμελιώδεις φυσικοί νόμοι, όπως αυτοί του Νεύτωνα ή εκείνοι που περιγράφονται με τις εξισώσεις του Maxwell, εκφράζονται μαθηματικά με διαφορικές εξισώσεις και αφορούν τη χρονική εξέλιξη της κατάστασης ενός καλά καθορισμένου συστήματος σωματιδίων, ή την χωροχρονική συμπεριφορά ενός πεδίου. Υπάρχουν όμως και μη-διαφορικοί (αλλά πολύ σημαντικοί!) νόμοι που εκφράζουν, π.χ., σχέσεις ανάμεσα σε φυσικά μεγέθη ή πεδία, ή περιγράφουν την στατιστική συμπεριφορά ενός τεράστιου (πρακτικά μη-μετρήσιμου) πλήθους σωματιδίων. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Ο *νόμος της βαρύτητας*, του Νεύτωνα: $F=GmM / r^2$, δίνει την έλξη που ασκεί μία μάζα M (π.χ., η Γη) σε μία μάζα m (π.χ., έναν δορυφόρο σε τροχιά γύρω από τη Γη) που βρίσκεται σε απόσταση r από την M.

Ο (γενικευμένος) *νόμος του Ohm*: $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$, συνδέει την πυκνότητα ρεύματος $\boldsymbol{J}$ σε ένα σημείο ενός ηλεκτρικά αγώγιμου μέσου ειδικής αγωγιμότητας σ, με την ένταση $\boldsymbol{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό. Όμως, πέραν του ότι ο νόμος αυτός δεν έχει γενική εφαρμογή σε όλα τα υλικά μέσα, αποτελεί και προσεγγιστική εμπειρική σχέση που ισχύει με την προϋπόθεση ότι το πεδίο $\boldsymbol{E}$ δεν είναι πολύ ισχυρό. Ο νόμος του Ohm, δηλαδή, δεν αποτελεί ακριβή και γενικό νόμο της Φύσης.

Στην κατηγορία των στατιστικών νόμων ανήκουν οι νόμοι της θερμοδυναμικής. Ο *πρώτος θερμοδυναμικός νόμος*, που κατ' ουσίαν εκφράζει διατήρηση της ενέργειας, δεν είναι παρά γενίκευση της αρχής διατήρησης (ή μεταβολής, αν δρουν και μη-συντηρητικές δυνάμεις) της μηχανικής ενέργειας ενός Νευτώνειου συστήματος σωματιδίων [1].

Όσο για τον *δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής* [3], εκφράζει μία αυτονόητη αρχή: Αυτό που είναι πολύ-πολύ-πολύ *απίθανο* – αν και, θεωρητικά, όχι *αδύνατο*! – να συμβεί, δεν θα το δούμε ποτέ να συμβαίνει στην πράξη.

Το γενικό συμπέρασμα είναι ότι οι αληθινά *θεμελιώδεις* φυσικοί νόμοι – αυτοί, δηλαδή, που περιγράφουν τη Φύση στο πλέον στοιχειώδες επίπεδο των σωματιδίων και των πεδίων – εκφράζονται μαθηματικά σε διαφορική μορφή. Με άλλα λόγια, οι πληροφορίες που αντλούνται από τους νόμους αυτούς προκύπτουν από την επίλυση *διαφορικών* εξισώσεων!

[1] https://eclass.hna.gr/modules/document/file.php/TOM6103/Mechanics%20Volume%20PDF.pdf

[2] https://eclass.hna.gr/modules/document/file.php/TOM6104/EM%20Volume%20PDF.pdf

[3] https://eclass.hna.gr/modules/document/file.php/TOM6106/reversing%20time%20arrow.pdf